МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Белорусский национальный
технический университет

Кафедра «Высшая математика № 3»

Е. Л. Ерошевская

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

Ч а с т ь 1

М и н с к
Б Н Т У
2 0 1 8

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Белорусский национальный технический университет

Кафедра «Высшая математика № 3»

Е. Л. Ерошевская

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов строительных специальностей

В 2 частях

Часть 1

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области строительства и архитектуры*

Минск
БНТУ
2018

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.1я7
Е78

Рецензенты:
кафедра высшей математики Белорусского аграрного технического университета (зав. кафедрой, канд. физ.-мат. наук, доц. *А. А. Тиунчик*);
доцент кафедры Белорусского государственного университета
М. В. Дубатовская

Ерошевская, Е. Л.

Е78 Математика : учебно-методическое пособие для студентов строительных специальностей : в 2 ч. Ч. 1 / Е. Л. Ерошевская. – Минск: БНТУ, 2018. – 182 с.

ISBN 978-985-550-888-6 (Ч. 1).

Данное издание предназначено для студентов первого курса (первый семестр) дневного и заочного отделений.

В нем излагаются элементы линейной алгебры, векторы, метод координат, элементы аналитической геометрии, дифференциальное исчисление функции одной переменной и его применение к исследованию функций. Разобрано достаточное количество примеров, которые поясняют смысл основных понятий при решении задач.

Данное издание имеет целью помочь студентам в их самостоятельной работе при изучении тем первого семестра.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.1я7

ISBN 978-985-550-888-6 (Ч. 1)
ISBN 978-985-550-889-3

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Матрицы и определители

1.1.1. Матрицы, основные понятия

Изучаемый в математике и рассматриваемый как единое целое объект, с которым производятся какие-либо математические действия, будем называть *математическим объектом*. К математическим объектам относятся, например, числа, геометрические объекты (линии, поверхности и т. п.), переменные величины и т. д.

Термин «матрица» был введен Дж. Сильвестром в 1850 году, в математику – А. Кэли в 1857 году. Матрицей называется математический объект, состоящий из mn элементов, взятых в определенном порядке.

Для указания на порядок элементов матрицы их выписывают в виде таблицы из m строк и n столбцов. Элемент матрицы, стоящий на пересечении строки с номером i и столбца с номером j, обозначают a_{ij}. Если a_{ij} – числа, матрица называется числовой. Обозначают матрицы большими латинскими буквами.

Обозначение матриц

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix};\ \left(a_{ij}\right),$$

где $i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}.$

Иногда матрицу обозначают одной буквой, например, A.

1.1.2. Основные виды матриц

Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, т. е. $m=n$, то матрица называется квадратной. Порядком квадратной матрицы называется число ее строк (или столбцов). Строки и столбцы матрицы называют ее рядами.

Обозначение квадратной матрицы порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -6 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица 3-го порядка.

Две матрицы называются равными, если они имеют одинаковые размеры и элементы одной матрицы равны соответствующим элементам другой матрицы: $A_{m\times n} = B_{p\times k}$, $m = p$, $n = k$.

В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную* диагональ, а элементы $a_{n1}, a_{n-1\ 2}, \dots, a_{1n}$ – *побочную*.

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой отличны от нуля только элементы, стоящие по главной диагонали.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной* E_n. Например, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Нулевой* матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Симметрическая матрица – квадратная матрица, для которой $a_{ij} = a_{ji}$. Например, матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 8 \\ -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ симметрическая.

Трапециевидная матрица – матрица произвольных размеров, если она имеет вид

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}$ отличны от нуля.

Треугольная матрица (частный случай трапециевидной) – квадратная матрица, все элементы которой по одну или другую сторону от главной диагонали равны нулю. Различают верхнюю и нижнюю треугольные матрицы. Например, матрица вида $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется верхней треугольной матрицей.

Матрица A^T, полученная из данной матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется *транспонированной* к данной.

Если $A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$,

то $A^T{}_{n\times m}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Операция нахождения матрицы, транспонированной к данной, называется *транспонированием* матрицы.

Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой*. Она имеет вид $A_{1\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$.

Матрица, состоящая из одного столбца, называется *матрицей-столбцом*.

Имеет вид $A_{m\times 1}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

1.1.3. Действия над матрицами

К линейным операциям над матрицами относятся умножение матрицы на число, сложение матриц.

1. Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ на действительное число $\alpha\in R$ называется новая матрица $C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)$, где $c_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$. Обозначение: $C=\alpha\cdot A=A\cdot\alpha$. Например, $3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 21 & 30 \end{pmatrix}$.

Матрица вида $(-1)A=-A$ называется матрицей, *противоположной* матрице A.

2. Сложение матриц.

Складывать можно только матрицы одинаковых размеров, т. е. имеющие одинаковое число строк и столбцов.

Суммой двух матриц $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ и $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)$, где $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right)$ и обозначается $C=A+B$.

Пример 1.1. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & 1\\ 5 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 7 & 12\\ -3 & 0\end{pmatrix}$, $A+B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 7 & 13\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

Разность матриц A и B определяется так: $A-B=A+\left(-B\right)$.

3. Умножение матриц.

Матрицу A будем называть согласованной с матрицей B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Пример 1.2. Пусть $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 4 & 6 & 10\end{pmatrix}$ и $B_{3\times 1}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 5\end{pmatrix}$. Матрица A согласована с матрицей B, но матрица B не согласована с матрицей A.

