УДК 60.001.11:531.8

СОСТАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СЛОЖНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ВЫДЕЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ

Авсиевич А.М., Кудин В.В., Качанов И.В., Кругликов А.А., Самойлов И.Р.

Белорусский национальный технический университет, Минск

Любые звенья структурных схем сложносоставных систем описываются дифференциальными уравнениями, учитывающими инерционные, упругие и диссипативные характеристики, а также внешние воздействия. Уравнения системы включают в себя всю совокупность динамических звеньев, входящих в систему. Таким образом, динамическим звеном системы является ее часть, обладающая определенными свойствами в динамическом отношении. Звенья системы могут иметь самую разную физическую основу и конструктивное исполнение, но относиться к одной функциональной группе [1]. Взаимосвязь входного и выходного сигналов в динамическом звене одной группы будет описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями, что свидетельствует об одинаковых динамических свойствах.

Реальные звенья сложносоставных систем обладают большим структурным разнообразием. Если выделить типовые звенья, то сложные системы компонуются путем их последовательного и параллельного соединения. В основу формирования типовых динамических звеньев положен принцип, описывающийся дифференциальным уравнением не выше второго порядка, т.е. в основу классификации звеньев положены их динамические свойства. Это позволяет получить единые методы исследования и расчета, не зависящие от различия физических процессов и конструктивных решений. Простейшими типовыми динамическими звеньями являются: усилительное, интегрирующее, апериодическое, колебательное, дифференцирующее и запаздывающее, связь входных и выходных сигналов для которых указана в [2].

В усилительном звене (рис.1) выходная функция $f_{\text{вых}}$ в каждый момент времени пропорциональна входной величине $f_{\text{вх}}$, тогда

$$f_{вых} = k \cdot f_{вх}, \tag{1}$$

где k – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом усиления звена.

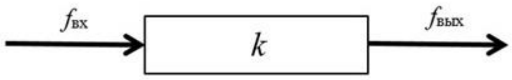

Рис. 1. Структурная схема усилительного звена

Уравнение (1) является алгебраическим, следовательно, усилительное звено передает сигнал мгновенно, без переходных динамических процессов.

В интегрирующем звене выходная величина $f_{\text{вых}}$ пропорциональна интегралу входной величины, а дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$\frac{df_{вых}}{dt} = k \cdot f_{вх}, \tag{2}$$

где k – коэффициент усиления по скорости.

Тогда

$$f_{вых} = \int_0^t k f_{вх} dt. \tag{3}$$

Переходные процессы, происходящие в интегрирующем звене, показаны на рис. 2. Апериодическому звену удовлетворяет дифференциальное уравнение вида

$$T\frac{df_{вых}}{dt} + f_{вых} = kf_{вх}, \tag{4}$$

где T и k – некоторые параметры.

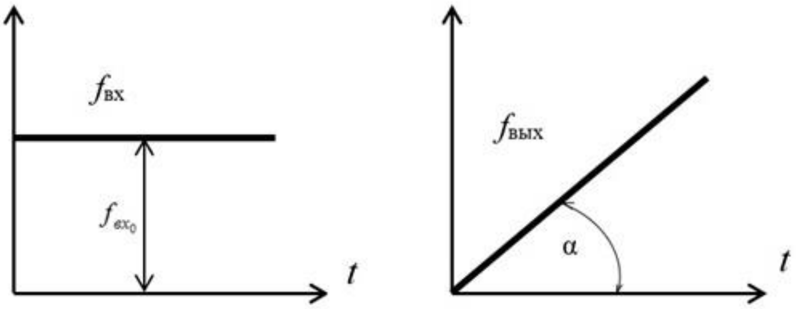

Рис. 2. Переходные процессы интегрирующего звена

Это уравнение является дифференциальным уравнением первого порядка. При $t \to \infty$ выходная величина $f_{вых}$ либо монотонно убывает, либо монотонно возрастает и асимптотически стремится к некоторой величине k (рис. 3).

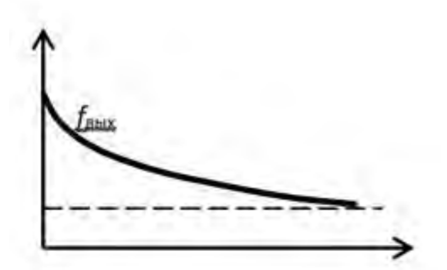

Рис. 3. Выходная функция апериодического звена

Колебательное звено удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$T_2^2\frac{d^2 f_{вых}}{dt^2} + T_1\frac{df_{вых}}{dt} + f_{вых} = kf_{вх}, \tag{5}$$

где $T_2^2 = \frac{a}{c}$, $T_1 = \frac{b}{c}$ – некоторые постоянные времени; k – коэффициент усиления.

