Министерство образования
Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Высшая математика № 1»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ МАШИНОСТРОИТЕЛЬНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Минск 2006

УДК 519.2(075.4)
ББК 22.17я7
М 54

Составители:
Н.А. Микулик, А.В. Метельский, Н.И. Чепелев,
Т.И. Чепелева, О.Р. Габасова, З.Н. Примичева

Рецензенты:
В.В. Карпук, В.И. Каскевич

Настоящие методические указания и контрольные задания предназначены для студентов второго курса машиностроительных специальностей БНТУ, занимающихся по заочной форме обучения.

Работа содержит основные понятия из программы по теории вероятностей и математической статистике, типовые примеры и контрольные задания (20 вариантов).

Студент должен изучить теоретический материал, разобрать приведенные решения типовых примеров, а затем выполнить контрольные задания. Вариант задания совпадает с двумя последними цифрами шифра зачетной книжки. Если номер шифра больше двадцати, следует от него отнимать двадцать до тех пор, пока не получится число, меньшее или равное двадцати. Это и будет номер варианта. Например, шифр содержит две последние цифры 76, номер варианта будет 76 – 20 – 20 – 20 = 16. Шестнадцатый вариант задания содержит задачи с номерами: 16, 36, 56, 76, 96, 116, 136. Если шифр варианта 00, то студент выполняет 20-й вариант.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

1. Пространство элементарных событий. Алгебра событий.

2. Классическое, геометрическое и статистическое определения вероятности.

3. Свойства вероятности.

4. Теорема сложения вероятностей.

5. Теорема умножения вероятностей.

6. Формула полной вероятности.

7. Формулы Байеса.

8. Схема повторных независимых испытаний. Формула Бернулли.

9. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.

10. Формула Пуассона.

11. Случайные величины (СВ). Закон распределения СВ. Непрерывные и дискретные СВ.

12. Математическое ожидание и его свойства.

13. Дисперсия и ее свойства.

14. Функция распределения и ее свойства.

15. Плотность распределения вероятностей и ее свойства.

16. Биномиальный закон распределения. Математическое ожидание и дисперсия СВ, распределенной по биномиальному закону.

17. Распределение Пуассона. Математическое ожидание и дисперсия.

18. Равномерный закон распределения. Математическое ожидание и дисперсия.

19. Показательный закон распределения. Математическое ожидание и дисперсия.

20. Нормальный закон распределения. Функция и плотность распределения. Математическое ожидание и дисперсия.

21. Вероятность попадания нормально распределенной СВ в интервал. Вероятность отклонения СВ от математического ожидания по модулю. Правило трех сигм.

22. Двумерные СВ. Закон распределения. Условный закон распределения.

23. Числовые характеристики двумерных СВ. Условное математическое ожидание и условная дисперсия.

24. Корреляционный момент и его свойства.

25. Коэффициент корреляции и его свойства.

26. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева.

27. Теорема Чебышева.

28. Теорема Бернулли.

29. Центральная предельная теорема Ляпунова.

30. Генеральная и выборочная совокупности. Вариационный ряд.

31. Полигон и гистограмма.

32. Эмпирическая функция распределения и ее свойства.

33. Понятия выборки и выборочной функции (статистики). Выборочная средняя и выборочная дисперсия.

34. Оценки параметров распределения. Точечные оценки и требования, предъявляемые к ним.

35. Точечные оценки для математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности.

36. Интервальные оценки. Доверительный интервал.

37. Построение доверительного интервала для математического ожидания нормально распределенной СВ при известном среднем квадратическом отклонении.

38. Распределение Стьюдента.

39. Построение доверительного интервала для математического ожидания нормально распределенной СВ при неизвестном среднем квадратическом отклонении.

40. Распределение Пирсона.

41. Построение доверительного интервала для среднего квадратического отклонения нормально распределенной СВ.

42. Понятие о статистических гипотезах и критериях согласия.

43. Критерий согласия Пирсона (χ^2).

44. Критерий согласия Колмогорова.

45. Выборочный коэффициент корреляции и его свойства.

46. Уравнение регрессии. Линейная регрессия. Определение коэффициентов линейной регрессии методом наименьших квадратов.

47. Нелинейная регрессия. Определение параметров нелинейной регрессии.

Литература

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1997.

2. Микулик, Н.А., Метельский, А.В. Теория вероятностей и математическая статистика. – Мн.: Пион, 2002.

3. Фигурин, В.В., Оболонкин, В.В. Теория вероятностей и математическая статистика. – Мн.: Новое знание, 2000.

4. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1997.

5. Гусак, А.А., Бричикова, Е.А. Теория вероятностей: справочное пособие к решению задач. – Мн.: ТетраСистемс, 1999.

6. Микулик, Н.А., Рейзина, Г.Н. Решение технических задач по теории вероятностей и математической статистике. – Мн.: Вышэйшая школа, 1966.

7. Гайшун, Л.Н., Игнатьева, Г.К., Велько, О.А. Теория вероятностей. – Мн.: МПУ, 2002.

8. Высшая математика для инженеров. В 2 т. Т. 2 / Под ред. Н.А. Микулика. – Мн.: Элайда, 2004.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

1. Элементы комбинаторики. Пространство элементарных событий. Определения вероятности

1.1. Элементы комбинаторики

Пусть дано множество, состоящее из n различных элементов: $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. *Перестановкой* на множестве из n элементов называется всякое упорядоченное множество, состоящее из этих n элементов. Число перестановок на множестве из n элементов P_n определяется по формуле $P_n = n!$.

Две различные перестановки состоят из одних и тех же элементов, но отличаются порядком следования элементов.

Пример 1.1. Имеются четыре вакантные должности и четыре претендента на эти должности. Сколькими способами можно заполнить эти должности?

Решение. $P_4 = 4! = 24$.

Размещением на множестве из n элементов по m элементов называется любое упорядоченное подмножество, содержащее m элементов. Два размещения считаются различными, если они состоят из различных элементов или состоят из одних и тех же элементов, но отличаются порядком следования элементов в наборе. Число размещений на множестве из n элементов по m элементов определяется формулой $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Пример 1.2. Сколькими способами можно рассадить группу из 20 студентов по 3 студента за стол?

Решение. $A_{20}^3 = \dfrac{20!}{(20-3)!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.

Сочетанием на множестве из n элементов по m элементов называется всякое неупорядоченное подмножество, содержащее m элементов. Два различных сочетания отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний на множестве из n элементов по m элементов определяется формулой $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Пример 1.3. В ящике 5 деталей. Сколькими способами из ящика можно взять 3 детали?

Решение. $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!2!} = \dfrac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10$.

1.2. Классическое определение вероятности

Элементарным событием или исходом называется всякая возможная реализация эксперимента. Множество $\Omega = \{\varpi_i\}$ всех элементарных событий называется пространством элементарных событий. Любое подмножество пространства элементарных исходов называется *случайным событием*. Исход ϖ_i благоприятствует событию A, если появление исхода ϖ_i влечет появление события A. Вероятность события характеризует степень объективной возможности наступления этого события. *Вероятностью P(A) события A* называется отношение числа исходов, благоприятствующих появлению события A, к общему числу равновозможных исходов:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где n – общее число исходов; m – число исходов, благоприятствующих появлению события A.

Пример 1.4. В группе 8 юношей и 5 девушек. Из группы случайным образом отбирается 5 студентов. Найти вероятность того, что среди них окажутся 4 девушки.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что из 5 случайно отобранных студентов окажутся 4 девушки. Общее число исходов будет равно количеству способов, сколькими из 13 студентов можно отобрать по 5 студентов: $n=C_{13}^{5}$. Благоприятствовать событию A будут те исходы, в которых будут 4 девушки и 1 юноша: $m=C_5^4\cdot C_8^1$. Тогда $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{C_5^4\cdot C_8^1}{C_{13}^5}=\dfrac{40}{1287}=0{,}031$.

1.3. Геометрическое определение вероятности

Пусть указана область Ω, из которой наудачу выбирается точка. Вероятность того, что выбранная точка одновременно попадет в область A ($A\subset\Omega$), пропорциональна мере области A (длине, площади, объему):

$$P(A)=\frac{\text{мера } A}{\text{мера } \Omega}.$$

Понятие *геометрической вероятности* обобщает классическое определение вероятности на случай опытов с бесконечным числом исходов.

Пример 1.5. Случайно поставленная точка принадлежит квадрату со стороной 4. Найти вероятность того, что она попадет в круг, вписанный в этот квадрат.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что случайно поставленная точка попадет в круг, вписанный в квадрат. Тогда $P(A)=\dfrac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{квадрата}}}=\dfrac{\pi\cdot 2^2}{4^2}=\dfrac{\pi}{4}=0{,}785$.

1.4. Статистическое определение вероятности

Пусть некоторый эксперимент повторяют n раз, в результате этого событие A наступило m раз. *Относительной частотой* $\varpi(A)$ события A называется отношение количества испытаний, в которых наступило событие A, к общему числу проведенных испытаний:

$$\varpi(A) = \frac{m}{n}.$$

Если число испытаний неограниченно увеличивать, то относительная частота события «стремится» к вероятности наступления события A. Поэтому при *статистическом определении* вероятности полагают $P(A) = \varpi(A)$.