Если матрица A согласована с матрицей B, то *произведением* матрицы $A_{m\times k}=\left(a_{ij}\right)$ на матрицу $B_{k\times n}=\left(b_{ij}\right)$ называется новая матрица $C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)$ такая, что

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}\cdot b_{sj},\ \ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}. \quad (1.1)$$

Формула (1.1) называется правилом произведения матриц.

Из определения произведения матриц следует, что для того, чтобы получить элемент произведения матриц $A\cdot B$, стоящий в i-й строке и j-м столбце, нужно умножить элементы i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и эти произведения сложить.

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}\\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}\end{pmatrix}.$$

Пример 1.3. Вычислить $A \cdot B,$ если $A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix},$

$$B_{3\times3} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A (три столбца) согласована с матрицей B (три строки). $A \cdot B = \begin{pmatrix} -3-4+0 & 1+4+0 & 1-10+0 \\ -9+8+1 & 3-8+0 & 3+20-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & -9 \\ 0 & -5 & 19 \end{pmatrix}.$

Замечание. Умножить матрицу B на A в данном случае нельзя – число столбцов матрицы B (три) не равно числу строк матрицы A (двум).

Замечание. Так как в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A,$ то произведение матриц не коммутативно.

Свойства действий над матрицами

1. $A + B = B + A$ (коммутативность относительно сложения).
2. $A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$ (ассоциативность).
3. $A + 0 = A.$
4. $A + (-A) = 0.$
5. $1 \cdot A = A.$
6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B,$ где $\alpha \in R$ (дистрибутивность сложения матриц относительно умножения на число).
7. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A,$ $\alpha \in R,$ $\beta \in R$ (дистрибутивность сложения чисел относительно умножения на матрицу).
8. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ и $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (дистрибутивность умножения).

Транспонирование связано со сложением и умножением матриц нижепредставленными формулами.

9. $\left(A^T\right)^T = A.$
10. $(A + B)^T = A^T + B^T.$

11. $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$.

12. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

13. $E \cdot A = A \cdot E = A$.

14. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

15. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (ассоциативность).

16. $\alpha \cdot A \cdot B = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B), \ \alpha \in R$.

Доказательство этих формул вытекает непосредственно из определений соответствующих операций сложения и умножения.

1.1.4. Определители и их основные свойства

Понятие «определитель» было введено Г. Лейбницем и японским математиком Кова Секи независимо друг от друга в 1683 году.

Развитие теории определителей нашло свое отражение в работах Ю. Вронского, Э. Кристоффеля, О. Коши и Дж. Сильвестра.

Понятие *определителя* (детерминанта) матрицы вводится только для квадратной матрицы.

Дана квадратная матрица n-го порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Определитель n-го порядка, порожденный матрицей A порядка n, имеет вид $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Определитель обозначается Δ_A, $\det A$. Определитель является числовой характеристикой квадратной матрицы. Элементы, строки, столбцы и диагонали матрицы называют соответственно элементами, строками, столбцами и диагоналями определителя матрицы.

Определителем матрицы первого порядка $A_1 = (a_{11})$ называется сам элемент a_{11} этой матрицы. Обозначение: $\det A_1 = \Delta A_1 = |a_{11}| \overset{\text{def}}{=} a_{11}$.

Определителем матрицы второго порядка $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется число, равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей, т. е. $\det A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{\text{def}}{=} a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Пример 1.4. Вычислить $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7.$

Определитель третьего порядка имеет вид $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} стоят на главной диагонали, элементы a_{13}, a_{22}, a_{31} – на побочной.

Существует ряд правил для вычисления определителей третьего порядка. Так, например, значение определителя третьего порядка можно вычислить по *правилу треугольников*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$
$$- a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}.$$

Можно вычислить также по *правилу Саррюса*: к определителю приписывают справа первый и второй столбцы.

$$\begin{array}{|ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} .$$
$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

Произведения из трех элементов, стоящих на главной диагонали и на прямых, ей параллельных, берутся со знаком «+», а произведения из трех элементов, стоящих на побочной диагонали и на прямых, ей параллельных, берутся со знаком «–».

Пример 1.5. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Решение. Воспользуемся правилом треугольников:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot(-1) + 2\cdot 0\cdot 1 + 5\cdot 0\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot 5 - 3\cdot 0\cdot 1 - (-1)\cdot 0\cdot 2 = -6$$

или по правилу Саррюса $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{matrix} = -1 + 0 + 0 - 5 - 0 - 0 = -6$.

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

Определители четвертого и более высоких порядков при вычислении сводятся к определителям более низких порядков (например, третьего).

Основные свойства определителей

Иллюстрация этих свойств будет приведена для определителей третьего порядка.

1. *Свойство инвариантности* (неизменности) определителя при транспонировании матрицы: при замене строк столбцами величина определителя не меняется (причем каждую строку следует заменить столбцом с тем же номером). Свойство выражает равноправность строк и столбцов. В дальнейшем слова «строка» и «столбец» заменим одним словом – ряд. Свойство записывается так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (1.2)$$

Доказательство. Проверим справедливость этого свойства, применяя правило треугольников к левой и правой части равенства (1.2) и сравним результаты:

$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11}-$$
$$-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-$$
$$-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}-a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}.$$

2. Если поменять местами два параллельных ряда, то определитель изменит знак.

Так, например, переставляя первый и второй столбцы, получаем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (1.3)$$

3. Если определитель имеет два одинаковых параллельных ряда, то он равен нулю.

4. Если в определителе элементы какого-либо ряда содержат общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} \alpha\cdot a_{11} & \alpha\cdot a_{12} & \alpha\cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (1.4)$$

Следствие 1. При умножении определителя на скаляр (число) необходимо умножить на этот скаляр только один из рядов определителя.

