

## РАЗРАБОТКА ОБОБЩЕННОЙ МАТРИЦЫ ВРАЩЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДВИЖЕНИЯ МУЛЬТИКОПТЕРА

инженер <sup>1</sup>Трифанков Д.В., к.ф.-м.н. <sup>2</sup>Ширвель П.И., асп. <sup>2</sup>Конон И.И.

<sup>1</sup>ОАО «АГАТ-системы управления» – управляющая компания холдинга “Геоинформационные системы управления” АГАТ

<sup>2</sup>Белорусский национальный технический университет

При решении поставленных в [1] задач, в части правильного задания, требуемого/желаемого положения объекта исследований в пространстве, а также для осуществления переходов от одной системы координат к другой, будем в дальнейшем применять матрицы вращения. Матрица вращения [2] для любого беспилотного летательного аппарата (вращательная матрица мультикоптера) может быть задана в угловых поворотах, характеризующих текущее положение в пространстве мультикоптера. В дальнейшем матрицу поворота размерностью  $3 \times 3$  определим, как матрицу преобразования трехмерного вектора положения в евклидовом пространстве, переводящую его координаты из повернутой (связанной) системы отсчета  $Oxyz$  в абсолютную систему координат  $O_1x_1y_1z_1$  ( $Ox_2y_2z_2$ ). На рис. 1 показаны две правые прямоугольные системы координат:  $Oxyz$  с осями  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  и система  $Ox_2y_2z_2$  с осями  $Ox_2$ ,  $Oy_2$ ,  $Oz_2$ .

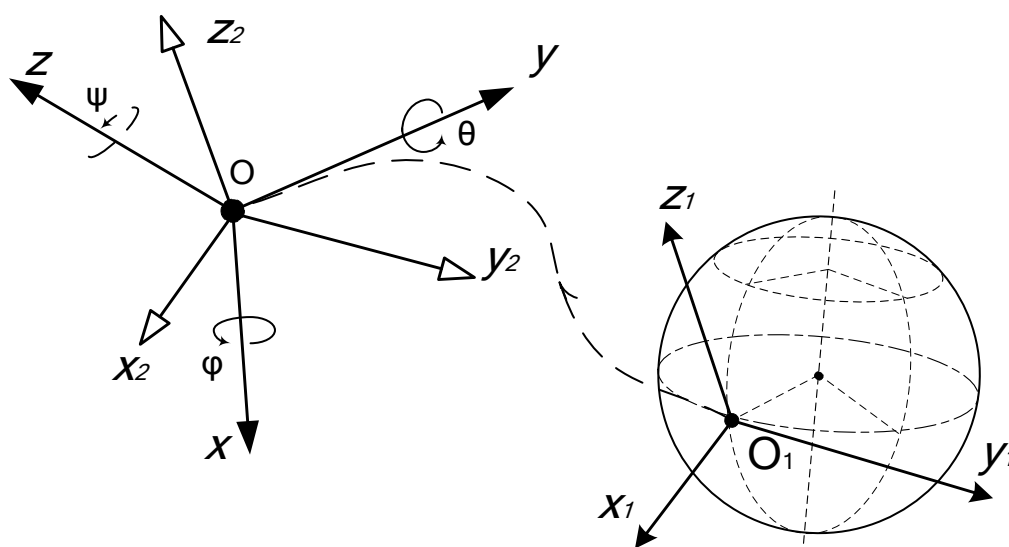


Рис. 1. Схема расположения осей неподвижной (земной)  $O_1x_1y_1z_1$ , локальной кениговой  $Ox_2y_2z_2$  и связанной с телом  $Oxyz$  систем координат

Считаем, что начала этих систем совпадают и расположены в точке  $O$ . Система координат  $O_1x_1y_1z_1$  фиксирована в трехмерном пространстве и принята за абсолютную, а  $Oxyz$  вращается относительно абсолютной системы  $O_1x_1y_1z_1$  ( $Ox_2y_2z_2$ ). Физически система  $Oxyz$  рассматривается как связанная система координат. Это означает, что она соответствующим образом жестко связана с твердым телом (мультикоптером) и движется вместе с ним [3].