2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

2.1. Теорема сложения вероятностей

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Если события несовместные, то вероятность суммы событий равна сумме вероятностей:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n).$$

Сумма вероятностей двух противоположных событий равна 1:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

2.2. Теорема умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного события на условную вероятность второго события при условии, что произошло первое событие:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Если события $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ являются независимыми, то вероятность произведения событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Пример 2.1. Найти вероятность того, что случайно взятое двузначное число будет кратным 2 или 5.

Решение. Пусть событие A – случайно взятое число, кратное 2 или 5; B – число, кратное только двум; C – число, кратное 5. Тогда $A = B + C$, где B и C – совместные события. Найдем вероятности этих событий:

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2} = 0{,}5; \ P(C) = \frac{18}{90} = 0{,}2; \ P(BC) = \frac{9}{90} = 0{,}1.$$

$$P(A) = P(B + C) = P(B) + P(C) - P(BC) \Rightarrow$$

$$P(A) = 0{,}5 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}6.$$

Пример 2.2. Для подготовки к экзамену студентам дано 50 вопросов. Студент, идя на экзамен, выучил 40 вопросов. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для сдачи необходимо ответить на 2 вопроса из двух, предложенных экзаменатором.

Решение. Пусть событие A – студент сдал экзамен; B – студент ответил на 1-й вопрос; C – студент ответил на 2-й вопрос. Тогда $A = B \cdot C$, события B и C – зависимые: $P(BC) = P(B)P(C / B)$. Найдем вероятности $P(B)$ и $P(C / B)$, используя классическое определение вероятности:

$$P(B)=\frac{40}{50}=0{,}8;$$

$$P(C/B)=\frac{39}{49}=0{,}796 \Rightarrow P(A)=P(BC)=0{,}8\cdot 0{,}796=0{,}637.$$

3. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

3.1. Формула полной вероятности

События $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ образуют *полную группу событий*, если они попарно несовместны и их сумма равна достоверному событию:

1) $H_i H_j = \varnothing$, если $i \neq j$;

2) $\sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

Пусть событие A может наступить совместно с одним из событий $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$, образующих полную группу, тогда вероятность события A определяется по формуле

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

Эта формула называется *формулой полной вероятности, а* события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *– гипотезами.*

Пример 3.1. По линии связи передаются два сигнала A и В соответственно с вероятностями 0,4 и 0,6. Из-за помех 1/6 сигналов A искажается и принимается как B, а 1/5 сигналов B искажается и принимается как A. Найти вероятность того, что будет принят сигнал А.

Решение. Рассмотрим события: A – принят сигнал A; H_1 – передавался сигнал A; H_2 – передавался сигнал В. События H_1 и H_2 образуют полную группу событий, поэтому

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2).$$

$$P(H_1) = 0{,}4; \quad P(A/H_1) = \frac{5}{6};$$

$$P(H_2) = 0{,}6; \quad P(A/H_2) = \frac{1}{5}.$$

$$P(A) = 0{,}4 \cdot \frac{5}{6} + 0{,}6 \cdot \frac{1}{5} = 0{,}333 + 0{,}120 = 0{,}453.$$

3.2. Формулы Байеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из событий $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие A произошло, то вероятности гипотез определяются по формулам Байеса:

$$P(H_j / A) = \frac{P(H_j)P(A/H_j)}{P(A)}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Пример 3.2. Число грузовых автомобилей, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе, как 2:3. Вероятность того, что будет заправляться грузовая автомашина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,3. К бензоколонке подъехала для заправки автомашина. Найти вероятность того, что это грузовая автомашина.

Решение. Пусть событие A – к бензоколонке подъехала для заправки автомашина; H_1 – подъехала грузовая автомашина; H_2 – подъехала легковая автомашина. Тогда

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)}.$$

$$P(H_1) = \frac{2}{5}; \quad P(A/H_1) = 0{,}1; \quad P(H_2) = \frac{3}{5}; \quad P(A/H_2) = 0{,}3;$$

$$P(H_1/A)=\frac{\frac{2}{5}\cdot 0{,}1}{\frac{2}{5}\cdot 0{,}1+\frac{3}{5}\cdot 0{,}3}=\frac{0{,}04}{0{,}04+0{,}18}=\frac{0{,}04}{0{,}22}=0{,}182.$$

4. Схема повторных независимых испытаний (схема Бернулли)

4.1. Формула Бернулли

Если производится n независимых испытаний, в результате которых могут быть только два исхода, A или $\overline{A}$, с неизменными вероятностями $P(A)=p$, $P(\overline{A})=q$, то такая схема испытаний называется *схемой Бернулли.*

Если в каждом из n независимых испытаний вероятность появления события A постоянна (равна p) и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что в n испытаниях событие A произойдет ровно m раз, определяется по *формуле Бернулли*:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q=1-p.$$

Пример 4.1. Прибор состоит из четырех узлов. Вероятность безотказной работы в течение смены для каждого узла равна 0,8. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что в течение смены откажут ровно два узла.

Решение. Из условия задачи $n=4$, $m=2$, $p=0{,}2$, $q=0{,}8$. Используя формулу Бернулли, получим

$$P_4(2)=C_4^2 p^2 q^2=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^2=0{,}154.$$

4.2. Локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа

Локальная теорема Муавра – Лапласа. Если вероятность появления события A в каждом из независимых испытаний постоянна (равна p) и отлична от 0 и 1, а число испытаний n достаточно велико, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие наступит ровно m раз, приближенно определяется по формуле

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1 - p.$$

Функция $\varphi(x)$ является четной функцией: $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Для функции $\varphi(x)$ построены таблицы значений, с помощью которых находятся $\varphi(x)$ по вычисленным значениям x.

Пример 4.2. Вероятность того, что автомат выпускает стандартную деталь, равна 0,9. Какова вероятность того, что из 400 выпущенных автоматом деталей 356 окажутся стандартными?

Решение. Из условия задачи $p = 0{,}9$; $n = 400$; $m = 356$; $q = 1 - p = 0{,}1$. Так как n велико и $npq = 400 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 36 > 10$, то можно применить локальную теорему Муавра – Лапласа.

$$x = \frac{356 - 400 \cdot 0{,}9}{\sqrt{400 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = -0{,}67;$$

$$\varphi(-0{,}67) = \varphi(0{,}67) = 0{,}3188;$$

$$P_{400}(356) = \frac{1}{6} \cdot 0{,}3188 = 0{,}053.$$

Интегральная теорема Муавра – Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом из независимых испытаний постоянна и отлична от 0 и 1, а число испытаний велико, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится от m_1 до m_2 раз, определяется по формуле

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt$ – функция Лапласа;

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}; \quad q = 1 - p.$$

Функция Лапласа является нечетной функцией:

$$\Phi(-x) = -\Phi(x); \quad \Phi(x > 5) \approx 1/2.$$

Значения функции Лапласа берут из таблицы по найденным значениям x.

Пример 4.3. Вероятность реализации одной акции некоторой компании равна 0,8. Брокерская фирма предлагает 100 акций этой компании. Какова вероятность того, что будет продано не менее 70 и не более 85 акций?

Решение. По условию задачи $n = 100$, $m_1 = 70$, $m_2 = 85$, $p = 0{,}8$. Находим

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 80}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -2{,}5;$$

$$x_2 = \frac{85 - 80}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 1{,}25.$$

Поэтому

$$P_{100}(70; 85) = \Phi(1{,}25) - \Phi(-2{,}5) = 0{,}3944 + 0{,}4938 = 0{,}8882.$$

4.3. Формула Пуассона

Если в схеме Бернулли n велико, а вероятность появления события p мала, то вероятность того, что в n испытаниях событие наступит ровно m раз, определяется по формуле

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}, \quad \lambda = np .$$

Формулу Пуассона обычно применяют, если $p < 0{,}01$; $n > 100$ и $np \leq 10$.

Пример 4.4. При массовом производстве шестерен вероятность брака равна 0,002. Найти вероятность того, что из 500 выпущенных шестерен будет ровно 2 бракованных.

Решение. По условию задачи $n = 500$ и $m = 2$, р = 0,002, $\lambda = np =$ $= 500 \cdot 0{,}002 = 1 < 10$. Для нахождения вероятности воспользуемся формулой Пуассона:

$$P_{500}(2) \approx \frac{1^2 e^{-1}}{2!} = \frac{1}{2e} = 0{,}184 .$$

5. Случайные величины

5.1. Понятие случайной величины

Случайной величиной (СВ) называется числовая функция $X = X(\varpi)$, заданная на пространстве элементарных исходов Ω и такая, что для любого действительного числа x определена вероятность $P(X < x)$. Случайная величина – это величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно. Различают два вида СВ: дискретные и непрерывные. *Дискретная СВ* – это величина, которая принимает счетное или конечное число значений. *Непрерывной СВ* на интервале (a; b) называют СВ, которая может принять любое значение из (a; b). Чтобы задать СВ, нужно задать закон распределения. *Закон распределения дискретной СВ* – это соответствие между возможными значениями СВ и вероятностями их появления. Закон распределения дискретной СВ записывается в виде таблицы

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

5.2. Функция распределения случайных величин и ее свойства

Функцией распределения СВ (интегральной функцией распределения) называется функция $F(x), x \in R$, равная вероятности того, что СВ X принимает значение меньшее x, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Свойства функции распределения:

1. $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.
4. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.
5. Функция распределения непрерывна слева: $F(x-0) = F(x)$.
6. Если СВ принимает значение x_i с вероятностью p_i, то $F(x+0) - F(x_i) = p_i$.
7. Если СВ X является непрерывной, то $F(X = x) = 0$.