Следствие 2. Величина определителя равна нулю, если элементы какого-либо его ряда равны нулю.

5. Определитель, у которого элементы двух параллельных рядов пропорциональны, равен нулю.

6. Определитель, у которого каждый элемент некоторого ряда является суммой двух слагаемых, равен сумме двух определителей, у первого из которых в указанном ряду стоят первые слагаемые, а у второго – вторые слагаемые. Остальные ряды, параллельные указанному, у всех определителей одинаковы.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}' + a_{12}'' & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}' + a_{22}'' & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}' + a_{32}'' & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}' & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}' & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}' & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}'' & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}'' & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}'' & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (1.5)$$

Все сформулированные свойства (2–6) доказываются аналогично первому, т. е. по правилу треугольников.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель, который получается из данного путем вычеркивания строки с номером i и столбца с номером j. Например, для элемента a_{11} минором является определитель $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} для элемента a_{ij} называется его минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, где i – номер строки, j – номер столбца. $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \mathrm{M}_{ij}$. Например, для элемента a_{21} алгебраическое дополнение имеет вид $A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

7. Теорема Лапласа. Определитель равен сумме произведений элементов любого ряда на соответствующие алгебраические дополнения элементов этого ряда. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum a_{ij} \cdot A_{ij}$, где $i = \overline{1;3}$, $j = \overline{1;3}$.

Доказательство. Докажем в случае разложения по элементам первого столбца.

$$a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}\left(a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}\right) - a_{21}\left(a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{13}\right) +$$

$$+ a_{31}\left(a_{12} \cdot a_{23} - a_{22} \cdot a_{13}\right) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} = \Delta$$ *(на основании правила треугольников).*

Пример 1.6. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 5 & 18 & 19 \\ 3 & 17 & 6 \end{vmatrix}$, разлагая по элементам второго столбца.

Решение. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 5 & 18 & 19 \\ 3 & 17 & 6 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 18\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 17\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 5 & 19 \end{vmatrix} = 38.$

8. Величина определителя не изменится, если к элементам какого-либо ряда прибавить элементы другого параллельного ему ряда, предварительно умноженные на одно и то же число.

Например, убедимся, что $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+ka_{31} \end{vmatrix}.$

На основании свойства 6

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+ka_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{31} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

В этой сумме второй определитель по свойству 3 равен 0. Свойство 8 широко используется для получения нулей в определителе и приведения его к треугольному виду.

Пример 1.7. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$.

Решение. Если из пятой строки вычесть первую, а из четвертой – удвоенную вторую, то полученный определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ будет с нулями под главной диагональю, и он равен произведению элементов, стоящих на его главной диагонали, $\Delta = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Пример 1.8. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение. Если из второй строки вычесть первую, из третьей – удвоенную первую, из четвертой – утроенную первую, то получим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$, равный исходному. Разложим полученный определитель по элементам первого столбца (используя свойство 7), и определитель примет вид $1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$.

Используя свойство 8 можно записать $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} =$ по свойству 7

$= 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -1$.

9. *Теорема аннулирования*. Сумма произведений элементов некоторого ряда определителя на алгебраические дополнения другого параллельного ему ряда равна нулю: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{kj} = 0, \;\; i = k.$

Доказательство. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Составим сумму произведений элементов первой строки на алгебраические дополнения элементов второй строки:

$$\sum_{j=1}^{3} a_{1j} \cdot A_{2j} = a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = a_{11}\left(-a_{12} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{32}\right) +$$
$$+ a_{12}\left(a_{11} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{13}\right) + a_{13}\left(-a_{11} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{12}\right) = 0.$$

Свойства определителей широко используются при вычислении определителей произвольного порядка.

1.1.5. Определитель произведения квадратных матриц

Теорема. Определитель произведения двух квадратных матриц одного порядка равен произведению определителей этих матриц, т. е.

$$\Delta_{A \cdot B} = \Delta_A \cdot \Delta_B \text{ (или } \det A \cdot B = \det A \cdot \det B\text{)}. \qquad (1.6)$$

Доказательство теоремы проведем на примере матриц второго порядка.

Дано $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. $\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}.$$

$\Delta_{A \cdot B} = \begin{vmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{vmatrix}$ на основании свойства 6 определителей имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cdot b_{11} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\cdot b_{11} & a_{11}\cdot b_{12} \\ a_{21}\cdot b_{11} & a_{21}\cdot b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}\cdot b_{11} & a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11} & a_{22}\cdot b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12} \\ a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}\cdot b_{21} & a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{22}\cdot b_{21} & a_{22}\cdot b_{22} \end{vmatrix}.$$

На основании свойства 4 запишем

$$b_{11}\cdot b_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{11}\cdot b_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{21}\cdot b_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{21}\cdot b_{22}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Первый и четвертый определители равны нулю на основании свойства 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\left(b_{11}\cdot b_{22} - b_{21}\cdot b_{12}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \Delta_A\cdot\Delta_B.$$

Аналогично эта теорема доказывается для квадратных матриц любого порядка.

1.1.6. Обратная матрица

Понятие обратной матрицы вводится только для квадратной матрицы. Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю, т. е. $\Delta_A \neq 0,$ и *вырожденной*, если $\Delta_A = 0.$

Матрица A^{-1} называется обратной квадратной матрице $A,$ если

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E, \qquad (1.7)$$

где E – единичная матрица.

Союзной матрицей для квадратной матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

называется матрица

$$C=\left(A_{ij}\right)^T=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1.8)$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения к элементам a_{ij} матрицы A, где $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$.