В уравнении (5) первое слагаемое характеризует инерционную составляющую, второе – диссипативную составляющую, третье – упругую составляющую, а правая часть уравнения – внешнее воздействие на звено.

Для дифференцирующего звена выходная величина $f_{вых}$ пропорциональна производной повремени от входной величины $f_{вх}$

$$f_{вых} = k\frac{df_{вх}}{dt}, \tag{6}$$

Отсюда следует, что выходная величина $f_{вых}$ пропорциональна скорости изменения входной $f_{вх}$. Если входная и выходная величина имеют одинаковую размерность, то коэффициент k измеряется в секундах.

В запаздывающем звене выходная величина $f_{вых}$ точно совпадает с входной величиной $f_{вх}$, но с некоторым запаздыванием по времени (рис. 4)

$$f_{вых} = f_{вх}(t - \tau). \tag{6'}$$

Математическое описание звеньев и систем. Любые динамические звенья и их системы описываются дифференциальными уравнениями или функциональными зависимостями [3].

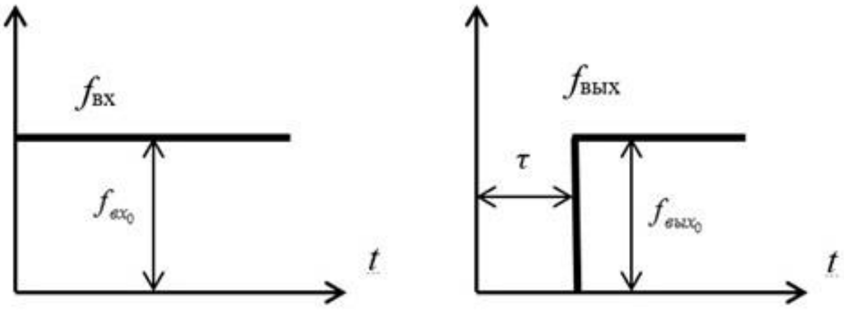

Рис. 4. Переходный процесс запаздывающего звена

Уравнения системы включают всю совокупность дифференциальных уравнений их звеньев. Математически можно представить, что выходной параметр, определяемый вектором $f_{вых}$, связан с входным параметром, определяемым вектором $X_{вх}$, следующим соотношением

$$f_{вых} = f\left(X_{вх}\right). \tag{7}$$

Для каждого звена системы имеем математическую модель. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$\begin{gathered} a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = \\ = b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} t(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{df(t)}{dt} + b_0 f(t) \end{gathered} \tag{8}$$

где $m \neq n \neq 1$, a_i , b_i – некоторые постоянные коэффициенты.

Любое изменение линейного звена системы вызывает движение этого звена и представляется суммой свободного и вынужденного движений

$$x(t) = x_{св}(t) + x_{вын}(t), \tag{9}$$

где $x_{св}(t)$ – решение однородного дифференциального уравнения при отсутствии внешних воздействий ($f(t) = 0$), зависящее от начальных условий;

$x_{вын}(t)$ – решение неоднородного дифференциального уравнения под влиянием внешних воздействий при нулевых внешних воздействиях (исходном состоянии покоя).

Для определения $x(t)$ линейного звена используем преобразование Лапласа, формула которого имеет вид [4]

$$L[kf(t)] = kF_s\,, \tag{10}$$

где L – символ перехода от оригинала к изображению;

$F_s = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$ – изображение оригинала $f(t)$;

S – некоторая комплексная переменная.

В свойствах преобразования Лапласа следует выделить следующее правило: если справедливо преобразование (10), то справедливо и следующе преобразование

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = S^n F(S) - \sum_{k=1}^{n} S^{n-k} f^{(k-1)}(0). \tag{11}$$

Эту формулу запишем для случаев n=1 и n=2

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = SF(S) - f(0);$$

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = S^2 F(S) - Sf(0) - f(0),$$

т.е. при ненулевых начальных условиях необходимо учитывать начальные условия оригинала и (n-1) его производных.

При нулевых начальных условиях (вынужденное движение)

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = S^n F(S) = F(S)S^n. \tag{12}$$

Эти формулы показывают, что применение преобразования Лапласа к обеим частям дифференциального уравнения позволяет заменить их алгебраическими, что значительно упрощает исследование линейных звеньев системы.