5.3. Плотность распределения вероятностей случайных величин

Плотностью распределения СВ (дифференциальной функцией распределения) называется такая функция $p(x)$, что $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)\,dx$.

Свойства плотности распределения:

1. $p(x) \ge 0$.
2. $F'(x) = p(x)$.

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1$.

4. $P(a \le \xi \le b) = \int\limits_{a}^{b} p(x)\,dx$.

Чтобы задать закон распределения непрерывной СВ, необходимо задать или плотность распределения, или функцию распределения.

Пример 5.1. Партия изделий содержит 10 % нестандартных. Пусть СВ X – число стандартных изделий в партии из 5 изделий. Требуется составить закон распределения СВ и записать функцию распределения.

Решение. СВ X может принимать значения $x_k = 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5$. Вероятность $P(X = x_k)$ найдем по формуле Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. По условию задачи $n = 5;\ p = 0{,}9;\ q = 0{,}1$.

$$p_0 = P(X = 0) = C_5^0 p^0 q^5 = 0{,}00001,$$

$$p_1 = P(X = 1) = C_5^1 p q^4 = 0{,}00045,$$

$$p_2 = P(X = 2) = C_5^2 p^2 q^3 = 0{,}0081,$$

$$p_3 = P(X = 3) = C_5^3 p^3 q^2 = 0{,}0729,$$

$$p_4 = P(X = 4) = C_5^4 p^4 q = 0{,}32805,$$

$$p_5 = P(X = 5) = C_5^5 p^5 q^0 = 0{,}59049.$$

Запищем закон распределения СВ.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,00001	0,00045	0,0081	0,0729	0,32805	0,59049

Найдем функцию распределения. По определению

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{i: x_i < x} p_i \,.$$

При $x \le 0$ $F(x) = 0$;

при $0 < x \le 1$ $F(x) = p_0 = 0{,}00001$;

при $1 < x \le 2$ $F(x) = p_0 + p_1 = 0{,}00046$;

при $2 < x \le 3$ $F(x) = p_0 + p_1 + p_2 = 0{,}00856$;

при $3 < x \le 4$ $F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}081146$;

при $4 < x \le 5$ $F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}40951$;

при $x > 5$ $F(x) = 1$. Окончательно

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \le 0, \\ 0{,}00001, & \text{если} \quad 0 < x \le 1, \\ 0{,}00046, & \text{если} \quad 1 < x \le 2, \\ 0{,}00856, & \text{если} \quad 2 < x \le 3, \\ 0{,}08146, & \text{если} \quad 3 < x \le 4, \\ 0{,}40951, & \text{если} \quad 4 < x \le 5, \\ 1, & \text{если} \quad x > 5. \end{cases}$$

Пример 5.2. Непрерывная СВ задана плотностью **распределения**

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ cx^2 & \text{при} \quad 0 < x \le 2, \\ 0 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Требуется найти значение параметра c и записать функцию распределения.

Решение. Значение параметра c определим, используя свойство плотности распределения: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} cx^2\,dx + \int_{2}^{\infty} 0\,dx = \frac{cx^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{8}{3}c = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{8}.$$

Функцию распределения определим из условия $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x)\,dx$.

Для $x \le 0$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dx = 1$;

для $0 < x \le 2$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{x} \frac{3}{8}x^2\,dx = \frac{x^3}{8}$;

для $x > 2$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{2} \frac{3}{8}x^2\,dx + \int\limits_{2}^{x} 0\,dx = \frac{x^3}{8}\bigg|_0^2 = 1$.

Значит, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^3}{3}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

Пример 5.3. Дана функция распределения СВ

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-3x}, & x > 0. \end{cases}$$

Нужно определить плотность распределения.

Решение. Плотность распределения определим из **свойства плотности** распределения: $p(x) = F'(x)$.

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 3e^{-3x}, & x > 0. \end{cases}$$

6. Числовые характеристики случайных величин

К числовым характеристикам СВ относятся: математическое ожидание $M(X)$, дисперсия $D(X)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$, начальные и центральные моменты и др.

6.1. Математическое ожидание и его свойства

Дискретная СВ принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$. *Математическим ожиданием* СВ называется число $M(X)$, которое определяется соотношением

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Если непрерывная СВ задана плотностью распределения $p(x)$, то математическое ожидание определяется интегралом:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx .$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение СВ.
Свойства математического ожидания:

1. $M(c) = c$, где $c = \text{const}$.
2. $M(kX) = kM(X)$, где $k = \text{const}$.
3. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.
4. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, если *СВ X* и *Y* независимы.

6.2. Дисперсия и ее свойства

Начальным моментом k-го порядка называется математическое ожидание СВ X^k.

$$\nu_k = M(X^k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$$ для дискретных случайных величин,

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x)\, dx$$ для непрерывных случайных величин.

Центральным моментом k-го порядка называется математическое ожидание СВ $(X - M(X))^k$

$$\mu_k = M((X - M(X))^k) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^k p_i$$ для дискретных случайных величин,

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k p(x)\, dx$$ для непрерывных случайных величин.

Дисперсией называется центральный момент второго порядка

$$D(X) = \mu_2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^2 p_i .$$

Дисперсия характеризует степень разброса значений СВ относительно математического ожидания. Дисперсия СВ равна разности математического ожидания квадрата СВ и квадрата математического ожидания:

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left(M(X)\right)^2 .$$

Свойства дисперсии:

1. $D(X) \geq 0$.
2. $D(k X) = k^2 D(X)$, где $k = \text{const}$.
3. $D(C) = 0$, где $C = \text{const}$.
4. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, X, Y – независимые СВ.

Средним квадратическим отклонением СВ называется корень квадратный из дисперсии СВ:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\ .$$

Пример 6.1. Дискретная СВ задана законом распределения. Требуется найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

Решение.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}2 = 1{,}7\ ,$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = 0^2 \cdot 0{,}1 + 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}4 + 3^2 \cdot 0{,}2 = 3{,}7$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 3{,}7 - (1{,}7)^2 = 0{,}81\,,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9\ .$$

Пример 6.2. Непрерывная СВ задана плотностью распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \quad x > 1, \\ 3x^2, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Требуется вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx = \int_0^1 3x^3\,dx = \left.\frac{3x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{3}{4}\,,$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx = \int_0^1 3x^4\,dx = \left.\frac{3x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{3}{5}\,,$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80},$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{3}{80}} = 0{,}194.$$

7. Законы распределения случайных величин

7.1. Законы распределения дискретных случайных величин

СВ X, которая принимает значения 0, 1, 2,…, n с вероятностями $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, называется распределенной *по биномиальному закону*. Биномиальный закон распределения может быть представлен в виде таблицы:

x_i	0	1	2	…	n
p_i	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	p^n

Для биномиального закона $M(X) = np$; $D(X) = npq$.

Дискретная СВ X называется распределенной *по закону Пуассона*, если она принимает целые неотрицательные значения 0, 1, 2,… с вероятностями, которые определяются по формуле Пуассона:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np.$$

Для закона Пуассона $M(X) = D(X) = \lambda$.

Пример 7.1. Производятся 3 независимых испытания, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,4. СВ X – число появлений события A. Требуется составить закон распределения и вычислить числовые характеристики.

Решение. СВ X принимает значения 0, 1, 2, 3, 4 и распределена по биномиальному закону. Определим вероятности:

$$P(X = 0) = q^4 = 0{,}6^4 = 0{,}1296,$$

$$P(X=1)=C_4^1 p q^4 = 4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6^3 = 0{,}3456,$$
$$P(X=2)=C_4^2 p^2 q^2 = 6\cdot 0{,}16\cdot 0{,}36 = 0{,}3456,$$
$$P(X=3)=C_4^3 p^3 q = 4\cdot 0{,}064\cdot 0{,}6 = 0{,}1536,$$
$$P(X=4)=p^4 = 0{,}4^4 = 0{,}0256.$$

Закон распределения имеет вид

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

$$M(X)=np=4\cdot 0{,}4=1{,}6,$$
$$D(X)=npq=4\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=0{,}96,$$
$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}96}=0{,}98.$$

Пример 7.2. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Вероятность того, что в течение часа абонент позвонит на станцию, равна 0,01 и постоянна для всех абонентов. Найти вероятность того, что на станцию в течение часа позвонят не более двух абонентов.