Лемма. Если C – союзная матрица для матрицы A, то

$$A\cdot C=C\cdot A=E\cdot\Delta_A. \qquad (1.9)$$

Теорема (о существовании обратной матрицы). Для того чтобы существовала матрица A^{-1}, обратная матрице A, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной.

Доказательство необходимости. Пусть для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Докажем, что $\Delta_A\neq 0$. Так как A^{-1} существует, то на основании формул (1.6) и (1.7) следует: $\Delta\left(A\cdot A^{-1}\right)=\Delta_A\cdot\Delta_{A^{-1}}$, $\Delta(E)=\Delta_A\cdot\Delta_{A^{-1}}\Rightarrow 1=\Delta_A\cdot\Delta_{A^{-1}}\Rightarrow\Delta_A\neq 0$, т. е. матрица A невырожденная.

Доказательство достаточности

Пусть $\Delta_A\neq 0$. Докажем, что A^{-1} существует.

Если C – союзная матрица для матрицы A, то справедлива формула (1.9). Разделим равенство (1.9) на $\Delta_A\neq 0$ и получим

$$A\cdot\left(\frac{1}{\Delta}\cdot C\right)=\left(\frac{1}{\Delta}\cdot C\right)\cdot A=E.$$

Из этого равенства на основании формулы (1.7) следует, что в качестве обратной матрицы выступает матрица $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot C$.

Замечание. Из доказательства достаточности следует правило нахождения обратной матрицы.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left(A_{ij} \right)^T, \qquad (1.10)$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элемента a_{ij} матрицы A.

Свойства обратных матриц

1. $\Delta_{A^{-1}} = \frac{1}{\Delta_A}$. 2. $\left(A^{-1} \right)^{-1} = A$. 3. $\left(A \cdot B \right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Правило для нахождения обратной матрицы

1. Вычислим определитель матрицы A: Δ_A. Пусть $\Delta_A \neq 0$.
2. Найдем алгебраические дополнения для элементов a_{ij}.

Составим матрицу алгебраических дополнений определителя Δ_A. Обозначим ее A^*.

3. Полученную матрицу A^* транспонируем и обозначим ее C (союзная матрица).

4. Союзную матрицу C умножим на $\frac{1}{\Delta}$ и получим обратную матрицу A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot C.$$

Пример 1.9. Найти обратную матрицу матрице $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение. $\Delta_A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 14 & -8 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 25 & -15 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 14 & -8 \\ 25 & -15 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$

$A_{11} = -5$ $\qquad A_{12} = 15$ $\qquad A_{13} = 25$
$A_{21} = 1$ $\qquad A_{22} = 3$ $\qquad A_{23} = 9$
$A_{31} = 4$ $\qquad A_{32} = -8$ $\qquad A_{33} = -14$

$$A^* = \begin{pmatrix} -5 & 15 & 25 \\ 1 & 3 & 9 \\ 4 & -8 & -14 \end{pmatrix}, \quad C = \left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot C = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 1,5 & 0,3 & -0,8 \\ 2,5 & 0,9 & -1,4 \end{pmatrix}.$$

Теорема. Для невырожденной матрицы существует единственная обратная матрица.

Доказательство. Докажем методом от противного. Предложим, что для матрицы A существует две обратные матрицы A_1^{-1} и A_2^{-1}.

По определению обратной матрицы имеем $A \cdot A_1^{-1} = A_1^{-1} \cdot A = E$ и $A \cdot A_2^{-1} = A_2^{-1} \cdot A = E$. Умножим $A \cdot A_1^{-1} = E$ слева на A_2^{-1} и получим $\left(A_2^{-1} \cdot A\right) \cdot A_1^{-1} = A_2^{-1} \cdot E$ или $E \cdot A_1^{-1} = A_2^{-1} \cdot E \Rightarrow A_1^{-1} = A_2^{-1}$.

1.1.7. Системы линейных алгебраических уравнений. Матричная запись системы. Основные определения

Системой m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1.11)$$

где $a_{ij} \in R$ – действительные числа, называемые коэффициентами системы $i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$;

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные системы;

$b_1, b_2, \ldots, b_m$ – свободные члены системы.

Все неизвестные в первой степени, поэтому система (1.11) – это система линейных уравнений.

Если все свободные члены системы (1.11) равны нулю, то система называется *однородной*.

Матрица $A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов системы, называется *матрицей системы*. Матрица $\tilde{A}$, полученная из матрицы A добавлением столбца свободных членов, называется *расширенной* матрицей системы

$$\tilde{A}_{m \times n+1} = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} b_1 \\ a_{21} a_{22} \ldots a_{2n} b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} a_{m2} \ldots a_{mn} b_m \end{pmatrix}.$$

Если через X обозначить матрицу-столбец из неизвестных, т. е. $X_{n \times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, а через B – матрицу-столбец свободных членов, т. е. $B_{m \times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$, то так как матрица A (имеет n столбцов) согласована с матрицей X (имеет n строк), произведение $A \cdot X$ существует и линейную систему (1.11) можно записать в матричном виде $A \cdot X = B$ (1.11').

Упорядоченная совокупность чисел ($c_1, c_2, \ldots, c_n$) называется решением системы (1.11), если каждое из уравнений (1.11) обращается в верное равенство после подстановки вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Решение системы, записанное в виде матрицы-столбца $X = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}$, называется *вектор-решением* системы.

Если существует хотя бы одно решение системы (1.11), то она называется *совместной*, и *несовместной*, если она не имеет решений.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение.

Система, имеющая более одного решения, называется *неопределенной*.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна, и в случае совместности найти все ее решения.