Пусть  $(i, j, k)$  и  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  – единичные векторы, направленные вдоль осей систем  $Oxyz$  и  $Ox_2y_2z_2$  соответственно. Некоторую точку  $p$  в пространстве можно охарактеризовать координатами относительно любой из указанных систем. Для простоты предполо-

жим, что точка  $p$  фиксирована и неподвижна в системе отсчета  $Oxyz$ . Тогда в системах координат  $Ox_2y_2z_2$  и  $Oxyz$  она имеет координаты

$$\begin{bmatrix} p_{x_2} \\ p_{y_2} \\ p_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} i_{x_2} \cdot i_x & i_{x_2} \cdot j_y & i_{x_2} \cdot k_z \\ j_{y_2} \cdot i_x & j_{y_2} \cdot j_y & j_{y_2} \cdot k_z \\ k_{z_2} \cdot i_x & k_{z_2} \cdot j_y & k_{z_2} \cdot k_z \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}; \quad (1)$$

$$p_{x_2y_2z_2} = R \cdot p_{xyz} \quad (2)$$

$$R = \begin{pmatrix} i_{x_2} \cdot i_x & i_{x_2} \cdot j_y & i_{x_2} \cdot k_z \\ j_{y_2} \cdot i_x & j_{y_2} \cdot j_y & j_{y_2} \cdot k_z \\ k_{z_2} \cdot i_x & k_{z_2} \cdot j_y & k_{z_2} \cdot k_z \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$$p_{xyz} = Q \cdot p_{x_2y_2z_2} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} i_x \cdot i_{x_2} & i_x \cdot j_{y_2} & i_x \cdot k_{z_2} \\ j_y \cdot i_{x_2} & j_y \cdot j_{y_2} & j_y \cdot k_{z_2} \\ k_z \cdot i_{x_2} & k_z \cdot j_{y_2} & k_z \cdot k_{z_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{x_2} \\ p_{y_2} \\ p_{z_2} \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$$Q = \begin{pmatrix} i_x \cdot i_{x_2} & i_x \cdot j_{y_2} & i_x \cdot k_{z_2} \\ j_y \cdot i_{x_2} & j_y \cdot j_{y_2} & j_y \cdot k_{z_2} \\ k_z \cdot i_{x_2} & k_z \cdot j_{y_2} & k_z \cdot k_{z_2} \end{pmatrix}; \quad (6)$$

$$Q = R^{-1} = R^T, \quad Q \cdot R = R^T R = R^{-1} R = I_3 \quad (7)$$

Матрицей поворота (или матрицей направляющих косинусов) будем называть ортогональную матрицу, которая используется для выполнения собственного ортогонального преобразования в евклидовом пространстве. Так, например, в двумерном пространстве  $Oxy$  поворот можно описать одним углом со следующей матрицей линейного преобразования в декартовой системе:

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \mp \sin \alpha \\ \pm \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (8)$$

Поворот выполняем путем умножения матрицы поворота на вектор-столбец, описывающий вращаемую точку. Координаты  $(x', y')$  в результате поворота точки  $(x, y)$  будут задаваться формулами

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos \alpha \pm y \cdot \sin \alpha \\ y' &= y \cdot \cos \alpha \pm x \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad (9)$$

Конкретные знаки в формулах зависят от того, является ли система координат правосторонней или левосторонней, и выполняется ли вращение по или против часовой стрелки. Верхний знак в (9) указан для обычного соглашения: правосторонняя система координат и положительное направление вращения против часовой стрелки (тот же знак верен для левосторонней координатной системы при выборе положительного направления вращения по часовой стрелке; в оставшихся двух комбинациях – нижний знак).