Решение. По условию задачи $n = 400$; $p = 0{,}01$; $m \le 2$; $\lambda = 4$.

$$P_{400}(m \le 2) = P_{400}(0) + P_{400}(1) + P_{400}(2) =$$
$$= \frac{4^0}{0!}e^{-4} + \frac{4^1}{1!}e^{-4} + \frac{4^2}{2!}e^{-4} =$$
$$= e^{-4}(1+4+8) = \frac{13}{e^4} = \frac{13}{54{,}576} = 0{,}238.$$

7.2. Законы распределения непрерывных случайных величин

СВ X называется *равномерно распределенной* на отрезке $[a;\ b]$, если плотность распределения СВ на этом отрезке постоянна и равна $\dfrac{1}{b-a}$, а вне отрезка – равна 0:

$$p(x)=\begin{cases}0, & x<a;\quad x>b;\\ 1/(b-a), & x\in[a;b]\end{cases}$$

Для СВ, распределенной по равномерному закону, справедливы следующие соотношения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b,\end{cases}$$

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Непрерывная СВ X, принимающая значения с плотностью распределения

$$p(X)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\end{cases}$$

называется распределенной по *показательному (экспоненциальному) закону* с параметром $\lambda>0$. Для СВ, распределенной по показательному закону, справедливы следующие соотношения:

$$F(X)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0,\end{cases}$$

$$M(X)=\frac{1}{\lambda}, \quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2},$$

$$P(\alpha \le x \le \beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

СВ X называется распределенной по *нормальному закону*, если ее плотность распределения имеет вид

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \ \sigma>0,$$

где a и σ – параметры распределения. Для нормально распределенной СВ справедливы следующие соотношения:

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \quad M(X)=a, \quad D(X)=\sigma^2.$$

Вероятность попадания нормально распределенной СВ на отрезок $[\alpha;\beta]$ вычисляется по формуле

$$P(\alpha \le X \le \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Вероятность отклонения нормально распределенной СВ от ее математического ожидания по абсолютной величине определяется по формуле

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Вероятность модуля отклонения относительной частоты $\varpi=\dfrac{m}{n}$ от вероятности наступления события p в серии из n независимых испытаний выражается формулой

$$P(|\varpi - p| \le \varepsilon) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Пример 7.3. Автобусы некоторого маршрута ходят строго по расписанию. Интервал движения 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 минут.

Решение. Случайная величина X – время прихода пассажира на остановку, распределена равномерно на [0; 5]. Плотность распределения вероятностей имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 5]; \\ 1/5, & x \in [0, 5]. \end{cases}$$

Пассажир будет ожидать автобус менее 3 минут, если он подойдет к остановке в интервале времени от 2 до 5 минут после отправления автобуса.

$$P(2 \le x \le 5) = \int_2^5 \frac{1}{5} dx = \left.\frac{x}{5}\right|_2^5 = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Пример 7.4. Время T безотказной работы двигателя автомобиля распределено по показательному закону. Известно, что среднее время наработки двигателя на отказ между техническим обслуживанием – 100 часов. Определить вероятность безотказной работы двигателя в течение 80 часов.

Решение. По условию задачи математическое ожидание СВ T равно 100 часов. Следовательно, $\frac{1}{\lambda} = 100, \quad \lambda = 10^{-2}$. Тогда плотность распределения времени безотказной работы двигателя имеет вид

$$p(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 0{,}01e^{-0{,}01t}, & t \ge 0. \end{cases}$$

Функция распределения СВ T

$$F(t) = P(T < t) = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ 1 - e^{-0,01t}, & t > 0 \end{cases}$$

определяет вероятность отказа двигателя за время продолжительностью t. Тогда вероятность безотказной работы двигателя за это время будет равна

$$R(t) = 1 - P(T < t) = e^{-0,01t}.$$

Функцию $R(t)$ называют функцией надежности. Для нашего случая

$$P = R(80) = e^{-0,01 \cdot 80} = e^{-0,8} = 0,45.$$

Пример 7.5. Текущая оценка ценной бумаги представляет собой нормально распределенную СВ со средним значением 100 у.е. и дисперсией 9. Найти вероятность того, что цена актива (ценной бумаги) будет находиться в пределах от 91 до 109 у.е.

Решение. Так как $a = 100$, $\sigma = \sqrt{D} = 3$, то

$$P(91 < X < 109) = P(|X - 100| < 9) = 2\Phi\left(\frac{9}{3}\right) = 2\Phi(3) = 0,9973.$$

8. Математическая статистика

8.1. Выборочный метод. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения

Изучение всего набора элементов генеральной совокупности часто оказывается невозможным из-за больших материальных затрат или бесконечности генеральной совокупности. В этом случае применяется выборочный метод. Сущность выборочного метода заключается в том, что из генеральной совокупности извлекается выборка. На выборке производят нужные исследования, а полученные результаты распространяют на всю совокупность.

Пусть для изучения количественного признака X из генеральной совокупности извлечена выборка $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ объема n. Наблюдаемые значения x_i признака X называют вариантами, а последовательность вариант, записанную в возрастающем порядке, – вариационным рядом. Статистическим распределением выборки называется перечень x_i и соответствующих им частот m_i или относительных частот ϖ_i.

Графически статистическое распределение выборочной совокупности представляется в виде полигона или гистограммы. Полигоном частот выборочной совокупности называется ломаная линия, соединяющая точки с координатами $(x_i; m_i)$.

Гистограммой выборочной совокупности называется фигура, составленная в декартовой системе координат из прямоугольников, основаниями которых являются частичные интервалы $[x_{i-1}; x_i]$, а высоты соответственно равны $\frac{m_i}{n \cdot h}$, где $h = x_i - x_{i-1}$.

Эмпирической функцией распределения называется функция $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x – число вариант в выборке, меньших x; n – объем выборки. Эмпирическая функция распределения при больших n служит оценкой неизвестной функции распределения генеральной совокупности. Эмпирическая функция распределения обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F^*(x) \le 1$.

2. Эмпирическая функция распределения является неубывающей функцией, т.е. $F^*(x_2) \ge F^*(x_1)$ если $x_2 > x_1$.

3. Если x_1 – наименьшая варианта, а x_n – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x < x_1$ и $F^*(x) = 1$ при $x > x_n$.

8.2. Точечные оценки неизвестных параметров распределения

Статистической оценкой неизвестного параметра генеральной совокупности называется функция от наблюдаемых значений случайной величины X. Сами наблюдаемые значения (варианты) $x_1,\dots,x_n$ рассматриваются как значения n независимых СВ $x_1,\dots,x_n$, имеющих тот же закон распределения, что и изучаемая СВ X. Поэтому статистические оценки также являются случайными величинами.

Статистическая оценка называется точечной, если она определяется одной величиной. Точечная оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру, называется несмещенной, в противном случае – смещенной.

Несмещенной оценкой для математического ожидания генеральной совокупности является $\bar{x}_{\text{в}}$ – выборочная средняя:

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i .$$

Смещенной оценкой для дисперсии генеральной совокупности является выборочная дисперсия $D_{\text{в}}$, а несмещенной оценкой для дисперсии генеральной совокупности является исправленная выборочная дисперсия S^2.

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i\left(x_i - \bar{x}_{\text{в}}\right)^2 .$$

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i\right)^2 = \overline{X^2} - (\bar{x}_{\text{в}})^2 .$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}}; \quad \sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}} .$$

Оценка $\overline{\theta} = \overline{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ параметра θ называется *состоятельной*, если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру при неограниченном числе испытаний, т.е. для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ выполнено предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|\overline{\theta} - \theta\right| < \varepsilon) = 1.$$

Один и тот же параметр может иметь несколько оценок, которые обладают различными дисперсиями при ограниченном числе опытов. Чем меньше дисперсия оценки, тем меньше вероятность совершить ошибку при оценке параметра. Поэтому в качестве оценки берется оценка, обладающая минимальной дисперсией. Такая оценка называется эффективной.

8.3. Интервальные оценки неизвестных параметров распределения

Статистическая оценка называется *интервальной*, если она характеризуется двумя случайными величинами: началом и концом интервала. В качестве интервальной оценки используются доверительные интервалы.

Пусть $\overline{\theta}$ является статистической оценкой неизвестного параметра θ. Тогда при некоторых $\varepsilon > 0$ вероятность $P(\overline{\theta} - \varepsilon < \theta < \overline{\theta} + \varepsilon) = \gamma$ близка к единице, т.е. неизвестный параметр θ с вероятностью γ накрывается интервалом $(\overline{\theta} - \varepsilon; \overline{\theta} + \varepsilon)$. Вероятность γ называется *доверительной вероятностью* или надежностью оценки. Интервал, который с заданной надежностью накрывает неизвестный параметр, называется *доверительным* интервалом.

Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания нормально распределенной СВ при известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности определяется неравенством

$$\overline{x}_{\text{в}} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_{\text{в}} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где t – значение функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

Если среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной СВ неизвестно, но по результатам выборки вычислены $\bar{x}_в$ и s, то доверительный интервал для математического ожидания определяется неравенством

$$x_в - t_{\gamma,n}\frac{s}{\sqrt{n}} < a < x_в + t_{\gamma,n}\frac{s}{\sqrt{n}},$$

где $t_{\gamma,n}$ находится из прил. 5 по заданным значениям γ и n.

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ нормально распределенной СВ определяется неравенством

$$sq_1 < \sigma < sq_2,$$

где q_1, q_2 определяются из прил. 6 по заданным γ и $\nu = n - 1$.

8.4. Статистическая проверка гипотезы о нормальном распределении

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений. Важнейшим среди законов распределения является нормальный закон распределения с функцией распределения

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Нормальный закон распределения является предельным для ряда законов распределения. Поэтому основные методы математической статистики разработаны для нормального закона.

Пусть $F(x)$ – функция распределения изучаемой СВ. Обозначим через H_0 гипотезу о нормальном распределении СВ с функцией

$F_0(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, где a и σ – конкретные значения параметров распределения. Для проверки гипотезы проводят серию из n независимых испытаний. В результате получают выборочную совокупность $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, по которой делают вывод о правильности гипотезы H_0. Так как СВ может принимать бесчисленное множество значений, то выборочная совокупность содержит неполную информацию о законе распределения генеральной совокупности. По этой причине при проверке гипотезы H_0 может быть допущена ошибка. Вероятность ошибочного отклонения правильной гипотезы H_0 называется *уровнем значимости*. Обычно при проверке гипотезы уровень значимости α берут равным 0,001; 0,01; 0,05.