Две системы называются *эквивалентными* или равносильными, если всякое решение одной из них является решением другой и наоборот.

1.1.8. Решение невырожденной системы линейных алгебраических уравнений матричным методом и по формулам Крамера

Габриель Крамер (1704–1752) – швейцарский математик, один из создателей линейной алгебры.

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1.12)$$

или

$$A \cdot X = B. \qquad (1.12')$$

Определитель матрицы A имеет вид $\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{vmatrix}$ и называется определителем системы. Если $\det A \neq 0$, то система называется невырожденной. Найдем решение системы, предполагая что $\det A \neq 0$. В этом случае матрица A невырожденная и для нее существует единственная обратная матрица (по теоремам пп. 1.1.6)

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Умножим матричное уравнение (1.12') слева на A^{-1} и получим

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B. \qquad (1.13)$$

Формула (1.13) – решение системы (1.12) в матричном виде.

Это равенство можно записать так:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_j \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{j1} & ... & A_{n1} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ A_{1j} & A_{2j} & ... & A_{jj} & ... & A_{nj} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{jn} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_j \\ ... \\ b_n \end{pmatrix},$$

где $j = \overline{1, n}$ или

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_j \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + ... + A_{j1}b_j + ... + A_{n1}b_n \\ .... \\ A_{1j}b_1 + ... + A_{jj}b_j + ... + A_{nj}b_n \\ .... \\ A_{1n}b_1 + ... + A_{jn}b_j + ... + A_{nn}b_n \end{pmatrix}. \qquad (1.13')$$

Из формулы (1.13') видно, что любая переменная x_j определяется по формуле

$$x_j = \frac{1}{\Delta}\left(A_{1j} \cdot b_1 + A_{2j} \cdot b_2 + \ldots + A_{jj} \cdot b_j + \ldots + A_{nj} \cdot b_n\right), \text{ т. е. } x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad (1.14)$$

где $\Delta_j = A_{1j} \cdot b_1 + A_{2j} \cdot b_2 + \ldots + A_{jj} \cdot b_j + \ldots + A_{nj} \cdot b_n$ – определитель, полученный из Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Формулы (1.14) называются формулами Крамера.

Пример 1.10. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5. \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

Решение. Матрица A имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Вычислим $\det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, матрица A вырождена и система несовместна, т. е. нет решений.

Пример 1.11. Решить систему $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1. \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$

Решение. $\det A = \Delta_A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -11 & 0 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 33.$

а) Так как $\det A \neq 0$, то матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$ невырожденная и решение системы найдем матричным методом, т. е. по формуле (1.13): $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем обратную матрицу A^{-1}. Составим алгебраические дополнения:

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -16 & A_{12} = 9 & A_{13} = 31 \\ A_{21} = 9 & A_{22} = -3 & A_{23} = -3 \\ A_{31} = 11 & A_{32} = 0 & A_{33} = -11. \end{array}$$

$$C = \left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & -11 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot C = \begin{pmatrix} \frac{-16}{33} & \frac{9}{33} & \frac{11}{33} \\ \frac{9}{33} & \frac{-3}{33} & 0 \\ \frac{31}{33} & \frac{-3}{33} & \frac{-11}{33} \end{pmatrix}.$$

В данном случае матричное равенство (1.13) запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-16}{33} & \frac{9}{33} & \frac{11}{33} \\ \frac{9}{33} & \frac{-3}{33} & 0 \\ \frac{31}{33} & \frac{-3}{33} & \frac{-11}{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{-64}{33} + \frac{9}{33} + \frac{88}{33} = 1 \\ x_2 = \frac{36}{33} - \frac{3}{33} + 0 = 1 \\ x_1 = \frac{124}{33} - \frac{3}{33} - \frac{88}{33} = 1 \end{array}.$$

б) Решим данную систему по формулам Крамера (1.14):

$$\det A = \Delta = 33 \neq 0; \quad x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}.$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -11 & -11 & 3 \\ 12 & 9 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & -11 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} = 33, \quad x_1 = \frac{33}{33} = 1.$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33, \quad x_2 = \frac{33}{33} = 1.$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 33, \quad x_3 = \frac{33}{33} = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

1.1.9. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы

Рассмотрим матрицу $A_{m\times n}$ и выделим в ней произвольно k строк и k столбцов:

$$1 \le k \le \min(m, n).$$

Определитель k-го порядка, составленный из элементов матрицы $A_{m\times n}$, стоящих на пересечении выделенных k строк и k столбцов, называется *минором* k-го порядка этой матрицы и обозначается M_k.

Рангом матрицы $A_{m\times n}$ называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля.

Ранг обозначается любым из символов: r, r_A, $r(A)$, $\mathrm{rang}A$.

Из определения ранга следует:

1) для матрицы $A_{m\times n}$ $0 \le r \le \min(m, n)$.

2) $r = 0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю;

3) для квадратной матрицы n-го порядка $r = n$ тогда и только тогда, когда матрица невырожденная ($\det A_n \ne 0$).

Отметим важное свойство миноров матрицы, которым пользуются при нахождении ранга.

Теорема 1. Если все миноры порядка k данной матрицы равны нулю, то все миноры более высокого порядка равны нулю.

Доказательство этой теоремы следует из теоремы Лапласа (свойство 7).

Свойства ранга матрицы.

1) Ранг матрицы, полученной из данной вычеркиванием какого-либо ряда, равен рангу данной матрицы или меньше его на 1.

2) Ранг матрицы, полученной из данной приписыванием к ней ряда, элементами которого являются произвольные числа, равен рангу исходной матрицы или больше его на 1.