Применим преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях к обеим частям дифференциального уравнения (8) и получим уравнение в изображениях

$$\begin{aligned} &a_n S^n X(S) + a_{n-1} S^{n-1} X(S) + \ldots + a_1 S X(S) + a_0 X(S) = \\ &b_m S^m F(S) + b_{m-1} S^{m-1} F(S) + \ldots + b_1 S F(S) + b_0 F(S) \end{aligned}, \tag{13}$$

которое перепишем в виде

$$D(S)X(S) = M(S)F(S),$$

где $D(S) = a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \ldots + a_1 S + a_0 -$ собственный оператор линейного звена системы;

$M(S) = b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \ldots + b_1 S + b_0 -$ взаимный оператор линейного звена системы.

Собственный оператор является характеристическим уравнением однородного дифференциального уравнения, корни которого определяют частоты собственных свободных колебаний линейного звена сложносоставной динамической системы.

Взаимный оператор определяет преобразование входного воздействия, происходящее в линейном звене.

Передаточной функцией линейного звена называется отношение изображения по Лапласу входной и выходной переменных при нулевых начальных условиях, тогда

$$W(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \ldots + b_1 S + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \ldots + a_1 S + a_0} = \frac{M(S)}{D(S)}. \tag{14}$$

Функция $W(S)$ является важнейшей динамической характеристикой линейного звена системы. Зная передаточную функцию и изображение по Лапласу входного сигнала, можно найти изображение выходной величины

$$X(S) = W(S)F_s. \tag{15}$$

В специальной литературе [3] имеются таблицы соответствий оригиналов и их изображений по Лапласу.

Рассмотрим свойства передаточной функции $W(\mathrm{S})$:

1. Во всякой физически реализуемой системе (звене) степень m полинома числителя функции $W(\mathrm{S})$ не более степени n полинома ее знаменателя, т.е. $m \le n$. Это обусловлено тем, что в природе не существует идеальных дифференцируемых устройств. Поэтому в реальных звеньях и системах реакция на выходе наступает после или в момент приложения воздействия.

2. Знаменатель D(S) функции $W(\mathrm{S})$ – собственный оператор звена системы, а его нули есть корни характеристического уравнения. В математике их принято называть полюсами передаточной функции, т.к. при комплексной переменной S, равной любому корню, функция $W(\mathrm{S})$ обращается в бесконечность.

3. При S=0 следует, что $W(0) = \dfrac{a_0}{b_0} = k$ – передаточный коэффициент линейного звена.

4. Свободное движение линейного звена системы определяется полюсами передаточной функции, т.е.

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = 0 . \quad (16)$$

Тогда общее решение этого однородного дифференциального уравнения

$$X(t) = C_1 e^{S_1 t} + C_2 e^{S_2 t} + \ldots + C_n e^{S_n t} , \quad (17)$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – некоторые постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий;

$S_1, S_2, ..., S_n$ – корни характеристического уравнения.

Передаточные функции соединения звеньев. Известно, что в структурных схемах сложносоставных систем линейные звенья могут соединяться различными способами.

1. Последовательное соединение (рис. 5).

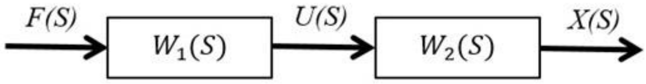

Рис. 5. Последовательное соединение звеньев

Из рисунка следует, что

$$W(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = W_1(S) W_2(S)$$

Для *n* последовательно соединенных звеньев передаточная функция соединения равна произведению передаточных функций отдельных звеньев

$$W(S) = \prod_{i=1}^{n} W_i(S). \quad (18)$$

2. Параллельное соединение (рис. 6).

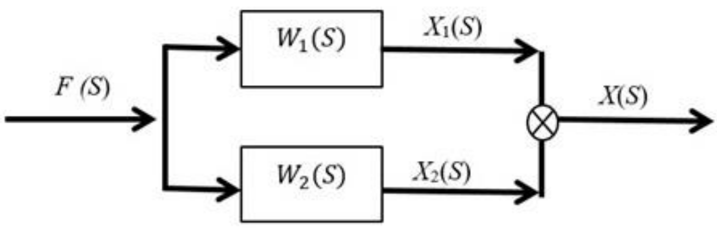

Рис. 6. Параллельное соединение звеньев

Из структурной схемы (рис. 8) следует, что

$$W(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{X_1(S)}{F(S)} + \frac{X_2(S)}{F(S)} = W_1(S) + W_2(S).$$

Если в цепи находится *n* звеньев, то

$$W(S) = \sum_{i=1}^{n} W_i(S). \quad (19)$$

3. Встречно-параллельное соединение звеньев при наличии обратной связи. В этом случае для нахождения передаточной функции замкнутого контура необходимо выделить прямую цепь передачи возмущения (воздействия) и цепь обратной связи, найти их передаточные функции и воспользоваться формулой

$$W(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{W_1(S)}{1 + W_1(S) W_2(S)}, \quad (20)$$

где $W_1(S)$ и $W_2(S)$ – соответственно передаточные функции прямого преобразования и обратной связи

Характеристики линейных звеньев сложносоставных технологических систем. Для анализа линейных звеньев и систем в целом используются временные и частотные характеристики.