Как известно, любое вращение в трехмерном пространстве может быть представлено как композиция поворотов вокруг трех ортогональных осей. Этой композиции соответствует матрица, равная произведению соответствующих трех матриц поворота. Матрицами вращения вокруг оси декартовой системы координат на угол  $\alpha$  в трехмерном пространстве являются матрицы, реализующие:

1) вращение вокруг оси  $x$  (здесь приведена матрица поворота от исходной системы координат к результирующей при повороте против часовой стрелки):

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \quad (10)$$

2) вращение вокруг оси  $y$ :

$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}; \quad (11)$$

3) вращение вокруг оси  $z$ :

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Положительным углам при этом соответствует вращение вектора против часовой стрелки в правой системе координат, и по часовой стрелке в левой системе координат, если смотреть против направления соответствующей оси. Правая система координат связана с выбором правого базиса.

При повороте по часовой стрелке в правосторонней системе координат или совершая поворот против часовой стрелки в левостороннем базисе необходимо учесть правило знаков согласно (9), а матрицу обратного поворота можно получить транспонированием матрицы прямого поворота. Таким образом, матрица поворота определит положение основных осей повернутой системы координат относительно абсолютной системы координат. Заметим, что операции умножения матриц не коммутативна поэтому для однозначного определения положения нужно знать не только 3 угла, но и схему умножения матриц. В дальнейшем, матрицы  $R_x$ ,  $R_y$  и  $R_z$  используются для определения вращения мультикоптера в фиксированной системе координат, движущегося в связанной системе координат, а обобщенная матрица вращения будет представлена уравнением:

$$D_b^n = R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\varphi). \quad (13)$$

В дальнейшем будет необходимо конвертировать динамические характеристики и кинематические параметры движения из одной системы отсчета в другую [4,5]. Очевидно, что угловые взаимозависимости для описания положения можно обобщить на описание угловой ориентации одной системы координат по отношению к другой. Например – конвертирование компонент линейной скорости из неподвижной или скоростной системы координат в систему отсчета, связанную с телом [6].

На схеме рис.1  $O_1x_1y_1z_1(Ox_2y_2z_2)$  направление осей неподвижной системы отсчета;  $Oxyz$  – направление осей фиксированной с телом система координат;  $(\varphi, \theta, \psi)$  обобщенные координаты угловой ориентации неподвижных осей по отношению к неподвижным. Положение мультикоптера по отношению к локальным осям системы  $Oxyz$  можно определить последовательным вращением вокруг глобальных (земных) осей  $O_1x_1y_1z_1$ ,

сонаправленных с осями системы  $Ox_2y_2z_2$ . Для этого совершаем первый поворот вокруг оси  $Oz_2$  на угол рыскания  $\psi$  и получаем промежуточное положение системы отсчета – систему координат  $Ox'y'z_2$ . Т.е. при повороте на угол  $\psi$  вокруг оси  $Oz_2$  получаем следующую зависимость для осей текущей и исходной систем. После вращения вокруг оси  $z$  на угол рыскания имеем

$$\begin{aligned} Ox' &= \cos \psi \cdot Ox_2 - \sin \psi \cdot Oy_2 \\ Oy' &= \sin \psi \cdot Ox_2 + \cos \psi \cdot Oy_2 . \\ Oz' &= Oz_2 \end{aligned} \quad (14)$$

Соответственно в матричном виде более удобно записать:

$$\begin{bmatrix} Ox' \\ Oy' \\ Oz' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Ox_2 \\ Oy_2 \\ Oz_2 \end{bmatrix} . \quad (15)$$

Второй поворот совершаем вокруг уже повернутой оси  $Oy'$  на угол тангажа  $\theta$  – получаем промежуточную систему  $Ox''y''z''$  для которой справедливо:

$$\begin{bmatrix} Ox'' \\ Oy'' \\ Oz'' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Ox' \\ Oy' \\ Oz' \end{bmatrix} . \quad (16)$$

Аналогично, последний, третий, поворот выполняем вокруг вспомогательной оси  $Ox''$  ( $Ox'' = Ox$ ) на угол крена  $\varphi$ . Окончательно получая систему координат  $Oxyz$ , связанную с корпусом мультикоптера:

$$\begin{bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Ox'' \\ Oy'' \\ Oz'' \end{bmatrix} . \quad (17)$$