3) Если вычеркнуть из матрицы или приписать к ней нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.

4) Ранг матрицы, полученной из данной транспонированием, равен рангу данной матрицы.

Ранг матрицы обычно находят:

– методом окаймляющих миноров (МОМ);

– методом элементарных преобразований (МЭП).

1) Метод МОМ.

Минор $(k + 1)$ порядка матрицы $A_{m\times n}$ называется окаймляющим для минора M_k, если он содержит все элементы M_k (в любом порядке).

Суть метода МОМ: если какой-нибудь минор $M_k \neq 0$, а все его окаймляющие миноры $M_{k+1} = 0$, то $r(A) = k$.

Пример 1.12. Определить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 1 & 4 & 3 \\ 6 & 8 & 9 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 14 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Решение. Среди элементов матрицы A есть не равные нулю, например, элемент, который находится в левом верхнем углу $\mathrm{M}_1 = 2$. Среди миноров второго порядка, которые окаймляют этот элемент, есть не равные нулю, например, $\mathrm{M}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, следовательно, ранг матрицы равен 2 или больше. Вычисляем окаймляющие миноры для M_2, например, $M_3' = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 14 \end{vmatrix} = 0$, но $M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 51 \neq 0.$

Следовательно, ранг матрицы равен 3 или больше, так как среди миноров третьего порядка есть отличный от нуля.

Вычисляем все окаймляющие миноры для M_3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 4 \\ 6 & 8 & 9 & 1 \\ 4 & 6 & 14 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 & -2 \\ 5 & 4 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 9 & 5 \\ 4 & 6 & 14 & -4 \end{vmatrix}.$$

Все они равны нулю (четвертая строка пропорциональна первой), и поэтому ранг матрицы не равен четырем. Итак, ранг матрицы A равен трем.

2) Метод МЭП.

Рассмотрим метод нахождения ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

Элементарными преобразованиями матрицы называют:

1) умножение некоторого ряда матрицы на число, отличное от нуля;

2) прибавление к одному ряду матрицы другого, параллельного ему ряда, умноженного на произвольное число;

3) перестановку местами двух параллельных рядов.

Если матрица B получена из матрицы A с помощью элементарных преобразований, то матрицы A и B называются эквивалентными, при этом пишут $A \to B$ (или $A \sim B$).

Теорема 2 (об инвариантности ранга). Ранг матрицы, полученной из данной элементарными преобразованиями, равен рангу данной матрицы, т. е. если $A \to B$, то $r(A) = r(B)$.

Суть МЭП состоит в том, что данная матрица A с помощью элементарных преобразований сводится к эквивалентной матрице B трапециевидной (или треугольной) формы.

$$A \to B = \left(\begin{array}{cccc|cc} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2k} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{kk} & \dots & b_{kn} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array}\right).$$

Тогда в силу теоремы 2 $r(A) = r(B)$, а ранг трапециевидной матрицы B равен числу ее ненулевых строк (M_k в левом верхнем углу не равен нулю) и, таким образом, $r(A) = r(B) = k$.

Пример 1.13. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Решение. С помощью элементарных преобразований сведем матрицу к трапециевидной:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 12 & 16 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 12 & 16 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

Произвели следующие преобразования: ко второй строке матрицы A прибавлена первая, умноженная на (–2); к третьей строке прибавлена первая, умноженная на (–11); из четвертой строки вычтена первая, умноженная на 2; из новой третьей строки вычтена новая вторая, умноженная на 4; к четвертой строке прибавлена вторая.

Полученная матрица B имеет ранг равный 2, так как она трапециевидна и имеет две ненулевые строки, следовательно, и ранг матрицы A равен двум.

Пример 1.14. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 10 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 10 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$

Матрица B имеет трапециевидную форму. Минор второго порядка этой матрицы, составленный из элементов первой и второй строк, не равен нулю: например, $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7$. Следовательно, $r(B) = 2$. По теореме 2 $r(B) = r(A) = 2$.

Итак, $r(A) = 2$.

Пример 1.15. Определить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. С помощью элементарных преобразований приведем матрицу A к трапециевидной форме или треугольной. Вычеркнем столбец из нулей. А затем элементы первой строки матрицы умножим на –3, –4 и сложим соответственно с элементами второй и четвертой строки и получим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Из новой второй строки вычтем новую четвертую строку, четвертую строку вычеркнем и получим $\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = B.$

Минор третьего порядка матрицы B

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1(-4)\cdot 5 = -20 \neq 0 \Rightarrow r(B) = 3.$$

По теореме 2 $r(B) = r(A)$. Значит, $r(A) = 3$.

Базисным минором матрицы называется отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу матрицы.

Например, для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ базисный минор имеет вид $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Для ненулевой матрицы существует не единственный базисный минор. Строки и столбцы, на пересечении которых стоят элементы базисного минора, называются базисными.

Если в матрице некоторый ряд может быть представлен в виде суммы k других параллельных ему рядов, умноженных соответственно на числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, то данный ряд является *линейной комбинацией* указанных рядов.

ℓ параллельных рядов матрицы *линейно зависимы*, если хотя бы один из этих рядов является линейной комбинацией остальных. В противном случае параллельные ряды называются *линейно независимыми*.

Теорема (*о базисном миноре*). Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов). Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы.

Теорема. Если ранг матрицы A равен r, то существует r линейно независимых строк (столбцов), от которых линейно зависят все остальные строки (столбцы).

Теорема (*о связи ранга с независимостью рядов*). Максимальное число линейно независимых строк в матрице равно максимальному числу линейно независимых столбцов в этой же матрице и равно ее рангу.