1. Временная характеристика. Временной характеристикой называется вынужденная реакция при нулевых начальных условиях, обусловленная типовым воздействием. Единичная ступенчатая функция представлена на рис. 7. Ее математическое описание имеет вид

$$f(t)=1=\begin{cases}0, t<0\\ 1, t>0\end{cases}. \tag{21}$$

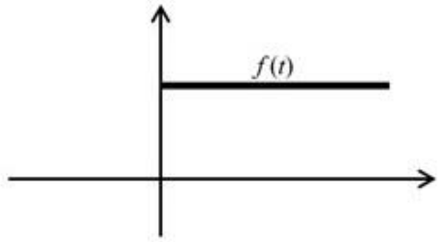

Рис. 7. График ступенчатой функции

Изображение по Лапласу: $L=(1(t))=1/S$

Вынужденная реакция линейного звена системы на воздействие вида единичной ступенчатой функции называется переходной функцией и обозначается $h(t)$

$$L(h(t))=H(S)=\frac{W(S)}{S}, \tag{22}$$

где $W(S)$ – передаточная функция линейного звена.

2. **Частотная характеристика**. Пусть на вход линейного звена подается гармонический сигнал вида

$$f(t)=a_f \sin \omega t .$$

Учитывая, что

$$e^{i\omega t}=\cos\omega t + j\sin\omega t ,$$

тогда вынужденная реакция

$$f(t)=a_f e^{i\omega t} .$$

Передаточная функция системы описывает линейную систему звена

$$W(S)=\frac{X(S)}{F(S)}=\frac{b_m S^m + b_{m-1}S^{m-1}+\ldots+b_1 S+b_0}{a_n S^n + a_{n-1}S^{n-1}+\ldots+a_1 S+a_0}$$

При входном сигнале $f(t)=a_f e^{i\omega t}$ и выходном сигнале $x(t)=b_x e^{i\omega t}$ отношение комплексных амплитуд выходного сигнала и входного гармонического сигнала называется частотной передаточной функцией (комплексным коэффициентом передачи звена $W(j\omega)$)

$$W(j\omega)=\frac{X(t)}{F(t)}=\frac{b_x e^{i\omega t}}{a_f e^{i\omega t}}=\frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1}+\ldots+b_1(j\omega)+b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\ldots+a_1(j\omega)+a_0},$$

тогда можно записать

$$b_x=a_f W(j\omega). \tag{23}$$

Выделяя в $W(j\omega)$ действительную и мнимую части, можно записать

$$W(j\omega)-\operatorname{Re}W(j\omega)+j\operatorname{Im}W(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)=A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}. \tag{24}$$

где $A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}$ – модуль частотной передаточной функции;

$\varphi(\omega)=arctg\left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)}\right)$ – начальная фаза частотной передаточной функции.

Следовательно, при подаче на вход линейной системы гармонического сигнала на ее выходе после затухания свободного движения установится гармонический сигнал с той же частотой, но с амплитудой $a_x = A(\omega)a_f$ и со сдвигом по фазе

$$\varphi(\omega)=arctg(W(j\omega)). \qquad (25)$$

Графики функций $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ представляют собой соответственно амплитудно-частотную (АЧХ) и фазо-частотную (ФЧХ) характеристики.

Амплитудно-фазо-частотная характеристика звена может быть построена по уравнению (29) при изменении частоты от 0 до ∞, так как

$$U(-\omega)=U(\omega) \text{ и } V(-\omega)=V(\omega).$$

Описанный подход позволяет получить полное математическое описание колебаний любых элементов механической системы с учетом взаимовлияния ее элементов и связать характеристики колебательных процессов с долговечностью и показателями качества работы системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кудинов В.А. Динамика станков, М.: Машиностроение, 1967. – 358с.*
2. *Чигарев А.В. Введение в мехатронику: учебное пособие / А.В. Чигарев, К. Циммерманн, В.А. Чигарев. – Минск: БНТУ, 2013. – 388с.*
3. *Дружинский И.А. Механические цепи, Л.: Машиностроение, – 1977. – 237с.*
4. *Левитский Н.И. Колебания в механизмах: учебное пособие для вузов. – Москва: Наука, 1988. – 336с.*