Подставляя в эту формулу выражения для поворота на угол тангажа и рыскания, получим матричную зависимость для перехода от неподвижных осей к подвижным: связанную с корпусом мультикоптера:

$$\begin{bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Ox_2 \\ Oy_2 \\ Oz_2 \end{bmatrix} . \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{bmatrix} = D_n^b \begin{bmatrix} Ox_2 \\ Oy_2 \\ Oz_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$D_n^b = R_x(\varphi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_z(\psi) \quad (20)$$

$$[D_n^b] = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi; & -\cos \theta \sin \psi & \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi; & \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \theta \sin \psi; & -\cos \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \theta; & \cos \varphi \sin \theta \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi; & \cos \varphi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (21)$$

Оси  $(Ox, Oy, Oz)$  системы  $Oxyz$  представляющие компоненты линейных величин, заданных в  $O_1x_1y_1z_1$ , сонаправленных  $Ox_2y_2z_2$ . И  $(O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1)$  представляют такие

же компоненты линейных величин, конвертируемых в осях связанной системы  $Oxyz$ . Величины, представляющие в дальнейшем интерес: ускорение, скорость, перемещения и т.д., также пересчитываются после вращения в соответствии с вышеописанной схемой (см. рис. 2).

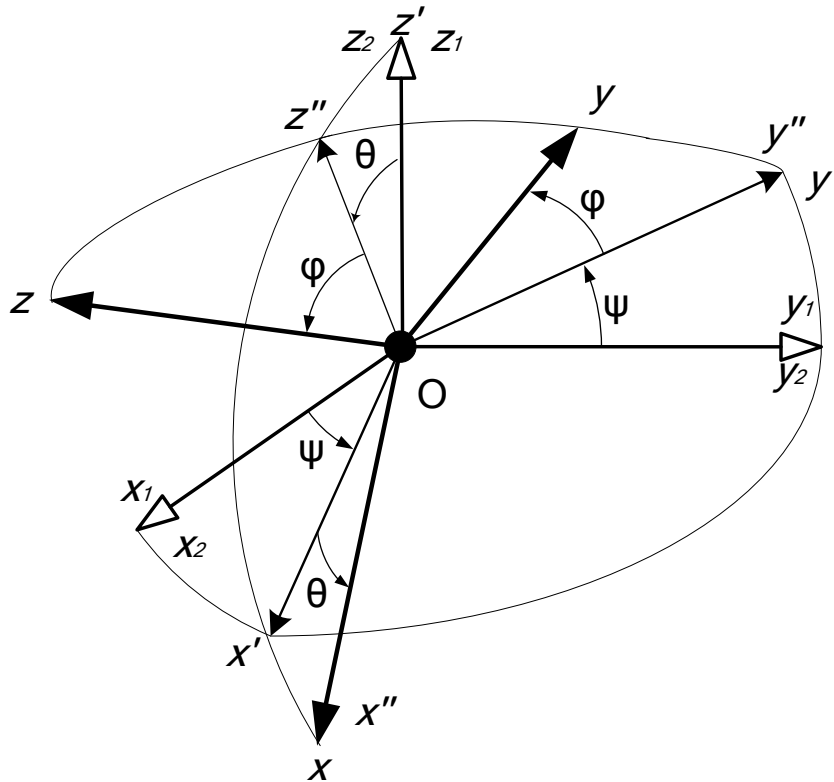


Рис. 2. Взаимное расположение кениговой  $Ox_2y_2z_2$  и связанной с телом  $Oxyz$  систем координат

Положение мультикоптера по отношению к осям неподвижной системы отсчета можно определить последовательным вращением вокруг подвижных осей [7]. Поэтому первый поворот вокруг оси  $Ox$  на угол крена  $\varphi$  – получаем  $Oxz'y'$ . Второй поворот осуществляем вокруг оси  $Oy'$  на угол тангажа  $\theta$  – получаем  $Ox''y''z''$ . После третьего вращения вокруг оси  $z''$  на угол рыскания  $\psi$  – получаем направление системы  $Ox_2y_2z_2$ , сонаправленной с неподвижной (земной) системой координат  $O_1x_1y_1z_1$