Одним из методов статистической проверки гипотезы о законе распределения является критерий согласия Пирсона (χ^2). Пусть статистическое распределение выборки задано в виде последовательности интервалов $(x_i\,;\,x_{i+1})$ и соответствующих частот m_i (m_i – сумма частот, которые попадают в i-й интервал).

$x_i\,;\,x_{i+1}$	$x_1\,;\,x_2$	$x_2\,;\,x_3$	$x_3\,;\,x_4$	...	$x_k\,;\,x_{k+1}$
m_i	m_1	m_2	m_3	...	m_k

По результатам выборки вычисляем выборочное среднее $\bar{x}_\text{в}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_\text{в}$. Предположим (гипотеза H_0), что СВ распределена нормально с параметрами $a=\bar{x}_\text{в}$, $\sigma=\sigma_\text{в}$. Теоретическая функция распределения имеет вид

$$F_0(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-\bar{x}_\text{в}}{\sigma_\text{в}}\right).$$

Определим теоретические вероятности попадания СВ в интервал $(x_i\,;\,x_{i+1})$:

$$p_i = p(x_i < X < x_{i+1}) = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{x}_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}}}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \overline{x}_{\text{в}}}{\sigma_{\text{в}}}\right).$$

Вычисляем теоретические частоты $m_i' = np_i$ и $\chi^2_{\text{набл.}}$ (статистику Пирсона):

$$\chi^2_{\text{набл.}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'}.$$

Из таблицы критических точек распределения Пирсона (χ^2) по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $\nu = k - 3$ (k – число интервалов) определяем критическое значение $\chi^2_{\text{кр}}$.

Если $\chi^2_{\text{набл.}} < \chi^2_{\text{кр.}}$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности. Если $\chi^2_{\text{набл.}} > \chi^2_{\text{кр.}}$, то гипотеза H_0 отвергается с вероятностью ошибки α.

Пример. Дано статистическое распределение срока службы инструмента до выхода за пределы точности (в месяцах).

x_i – срок службы в мес.	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45
m_i – частота	9	24	35	22	10

Требуется:

1) построить полигон и гистограмму относительных частот (частостей);

2) по виду полигона и гистограммы и исходя из механизма образования исследуемой СВ сделать предварительный выбор закона распределения;

3) предполагая, что СВ распределена по нормальному закону, найти точечные оценки параметров распределения, записать гипотетичную функцию распределения;

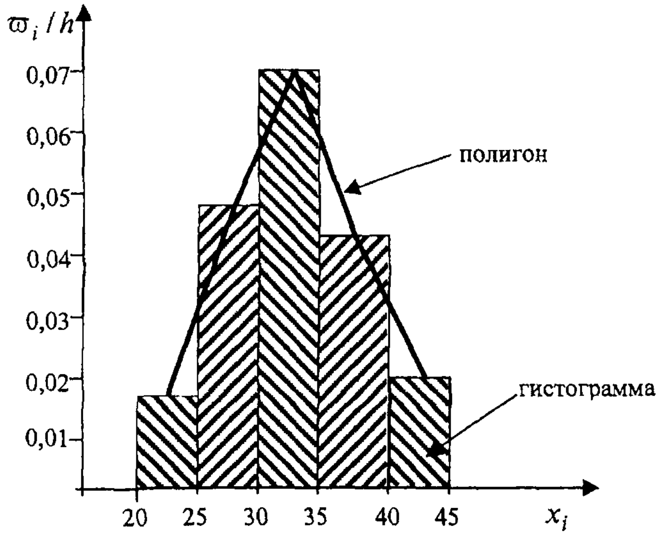
4) найти теоретические частоты нормального распределения и проверить гипотезу о нормальном распределении с помощью критерия *Пирсона* (χ^2) *при уровне значимости* $\alpha = 0{,}05$;

5) найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения нормально распределенной СВ при надежности $\gamma = 0{,}95$.

Решение. Вычислим относительные частоты $\varpi_i = \dfrac{m_i}{n}$, середины интервалов x_i^* и высоты прямоугольников гистограммы $h_i = \dfrac{\varpi_i}{h}$.

ϖ_i	0,09	0,24	0,35	0,22	0,1
x_i^*	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5
$\dfrac{\varpi_i}{h}$	0,018	0,048	0,07	0,044	0,02

Построим гистограмму и полигон частостей.



Так как полигон частостей приближенно представляет кривую Гаусса и срок службы инструмента зависит от большого количества независимых параметров, то можно сделать предположение о нормальном распределении срока службы инструмента. Вычислим точечные оценки параметров распределения.

$$a \approx \bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^* m_i =$$

$$= \frac{1}{100}(22{,}5\cdot 9 + 27{,}5\cdot 24 + 32{,}5\cdot 35 + 37{,}5\cdot 22 + 42{,}5\cdot 10) = 32{,}51.$$

$$\sigma_{\text{в}} \approx s = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\overline{X^2} - \left(\overline{x_{\text{в}}}\right)^2\right)}.$$

$$\overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i^*\right)^2 m_i =$$

$$= \frac{1}{100}\left(22{,}5^2\cdot 9 + 27{,}5^2\cdot 24 + 32{,}5^2\cdot 35 + 37{,}5^2\cdot 22 + 42{,}5^2\cdot 10\right) = 1086{,}75.$$

$$s = \sqrt{\frac{100}{99}\left(1086{,}75 - 32{,}51^2\right)} = 5{,}49.$$

Запишем гипотетичную функцию распределения:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - 32{,}51}{5{,}49}\right).$$

Вычислим теоретические частоты в предположении, что СВ распределена по нормальному закону:

$$m_i' = np_i; \quad p_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{x}_в}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \overline{x}_в}{s}\right).$$

Вычисления значений функции Лапласа приведены в таблице.

№	x_i	$x_i - \overline{x}_в$	$\frac{x_i - \overline{x}_в}{s}$	$\Phi\left(\frac{x_i - \overline{x}_в}{s}\right)$
1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	–0,5
2	25	–7,51	–1,38	–0,4162
3	30	–2,51	–0,46	–0,1772
4	35	2,49	0,45	0,1736
5	40	7,49	1,36	0,4131
6	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0,5

Вычислим теоретические частоты.

$p_1 = P(-\infty < X < 25) = -0{,}4162 + 0{,}5 = 0{,}0838$;

$p_2 = P(25 < X < 30) = -0{,}1772 + 0{,}4162 = 0{,}239$;

$p_3 = P(30 < X < 35) = 0{,}1772 + 0{,}1736 = 0{,}359$;

$p_4 = P(35 < X < 40) = 0{,}4131 - 0{,}1736 = 0{,}239$;

$p_5 = P(40 < X < +\infty) = 0{,}5 - 0{,}4131 = 0{,}087$;

$m_1' = np_1 = 100 \cdot 0{,}0838 = 8{,}38$;

$m_2' = 23{,}9; \quad m_3' = 35{,}9; \quad m_4' = 23{,}9; \quad m_5' = 8{,}7.$

Проверим гипотезу о нормальном распределении с помощью критерия χ^2.

Вычислим статистику Пирсона:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'} = \frac{(9-8{,}38)^2}{8{,}38} + \frac{(24-23{,}9)^2}{23{,}9} + \frac{(35-35{,}9)^2}{35{,}9} +$$

$$+ \frac{(22-23{,}9)^2}{23{,}9} + \frac{(10-8{,}7)^2}{8{,}7} = 0{,}375.$$

Из таблицы критических точек распределения χ^2 по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu = k - 3 = 2$ найдем $\chi^2_{\text{кр}} = \chi(0{,}05;\,2) = 5{,}991$. Так как $\chi^2 < \chi^2_{\text{кр}}$, то нет оснований отвергать гипотезу о нормальном распределении СВ.

Найдем доверительные интервалы для a и σ:

$$\overline{x_{\text{в}}} - t_{\gamma,n} \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_{\text{в}}} + t_{\gamma,n} \frac{s}{\sqrt{n}},$$

$t_{\gamma,n} = t(0{,}95;\,100) = 1{,}984$ (прил. 5). Поэтому $31{,}433 < a < 33{,}587$.

$s \cdot q_1 < \sigma < s \cdot q_2$, где $q_1 = 0{,}878$; $q_2 = 1{,}161$ (прил. 6). Значит, $4{,}82 < \sigma < 6{,}37$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

1. Для сигнализации о пожаре установлены три независимо работающих устройства. Вероятности того, что при пожаре сработает первое, второе и третье устройства, соответственно равны 0,9; 0,7; 0,85. Какова вероятность того, что при пожаре сработает хотя бы одно устройство?

2. Для подготовки к экзамену студент должен изучить 50 теоретических вопросов и научиться решать 30 типов задач. Студент, идя на экзамен, выучил 40 теоретических вопросов и научился решать 25 типов задач. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для сдачи экзамена достаточно ответить на любые два задания из билета, содержащего два теоретических вопроса и задачу.

3. Детали проходят четыре операции обработки. Вероятность получения брака при первой, второй, третьей и четвертой операциях соот-

ветственно равны 0,005; 0,01; 0,015; 0,02. Найти вероятность того, что после четырех операций будет получена стандартная деталь.