Например, дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, ранг $r(A) = 2$, а один из базисных миноров $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ размещается в первых двух строках. Это означает, что третья строка является линейной комбинацией первой и второй строки. Если $\exists\ \alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = 1$, то (4 4 4) = 1 · (1 2 3) + + 1 · (3 2 1).

1.1.10. Решение произвольных систем. Теорема Кронекера–Капелли

Рассмотрим произвольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Число уравнений может быть и не равно числу неизвестных. Обозначим через A матрицу данной системы, а через $\tilde{A}$ – матрицу, полученную из A присоединением столбца свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn}b_m \end{pmatrix}.$$

Матрица $\tilde{A}$ называется расширенной матрицей системы.

Теорема Кронекера–Капелли (*о совместности системы линейных уравнений*). Для того чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы A равнялся рангу расширенной матрицы $\tilde{A}$.

Теорема. Если ранг матрицы A равен рангу матрицы $\tilde{A}$ и равен числу неизвестных, т. е. $r(A) = r(\tilde{A}) = n$, где n – число неизвестных, то система имеет единственное решение.

Теорема. Если ранг матрицы A равен рангу матрицы $\tilde{A}$, но меньше числа неизвестных, т. е. $r(A) = r(\tilde{A}) < n$, то система имеет бесконечное множество различных решений.

Теорема. Если ранг матрицы A не равен рангу матрицы $\tilde{A}$, то система не имеет решений.

Базисными неизвестными совместной системы, ранг которой равен r, назовем r неизвестных, коэффициенты при которых образуют базисный минор. Остальные неизвестные назовем *свободными*. Так как базисный минор может быть выбран не единственным образом, то и совокупность базисных неизвестных может быть выбрана не единственным образом.

Пример 1.16. Исследовать на совместность и решить следующие системы уравнений:

$$а)\ \begin{cases} 5x+8y+6z=7 \\ 3x+5y+4z=5; \\ 7x+9y+4z=1 \end{cases} \qquad б)\ \begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-x_4=5 \\ 3x_1+x_2+7x_3+2x_4=9 \\ 2x_1+3x_2+4x_3+3x_4=7 \end{cases}.$$

Решение. а) Матрица системы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$.

Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 8 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -4 & -9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & -9 \\ 5 & 8 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \end{array}\right) \to \cdot$$

В матрице $\tilde{A}$ из 3-й строки вычитаем удвоенную 2-ю и ставим полученную строку на 1-е место. Умножаем эту строку на –5, на –3 и складываем результаты соответственно со 2-й и 3-й строкой и получаем

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-4&-9\\0&13&26&52\\0&8&16&32\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-4&-9\\0&1&2&4\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-4&-9\\0&1&2&4\end{array}\right).$$

Так как миноры 2-го порядка, например, $\text{M}=\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0,$ то $r(\tilde{A})=r(A)=2,$ следовательно, система совместна. Число неизвестных системы $n=3,$ $r(A)<n,$ то система имеет бесчисленное множество решений. В качестве базисного минора можно взять, например, $\text{M}=\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}.$

При таком выборе базисного минора базисными неизвестными будут x и y, а свободным – z.

Запишем систему в виде $\begin{cases}x-y-4z=-9\\y+2z=4\end{cases}$ или $\begin{cases}x-y=-9+4z\\y=4-2z\end{cases}.$

Полагая, что $z = c$, по формулам Крамера получим

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-9+4c&-1\\4-2c&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}}=-9+4c+4-2c=2c-5,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&-9+4c\\0&4-2c\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}}=4-2c,$$

где $c\in R.$

Ответ: $x = 2c - 5$, $y = 4 - 2c$, $z = c$, $c\in R.$

б) $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-1\\3&1&7&2\\2&3&4&3\end{pmatrix}$ – матрица системы.

Преобразуем расширенную матрицу, умножив первую строку на –3 и на –2 и сложив с соответствующими элементами второй и третьей строками:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&3&-1&5\\3&1&7&2&9\\2&3&4&3&7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&3&-1&5\\0&7&-2&5&-6\\0&7&-2&5&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&-2&3&-1&5\\0&7&-2&5&-6\\0&0&0&0&-3\end{array}\right).$$

Так как $r(A)=2,\ r(\tilde{A})=3,$ то система несовместна.

1.1.11. Системы линейных однородных уравнений

Рассмотрим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=0\end{cases}. \qquad (1.15)$$

Система (1.15) является частным случаем системы (1.11). Однородная система (1.15) всегда совместна, так как ранг ее матрицы равен рангу расширенной матрицы.

Решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является решением системы (1.15), оно называется нулевым или тривиальным.

Однородная система имеет тривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен числу неизвестных. В частности, когда $m = n$, то для того, чтобы система (1.15) имела только тривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был отличен от нуля.

Если ранг матрицы системы меньше числа неизвестных ($r < n$), то система (1.15) имеет бесчисленное множество решений и решается аналогично неоднородной произвольной системе.

Пример 1.17. Решить систему однородных уравнений

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+4x_4=0\\2x_1+3x_2+2x_3+x_4=0\\3x_1+4x_2+x_3+x_4=0\\x_1+x_2+5x_3+x_4=0\end{cases}.$$

Решение. Найдем ранг матрицы системы, преобразовав матрицу:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 5 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -1 & 4 & -7\\ 0 & -2 & 4 & -11\\ 0 & -1 & 6 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -1 & 4 & -7\\ 0 & 0 & -4 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -1 & 4 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 11\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -1 & 4 & -7\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 11\end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & -1 & 4 & -7\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 11\end{vmatrix}=-22\neq 0\Rightarrow r(A)=4.$$

Так как ранг матрицы системы равен числу неизвестных, то однородная система имеет единственное нулевое решение.