Таким образом, направление осей кениговой  $Ox_2y_2z_2$  (параллельной инерционной системе координат  $O_1x_1y_1z_1$ ) определяем обратным поворотом от неизменно связанной с мультикоптером системы  $Oxyz$ . В соответствии со схемой (рис. 3) направление этих осей соответствуют следующей последовательности поворотов. Обратный поворот на угол  $\psi$  вокруг оси  $Oz''$

$$\begin{aligned} Ox_2 &= \cos \psi \cdot Ox'' + \sin \psi \cdot Oy'' \\ Oy_2 &= -\sin \psi \cdot Ox'' + \cos \psi \cdot Oy'' \\ Oz_2 &= Oz'' \end{aligned} \quad (22)$$

т.е. соответственно в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} Ox_2 \\ Oy_2 \\ Oz_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Ox'' \\ Oy'' \\ Oz'' \end{bmatrix}. \quad (23)$$

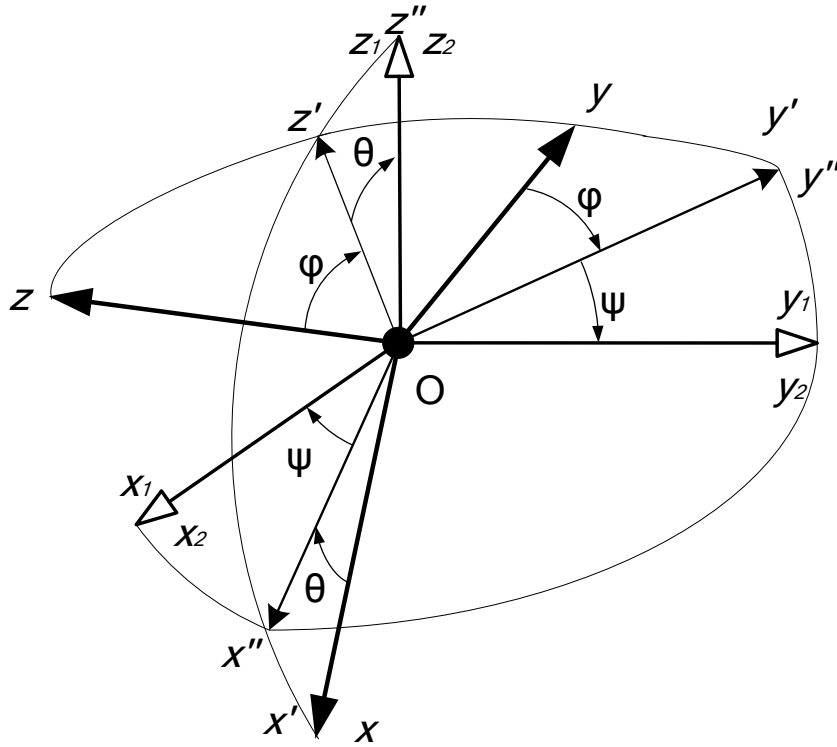


Рис. 3. Взаимное расположение неизменно связанной с мультикоптером системы отсчета  $Oxyz$  и кениговой системы координат  $Ox_2y_2z_2$

В свою очередь вспомогательные оси  $Ox''$ ,  $Oy''$ ,  $Oz''$  определяются поворотом на угол  $\theta$  вокруг оси  $Oy'$ , т.е.:

$$\begin{bmatrix} Ox'' \\ Oy'' \\ Oz'' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Ox' \\ Oy' \\ Oz' \end{bmatrix}. \quad (24)$$

И, наконец, промежуточные оси  $Ox'$ ,  $Oy'$ ,  $Oz'$  определяются поворотом в обратном направлении на угол крена  $\varphi$  вокруг оси  $Ox$ :

$$\begin{bmatrix} Ox' \\ Oy' \\ Oz' \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Подставляя полученные выражения в матричную формулу для определения направления осей  $Ox_2y_2z_2$  ( $O_1x_1y_1z_1$ ) определяем направление осей кениговой системы  $Ox_2y_2z_2$  (параллельной инерционной системе координат  $O_1x_1y_1z_1$ ) относительно неизменно связанной с мультикоптером системы  $Oxyz$ :

$$\begin{bmatrix} Ox_2 \\ Oy_2 \\ Oz_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{bmatrix}. \quad (26)$$