4. У сборщика 10 деталей, из них первого сорта 6, второго – 4. Какова вероятность того, что из 5 одновременно взятых деталей 3 окажутся первого сорта и 2 – второго?

5. Прибор состоит из трех независимо работающих блоков. Вероятности выхода из строя за время T первого, второго, третьего блоков соответственно равны 0,1; 0,05; 0,01. Каждый блок необходим для работы прибора в целом. Какова вероятность того, что за время T прибор выйдет из строя?

6. В ящике 15 деталей, среди которых 12 окрашенных. Сборщик случайным образом извлекает 5 деталей. Какова вероятность того, что среди извлеченных деталей 3 будут окрашенными?

7. В мастерской работают два мотора независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение смены первый мотор не потребует внимания мастера, равна 0,85, а для второго мотора эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что в течение смены только один мотор потребует внимания мастера.

8. Найти вероятность того, что случайно взятое изделие окажется первосортным, если известно, что 4 % всей продукции является браком, а 80 % небракованной продукции удовлетворяют требованиям первого сорта.

9. Устройство содержит три независимо работающих блока. Вероятности отказов блоков соответственно равны 0,15; 0,2; 0,1. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один из блоков.

10. Три исследователя независимо один от другого производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показаний прибора, равна 0,01. Для второго и третьего исследователей эти вероятности равны 0,02 и 0,015. Найти вероятность того, что ошибка будет допущена при измерении не более чем одним исследователем.

11. В контейнере 17 изделий, из них 10 изделий первого сорта, 4 изделия – 2-го сорта и 3 изделия – 3-го сорта. Рабочий случайным образом берет 6 изделий. Какова вероятность того, что среди взятых изделий окажутся 3 изделия – первого сорта, 2 изделия – второго, 1 изделие – третьего?

12. В течение года три фирмы имеют возможность обанкротиться независимо друг от друга соответственно с вероятностями 0,02; 0,05; 0,04. Какова вероятность того, что в конце года все фирмы будут функционировать?

13. На сессии студенту предстоит сдать экзамены по четырем предметам. Студент освоил 90 % вопросов по первому предмету, 80 % – по второму, 75 % – по третьему и 95 % – по четвертому. Какова вероятность того, что студент успешно сдаст сессию?

14. Устройство состоит из четырех элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Какова вероятность того, что включенными будут неизношенные элементы?

15. В электрическую цепь включены последовательно три элемента, работающие независимо друг от друга. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,2; 0,15; 0,1. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

16. Из партии для контроля отбирают 3 изделия. Известно, что в партии содержится 20 изделий, из которых 4 бракованных. Найти вероятность того, что среди отобранных все изделия годные.

17. В фирме 1149 работников, 380 из них имеют высшее образование, а 412 – среднее специальное образование; у 357 работников – высшее и среднее специальное образование. Чему равна вероятность того, что случайно выбранный работник имеет высшее или среднее образование или то и другое?

18. В ремонтную мастерскую поступило 8 телевизоров, из них 5 нуждается в общей регулировке. Мастер случайным образом берет для ремонта четыре телевизора. Какова вероятность того, что из выбранных телевизоров 3 нуждаются в общей регулировке?

19. Из группы туристов, отправляющихся за границу, 50 % владеют английским языком, 40 % – французским и 10 % – обоими языками. Найти вероятность того, что наугад взятый турист будет нуждаться в переводчике.

20. В читальном зале 10 учебников по теории вероятности, из которых 4 – в твердом переплете. Библиотекарь берет один за другим два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в мягком переплете.

21. С первого станка на сборку поступает 30 %, со второго – 40 %, с третьего – 30 % общего количества деталей. Среди деталей,

изготовленных на первом станке, имеется 2 % брака, на втором – 3 %, на третьем – 1 % брака. Найти вероятность того, что поступившая на сборку деталь стандартная.

22. Изделие проверяется на стандартность одним из двух контролеров. Первый контролер проверяет 55 % общего количества изделий, второй – 45 %. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым контролером, равна 0,9; а вторым – 0,85. Стандартное изделие при проверке признано стандартным. Найти вероятность того, что изделие проверял второй контролер.

23. Партия электролампочек на 25 % изготовлена первым заводом, на 35 % – вторым, на 40 % – третьим. Вероятности выпуска брака первым, вторым и третьим заводом соответственно равны 0,01; 0,02; 0,05. Найти вероятность того, что случайно взятая лампочка окажется бракованной.

24. На складе находятся детали, изготовленные на двух заводах. Объем продукции первого завода в четыре раза больше объема продукции второго. Вероятность брака на первом заводе 0,05; на втором – 0,01. Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что деталь изготовлена первым заводом?

25. Курс доллара повышается в течение квартала с вероятностью 0,9 и понижается с вероятностью 0,1. При повышении курса доллара фирма рассчитывает получить прибыль с вероятностью 0,85; при понижении – с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что фирма получит прибыль.

26. В цехе работает 15 станков. Из них 10 станков марки A, 3 – марки B и 2 – марки C. Вероятности выпуска стандартной детали на этих станках соответственно равны 0,85; 0,8; 0,9. При проверке деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она выпущена на станке марки C?

27. Среди студентов факультета – 35 % составляют первокурсники, 30 % студентов учатся на втором курсе, на 3-м и 4-м курсах их соответственно 20 % и 15 %. Среди студентов первого курса сдали сессию на отлично 3 %, среди второкурсников – 4,5 %, среди третьекурсников – 7 %, а среди студентов четвертого курса – 10 %. Наудачу вызванный студент оказался отличником. Какова вероятность того, что он учится на третьем курсе?

28. На сборку поступают детали с 2 автоматов. Первый автомат дает в среднем 2 % брака, второй – 1 %. Найти вероятность попада-

ния на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 5000 деталей, со второго – 3000 деталей.

29. В двух ящиках имеются однотипные детали. В первом ящике 20 деталей, из них две бракованные, во втором – 30, из них 5 бракованных. Наугад взятая деталь из случайно выбранного ящика оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она взята из первого ящика.

30. Аппаратура в 80 % случаях работает в нормальном режиме и в 20 % – в аварийном. Вероятность сбоя в нормальном режиме равна 0,05; в аварийном – 0,5. Найти вероятность сбоя аппаратуры.

31. На наблюдательной станции установлены три радиолокатора различных конструкций. Вероятность обнаружения цели первым локатором равна 0,86; вторым – 0,7; третьим – 0,9. Оператор случайным образом включает один из локаторов и обнаруживает цель. Какова вероятность того, что был отключен второй локатор?

32. Вероятность, что выпущенная деталь окажется годной, равна 0,96. Деталь подвергается упрощенной схеме контроля, которая для годных деталей дает положительный результат с вероятностью 0,95, а для деталей с отклонениями – с вероятностью 0,08. Какова вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, является годным?

33. Производятся три независимых выстрела по самолету. Вероятность попадания в самолет при каждом выстреле равна 0,3. Самолет сбивается при одном попадании с вероятностью 0,2; при двух попаданиях – 0,5; при трех – 0,9. В результате трех выстрелов самолет сбит. Какова вероятность того, что было два попадания?

34. Радиолампа может принадлежать одной из трех партий с вероятностями: 0,25; 0,25; 0,5. Вероятности того, что радиолампа проработает гарантийный срок, для первой, второй и третьей партий соответственно равны 0,9; 0,8; 0,85. Найти вероятность того, что наугад взятая электролампа выдержит гарантийный срок.

35. В торговую сеть поступают однотипные изделия, выпущенные тремя фабриками. Первая фабрика выпускает 30 % общего количества изделий, вторая – 50 %, третья – 20 %. Продукция первой фабрики содержит 0,5 % брака, второй – 2 %, третьей – 1 %. Какова вероятность того, что купленное изделие не будет бракованным?

36. Деталь производится одним из трех автоматов. Производительность первого автомата в два раза больше производительности

второго автомата, а производительность третьего автомата в полтора раза больше производительности второго. Брак первого, второго и третьего автоматов составляет соответственно 1 %, 2 %, 4 %. Какова вероятность выпуска стандартной детали?

37. Прибор может собираться из высококачественных деталей и из деталей обычного качества. Из высококачественных деталей собирается 40 % общего количества приборов. Вероятности выхода из строя прибора в течение гарантийного срока, собранного из высококачественных деталей, равна 0,03; собранного из деталей обычного качества – 0,1. Прибор выдержал гарантийный срок. Какова вероятность того, что прибор собирался из обычных деталей?

38. На трех автоматических линиях изготавливаются однотипные детали. Вследствие разладки станков возможен выпуск бракованной продукции первой линией с вероятностью 0,01; второй – 0,015; третьей – 0,02. Первая линия выпускает 30 % общего количества деталей, вторая – 20 %, третья – 50 %. Найти вероятность выпуска брака.

39. Партия микросхем содержит 10 % брака. Проверка микросхем такова, что с вероятностью 0,98 обнаруживается дефект (если он есть) и с вероятностью 0,03 стандартная микросхема признается бракованной. Какова вероятность того, что на самом деле микросхема стандартна?

40. Две из трех независимо работающих ламп отказали. Найти вероятность того, что отказали первая и третья лампы, если вероятности отказа первой, второй и третьей ламп соответственно равны 0,1; 0,3; 0,4.

41. По данным отдела технического контроля, на 100 металлических брусков, заготовленных для обработки, приходится 30 с зазубринами. Какова вероятность того, что из семи случайно взятых брусков с дефектом окажутся не более двух?

42. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Вероятность звонка абонента в течение часа равна 0,05. Какова вероятность того, что в течение часа поступят звонки не более чем от трех абонентов?

43. В 30 % случаев страховая компания выплачивает страховку по договору. Найти вероятность того, что по истечении срока десяти договоров компания уплатит страховку в трех случаях.

44. Прибор состоит из пяти узлов. Вероятность безотказной работы каждого узла в течение смены равна 0,8. Причем работа каждого узла необходима для работы прибора в целом. Найти вероятность того, что в течение смены прибор выйдет из строя.

45. Вероятность реализации одной акции некоторой компании равна 0,8. Брокерская контора предлагает 100 акций этой компании. Какова вероятность того, что будет продано не менее 85 акций?

46. Завод отправил потребителю партию из 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,003. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено не более двух изделий.

47. Вероятность отказа прибора при испытании равна 0,15. Какова вероятность того, что из 10 приборов при испытании откажут не более 2 из них?

48. Агрегат состоит из 21 блока. Вероятность того, что за время T произвольный блок испытывает лишь допустимые деформации, равна 0,8. Найти вероятность того, что за время T такие деформации испытывают от 18 до 20 блоков.

49. На склад поступают изделия, из которых 80 % оказываются высшего сорта. Найти вероятность того, что из 100 наудачу взятых изделий не менее 80 окажутся высшего сорта.

50. При установившемся технологическом процессе 70 % всего числа изделий выпускается высшего сорта. Отдел технического контроля испытывает 200 изделий. Найти вероятность того, что число изделий высшего сорта окажется в пределах от 140 до 180.

51. Инженерное сооружение состоит из семи узлов, вероятность разрушения каждого из которых 0,2. Сооружение считается разрушенным, если разрушено не менее трех узлов. Какова вероятность разрушения сооружения?

52. Книга из 500 страниц имеет 40 опечаток. Какова вероятность того, что на случайно выбранной странице не более одной опечатки?

53. В магазин вошли десять покупателей. Найти вероятность того, что 4 из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого покупателя равна 0,3.

54. Среди 100 изготавливаемых микросхем в среднем одна бракованная. Найти вероятность того, что в партии из 1000 микросхем будет не более двух бракованных.

55. В цехе 80 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод

оказывается включенным в течение 0,8 всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 60 до 70 станков?

56. При массовом производстве шестерен вероятность брака 0,01. Какова вероятность того, что из 500 шестерен не более трех окажутся бракованными?

57. В ходе аудиторской проверки компании аудитор случайным образом отбирает пять счетов. Найти вероятность того, что он обнаружит не более одного счета с ошибкой, если ошибки содержат в среднем 3 % счетов.

58. Сборник содержит 400 задач с ответами. В каждом ответе вероятность ошибки 0,01. Какова вероятность того, что в сборнике не более двух задач с ошибочными ответами?

59. Каждое из 8 предприятий отрасли выполняет месячный план с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что месячный план выполняет не менее шести предприятий.

60. При передаче текстовой информации слова кодируются в символы. Вероятность искажения каждого символа при передаче равна 0,009. При искажении двух и более символов слово не поддается дешифровке. Найти вероятность того, что слово, содержащее 10 символов, будет принято правильно.

В задачах 61-80 для данной СВ X требуется:

1) составить закон распределения СВ;

2) найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;

3) найти функцию распределения $F(x)$.

61. В партии из шести изделий имеются два бракованных. Наудачу взяты три изделия. СВ X – количество стандартных изделий среди трех взятых изделий.

62. Имеются три заготовки для одной и той же детали. Вероятность изготовления стандартной детали из каждой заготовки равна 0,9. СВ X – количество заготовок, оставшихся после изготовления первой стандартной детали.

63. Прибор состоит из трех узлов. Вероятности выхода узлов из строя в течение времени T соответственно равны 0,1; 0,05; 0,2. СВ X – число отказавших узлов в течение времени T.

64. Вероятность того, что в течение гарантийного срока телевизор потребует ремонта, равна 0,2. СВ X – число телевизоров, не выдержавших гарантийный срок, из четырех приобретенных телевизоров.

65. Охотник, имеющий четыре патрона, стреляет в цель до первого попадания (или пока не израсходует все патроны). Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. СВ X – число израсходованных патронов.

66. Стрелок делает три выстрела по мишени. Вероятности попадания в цель при первом, втором и третьем выстрелах соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. СВ X – число попаданий в мишень.

67. В партии 10 % нестандартных деталей. Наудачу взяты четыре детали. СВ X – число нестандартных деталей из 4 взятых.

68. Сигнальное устройство состоит из трех независимо работающих элементов, вероятность отказа каждого из которых равна 0,2. СВ X – число отказавших элементов.

69. В партии из 10 изделий содержатся три бракованных. Наудачу отобраны два изделия. СВ X – число бракованных изделий среди отобранных.

70. Вероятность изготовления нестандартного изделия при установившемся технологическом процессе постоянна и равна 0,9. Для проверки качества изделия берутся и проверяются одно за другим 4 изделия. Если обнаруживается бракованное изделие, то бракуют всю партию. СВ X – число изделий, проверяемых ОТК из каждой партии.

71. Вероятность приема каждого из 4 сигналов равна 0,6. СВ X – число принятых сигналов.

72. На пути движения автомобиля 4 светофора. Каждый из них с вероятностью 0,5 либо разрешает, либо запрещает дальнейшее движение. СВ X – число светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки.

73. На участке имеется 5 однотипных станков, работающих независимо друг от друга. Коэффициент использования для каждого станка равен 0,8. СВ X – число работающих станков.

74. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,6. В городе 4 библиотеки. СВ X – число библиотек, которые посетит студент, чтобы взять нужную ему книгу.

75. Два стрелка делают независимо друг от друга по два выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6; для второго – 0,8. СВ X – число попаданий в мишень.

76. Из партии в 10 изделий, среди которых 3 бракованных, выбраны случайно 3 изделия. СВ X – число бракованных изделий среди выбранных.

77. Батарея состоит из 4 орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле для 1, 2, 3 и 4-го орудий соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,75. СВ X – количество попаданий при одном залпе батареи.

78. Срок службы шестерен коробки передач зависит от следующих факторов: усталости материала в основании зуба, контактных напряжений и жесткости конструкции. Вероятности отказа каждого фактора соответственно равны 0,1; 0,2; 0,15. СВ X – число отказавших факторов в одном испытании.

79. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятности того, что в течение часа 1, 2, 3 и 4-й станки потребуют внимания рабочего, соответственно равны 0,2; 0,1; 0,2; 0,3. СВ X – число станков, потребовавших внимания рабочего.

80. В пятиблочном радиоприемнике (все блоки различные) перегорел один блок. Для устранения неисправности наудачу взятый блок заменяется исправным блоком, после чего проверяется работа приемника. СВ X – число замененных блоков.

В задачах 81 – 100 дана плотность распределения вероятности $p(x)$.

Требуется: 1) определить значение параметра a;

2) найти функцию распределения $F(x)$;

3) найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$;

4) построить графики $p(x)$ и $F(x)$.

81. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^2, & 0<x\le 10,\\ 0, & x>10.\end{cases}$ 82. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ ax, & 1<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

83. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^3, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$ 84. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax+1, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

85. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1), & 1<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$ 86. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ ax^2, & 0<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$

87. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^2+3, & 0<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$ 88. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 3,\\ 3+ax, & 3<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$

89. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le -\frac{\pi}{2},\\ a\sin x, & -\frac{\pi}{2}<x\le 0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$ 90. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\sin 2x, & 0<x\le \frac{\pi}{4},\\ 0, & x>\frac{\pi}{4}.\end{cases}$

91. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ ax^2, & 2<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$ 92. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(2x-1), & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

93. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ a, & 2<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$ 94. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ ax^2+1, & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

95. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x+1)^2, & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$ 96. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^3, & 0<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

97. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 2,\\ ax^2+2, & 2<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$ 98. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(3x+1), & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

99. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\sin 2x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

100. $p(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ a(x-1)^2, & 1<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$

В задачах 101-120 СВ X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ.

Требуется:

1) записать $p(x)$, $F(x)$;

2) найти $P(\alpha\le x\le\beta)$;

3) найти $P(|x-a|<\delta)$.

№ задачи	a	σ	α	β	δ
1	2	3	4	5	6
101	2,8	0,6	2,1	3,0	1,8
102	3,5	1,2	2,2	4,2	2,1
103	1,5	0,5	2,1	3,0	0,9
104	2,8	0,8	2,5	3,5	1,2
105	10	3	6	13	7,5
106	4	1,5	3	7	2,8
107	5	3	3,5	7	5,1
108	3	2	2	6	4,8
109	4,1	3,5	2	7	4,5
110	3,6	5,1	1,5	5,6	8,2
111	6,2	4,3	5	10	6,4
112	4,7	2,8	1,2	7,3	4,9
113	5,6	2,9	3,0	9,1	5,4

1	2	3	4	5	6
114	8,5	4,7	5,2	10,2	6,3
115	9,4	5,6	4,2	12,5	7,0
116	2,5	4,1	2,7	5,2	5,4
117	7,2	3,5	4,1	10,8	5,5
118	7,8	6,2	3,0	12,9	8,4
119	4,3	5,1	1,6	9,8	9,2
120	10,5	7,1	7,2	15,4	10,1

В задачах 121–140 дан интервальный статистический ряд распределения частот экспериментальных значений случайной величины X.