т.е. переход от системы координат  $Oxyz$  к неподвижной  $O_1x_1y_1z_1$  ( $Ox_2y_2z_2$ ) системе отсчета определяется следующей матрицей перехода

$$\begin{bmatrix} Ox_2 \\ Oy_2 \\ Oz_2 \end{bmatrix} = [D_b^n] \begin{bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{bmatrix}. \quad (27)$$

$$[D_b^n] = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$[D_b^n] = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi; & \sin \varphi \sin \theta \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi; & \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \theta; \\ -\cos \theta \sin \psi; & \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \theta \sin \psi; & \cos \varphi \sin \theta \cdot \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi; \\ \sin \theta & -\cos \theta \cdot \sin \varphi & \cos \varphi \cdot \cos \theta \end{pmatrix} \quad (29)$$

Матрица обратного поворота получается по аналогии матрицы прямого поворота вращением на углы рыскания, тангажа и крена по часовой стрелке, что соответствуют следующей последовательности:

$$D_b^n = R_z(\psi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\varphi). \quad (30)$$

где

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, R_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица обратного поворота может быть получена обычным транспонированием матрицы прямого поворота [7]:

$$[D_b^n] = [D_n^b]^{-1} = [D_n^b]^T. \quad (31)$$

Тогда для нашего случая также будут справедливы соотношения

$$\begin{bmatrix} Ox_2 \\ Oy_2 \\ Oz_2 \end{bmatrix} = [D_b^n] \begin{bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{bmatrix} = [D_n^b]^{-1} \begin{bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{bmatrix} = [D_n^b]^T \begin{bmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Таким образом, с помощью поворотов  $R_x(\varphi)$ ,  $R_y(\theta)$ ,  $R_z(\psi)$  можно задать основные движения мультикоптера по отношению к земле в любой момент времени, что поможет в дальнейшем следить за правильностью работы измерительных бортовых систем миниатюрного летательного аппарата.

Движение мультикоптера, описанное в [1] в компонентах силы, моментов, линейных и угловых скоростей, а также текущего положения аппарата в пространстве в дальнейшем будем решать относительно неизменно связанной с телом системы координат  $Oxuz$ . Так как в последствии будет необходимо конвертировать динамические характеристики движения и кинематические параметры из одной системы отсчета в другую, то очевидно, что угловые взаимозависимости для описания положения можно обобщить на описание угловой ориентации одной системы координат по отношению к другой. Разработанная обобщенная матрица вращения для динамических моделей движения мультикоптера позволяет автоматизировать процесс расчета, например, в случае конвертирования компонент линейной скорости из неподвижной или скоростной системы координат в систему отсчета, связанную с телом.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

1. Ширвель, П.И. Механико-математическое моделирование динамики полета мультикоптерного летательного аппарата = *Mechanics and Mathematical modeling of multicopter dynamics flight* / П. И. Ширвель, А. В. Чигарев, И. И. Конон // *Теоретическая и прикладная механика : международный научно-технический сборник*. - Вып. 32. – 2017. – С. 105 – 116.
2. Горбатенко С.А. и др. *Расчет и анализ движения летательных аппаратов*. – М.: Машиностроение, 1971.
3. Горбатенко С.А. и др. *Механика полета. Общие сведения. Уравнения движения*. – М.: Машиностроение, 1969.
4. Дмитриевский А. А. *Внешняя баллистика*. – М.: Машиностроение, 1972.
5. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. *Динамика полета беспилотных летательных аппаратов*. – М.: Машиностроение, 1973.
6. Микеладзе В. Г., Титов В. М. *Основные геометрические и аэродинамические характеристики самолетов и ракет*. – М.: Машиностроение, 1978.
7. Лурье А. И. *Аналитическая механика* — М.:Физматлит — 1961 г. — 824 с.