Требуется:

1) построить полигон и гистограмму частостей (относительных частот) СВ X;

2) по виду полигона и гистограммы и исходя из механизма образования СВ сделать предварительный выбор закона распределения;

3) вычислить выборочную среднюю $\bar{x}_в$ и исправленное среднее квадратическое отклонение s;

4) записать гипотетичную функцию распределения и плотность распределения;

5) найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения при доверительной вероятности $\gamma = 0,95$;

6) найти теоретические частоты нормального закона распределения и проверить гипотезу о нормальном распределении СВ с помощью критерия Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

121. Даны результаты испытания стойкости 200 удлиненных сверл диаметра 4 мм (в часах).

x_i – стойкость сверла	3–3,2	3,2–3,4	3,4–3,6	3,6–3,8	3,8–4
частота m_i	16	50	70	44	20

122. Даны результаты исследования 100 напыленных образцов на прочность напыленного слоя (кг/мм^2).

x_i – прочность	2,0–2,2	2,2–2,4	2,4–2,6	2,6–2,8	2,8–3,0
частота m_i	7	22	38	23	10

123. Даны результаты исследования на разрыв 100 образцов дюралюминия .

x_i – предел прочности (кг/мм^2)	42–43	43–44	44–45	45–46	46–47
частота m_i	8	25	36	22	9

124. Даны результаты содержания фосфора (6 %) в 100 чугунных образцах.

x_i – содержание фосфора	0,1–0,2	0,2–0,3	0,3–0,4	0,4–0,5	0,5–0,6
частота m_i	7	22	38	24	9

125. Даны результаты испытания стойкости 100 сверл (в часах).

x_i – стойкость	17,5–22,5	22,5–27,5	27,5–32,5	32,5–37,5	37,5–42,5
частота m_i	7	20	44	20	9

126. Даны данные о среднесуточном пробеге 100 автомобилей автоколонны (сотни километров).

x_i	1,2–1,6	1,6–2,0	2,0–2,4	2,4–2,8	2,8–3,2
частота m_i	8	19	47	20	6

127. С автомата, обрабатывающего втулки диаметром $d = 40 + 0{,}2$ мм, взята выборка изделий объемом 100. Результаты измерения диаметров втулок приведены в таблице.

x_i – диаметр	40,00–40,04	40,04–40,08	40,08–40,12	40,12–40,16	40,16–40,20
частота m_i	8	19	44	20	9

128. В таблице приведены статистические данные о трудоемкости (в минутах) операции «Контроль механического состояния автомобиля после возвращения в гараж».

x_i – трудоемкость	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9
частота m_i	6	8	33	35	11	7

129. В таблице приведены статистические данные о трудоемкости (в минутах) операции «ремонт валика водяного насоса автомобиля».

x_i – трудоемкость	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
частота m_i	17	47	70	46	20

130. Даны результаты испытания стойкости 100 фрез (в часах).

x_i – стойкость	21–26	26–31	31–36	36–41	41–46
частота m_i	8	21	43	21	7

131. Даны сведения о расходе воды, используемой цехом для технических нужд в течение 100 дней (м^3).

x_i – расход	8–12	12–16	16–20	20–24	24–28
частота m_i	7	25	36	22	10

132. Даны квартальные данные о среднесуточном пробеге 100 автомобилей (км).

x_i– среднесуточный пробег	120–140	140–160	160–180	180–200	200–220
частота m_i	9	21	40	18	12

133. Даны значения температуры масла в двигателе автомобиля БелАЗ при средних скоростях.

x_i – температура (градус)	40–45	45–50	50–55	55–60	60–65
частота m_i	8	17	46	18	11

134. Даны размеры внутреннего диаметра гайки (мм).

x_i – диаметр	10,00–10,02	10,02–10,04	10,04–10,06	10,06–10,08	10,08–10,10
частота m_i	9	16	47	21	7

135. Даны размеры диаметров 100 отверстий, просверленных одним и тем же сверлом.

x_i – диаметр (мм)	8,02–8,07	8,07–8,12	8,12–8,17	8,17–8,22	8,22–8,27
частота m_i	10	19	38	21	12

136. Даны результаты измерения диаметра валика, обработанного одношпиндельным автоматом.

x_i, – диаметр (мм)	19,80–19,85	19,85–19,90	19,90–19,95	19,95–20,00	20,05–20,10	20,10–20,15
частота m_i	6	15	27	32	14	6

137. Даны результаты исследования грануляции партии порошка (мкм).

x_i – грануляция	0–40	40–80	80–120	120–160	160–200
частота m_i	7	23	35	26	9

138. Даны результаты наблюдений за сроком службы 150 однотипных станков до выхода за пределы норм (в месяцах двухсменной работы).

x_i – срок в месяцах	18–20	20–22	22–24	24–26	26–28
частота m_i	15	27	61	29	18

139. Даны результаты измерения толщины (см) 100 слюдяных прокладок.

x_i – толщина	0,20–0,26	0.26–0,32	0,32–0,38	0,38–0,44	0,44–0,50
частота m_i	13	19	48	12	8

140. Даны диаметры 100 валиков после шлифовки (мм).

x_i – диаметр	20,0–20,1	20,1–20,2	20,2–20,3	20,3–20,4	20,4–20,5
частота m_i	11	23	49	10	7

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3084	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3025	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2804	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0846	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0032	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0012	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0010	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
0,01	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0734	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	2,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,6,	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	1,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2764	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

Значения функции $\chi^2_{\alpha;\nu}$; $P(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;\nu}) = \alpha$

$\nu \backslash \alpha$	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,683	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23.542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,566	44,312	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Распределение Стьюдента

Значения $t_{\alpha;\nu}$ удовлетворяют условию $P(t \geq t_{\alpha;\nu}) = \int\limits_{t_{\alpha;\nu}}^{\infty} S(t,\nu)dt = \alpha$

ν\α	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	32,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3.747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	5,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0.258	0,536	0,866	1.341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3.922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725

Окончание табл.4

ν\α	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	7,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Значения функции $t_{\gamma;n}$: $x - t_{\gamma;n}\dfrac{\overline{S}}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t_{\gamma;n}\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

$n\backslash\gamma$	0,95	0,99	0,999	$n\backslash\gamma$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Значения коэффициентов q_1 и q_2; $q_1 S < \sigma < q_2 S$

	0,99		0,98		0,95		0,00	
	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2	q_1	q_2
1	0,356	15,0	0,388	79,8	0,446	31,9	0,510	15,9
2	0,434	14,1	0,466	9,97	0,521	6,28	0,578	4,40
3	0,483	6,47	0,514	5,11	0,566	3,73	0,620	2,92
4	0,519	4,39	0,549	3,67	0,599	2,87	0,649	2,37
5	0,546	3,48	0,576	3,00	0,624	2,45	0,672	2,090
6	0,569	2,98	0,597	2,62	0,644	2,202	0,690	1,916
7	0,588	2,66	0,616	2,377	0,661	2,035	0,705	1,797
8	0,604	2,440	0,631	2,205	0,675	1,916	0,718	1,711
9	0,618	2,277	0,644	2,076	0,688	1,826	0,729	1,645
10	0,630	2,154	0,656	1,977	0,699	1,755	0,739	1,593
11	0,641	2,056	0,667	1,898	0,708	1,698	0,748	1,550
12	0,651	1,976	0,676	1,833	0,717	1,651	0,755	1,515
13	0,660	1,910	0,685	1,779	0,725	1,611	0,762	1,485
14	0,669	1,854	0,693	1,733	0,732	1,577	0,769	1,460
15	0,676	1,806	0,700	1,694	0,739	1,548	0,775	1,437
16	0,683	1,764	0,707	1,659	0,745	1,522	0,780	1,418
17	0,690	1,727	0,713	1,629	0,750	1,499	0,785	1,400
18	0,696	1,695	0,719	1,602	0,756	1,479	0,790	1,385
19	0,702	1,668	0,725	1,578	0,760	1,460	0,794	1,370
20	0,707	1,640	0,730	1,556	0,765	1,414	0,798	1,358
21	0,712	1,617	0,734	1,536	0,769	1,429	0,802	1,346
23	0,722	1,576	0,743	1,502	0,777	1,402	0,809	1,326
24	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316
25	0,730	1,541	0,751	1,473	0,784	1,380	0,815	1,308
26	0,734	1,526	0,755	1,460	0,788	1,371	0,818	1,300
27	0,737	1,512	0,758	1,448	0,791	1,361	0,820	1,293
29	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,825	1,279
30	0,748	1,475	0,768	1,417	0,799	1,337	0,828	1,274
40	0,774	1,390	0,792	1,344	0,821	1,279	0,847	1,228
50	0,793	1,336	0,810	1,297	0,837	1,243	0,861	1,199
60	0,808	1,299	0,824	1,265	0,849	1,217	0,871	1,179
70	0,820	1,272	0,835	1,241	0,858	1,198	0,879	1,163
80	0,829	1,250	0,844	1,222	0,866	1,183	0,886	1,151
90	0,838	1,233	0,852	1,207	0,873	1,171	0,892	1,141
100	0,845	1,219	0,858	1,195	0,878	1,161	0,897	1,133
200	0,887	1,15	0,897	1,13	0,912	1,11	0,925	1,09

Содержание