1.1.12. Метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса)

Дана система m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}.$$

Для решения этой системы применим метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных.

С помощью элементарных преобразований над строками система m линейных уравнений с n неизвестными может быть приведена к трапециевидной форме:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_r + c_{1r}x_r + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \quad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2r}x_r + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad c_{rr}x_r + \ldots + c_{rn}x_n = d_r \\ \qquad\qquad\qquad 0 = d_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = d_m \end{cases}, \tag{1.16}$$

где $c_{ii} \neq 0,\ i = \overline{1, r}$.

Система (1.16) эквивалентна исходной системе. Если хотя бы одно из чисел $d_{r+1}, \ldots, d_m$ отлично от нуля, то система (1.16), а следовательно, и исходная система несовместны. Если же $d_{r+1} = \ldots = d_m = 0$, то система совместна и из уравнений (1.16) выражают последовательно, начиная с последнего уравнения, находим последовательно значения неизвестных $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$.

Пример 1.18. Методом Гаусса решить систему $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22. \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

Решение. Производя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, получим

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 12 \\ 1 & -4 & 3 & -22 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 2 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 11 & -1 & 56 \\ 0 & 11 & 11 & 66 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 3 & -22 \\ 0 & 11 & -1 & 56 \\ 0 & 0 & -10 & 10 \end{array}\right).$$

Этой матрице соответствует система $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -22 \\ 11x_2 - x_3 = 56 \\ -10x_3 = 10 \end{cases}.$

Решив эту систему, получим $x_3 = -1$, $x_2 = 5$, $x_1 = 1$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = -1$.

Пример 1.19. Методом Гаусса решить систему $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 2 \\ 4x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}.$

Решение. С помощью элементарных преобразований над строками расширенную матрицу приведем к трапециевидной форме:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -7 & 2 \\ 4 & 6 & -5 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -7 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & -5 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -7 & 2 \\ 0 & 11 & 11 & 0 \\ 0 & 14 & 22 & -8 \\ 0 & 18 & 23 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -7 & 2 \\ 0 & 11 & 11 & 0 \\ 0 & -252 & -396 & 144 \\ 0 & 0 & -74 & 74 \end{array}\right).$$

Этой матрице соответствует система $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -252x_2 - 396x_3 = 144 \\ -74x_3 = 74 \end{cases}$, решив которую получим $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Пример 1.20. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$.

Решение. Производя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 2 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Поскольку $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ и $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$, то $r(A) = 3$, $r(\tilde{A}) = 3$.

Этой матрице соответствует система $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ -4x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_4 = 5 \end{cases}$.

Так как ранги равны, т. е. $r(\tilde{A}) = r(A) < n$, где $n = 4$, то система имеет бесчисленное множество решений.

Данная система эквивалентна преобразованной системе.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -13 \\ -4x_2 + x_3 = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} 5x_2 + x_3 = -13 - 2x_1 \\ -4x_2 + x_3 = 5 \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

За базисные неизвестные примем x_2 и x_3, свободная неизвестная будет x_1.

Полагая, что $x_1 = c$, решим систему по формулам Крамера:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -13-2c & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-13-2c-5}{9} = \frac{-18-2c}{9};$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -13-2c \\ -4 & 5 \end{vmatrix}}{9} = \frac{25-52-8c}{9} = \frac{-27-8c}{9}, \text{ где } c \in R.$$

Итак, $x_1 = c, \quad x_2 = \dfrac{-18-2c}{9}, \ x_3 = \dfrac{-27-8c}{9}, \ x_4 = 5.$

Придавая c различные числовые значения, будем получать различные решения данной системы уравнений.

2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И МЕТОД КООРДИНАТ

2.1. Векторы. Линейные операции над векторами

Величины, которые вполне определяются их числовым значением (время, температура, масса, длина отрезка, площадь, объем и т. д.), называется *скалярными*.

Величины, определяемые не только их числовым значением, но и направлением (сила, скорость, ускорение, напряженность электрического поля и т. д.) называются *векторными*, и для их характеристики служат векторы.

Вектором называется направленный отрезок.

Векторы обозначают одной маленькой или двумя большими буквами: $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$.

Векторы изображаются на чертеже отрезками, снабженными стрелками, указывающими их направление.

Расстояние между началом и концом вектора называется его длиной.

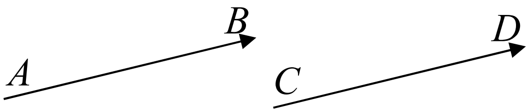
Длина вектора называется его модулем и обозначается $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$.

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают. Обозначают 0. Длина нулевого вектора равна нулю. Векторы, параллельные одной прямой или лежащие на одной прямой, называются *коллинеарными*.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Векторы, расположенные в одной плоскости или параллельные одной и той же плоскости, называются *компланарными*.

Два вектора называются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены, равны по длине: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Из определения равенства векторов следует, что при параллельном переносе вектора получается вектор, равный исходному. Поэтому начало вектора можно помещать в любую точку пространства. Векторы, начало которых можно помещать в любую точку пространства при параллельном переносе, называют *свободными*.

Над геометрическими векторами можно выполнить линейные операции: умножение вектора на число, сложение и вычитание векторов.

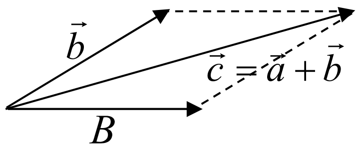
Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на действительное число λ называется вектор $\vec{b}$, который имеет длину, равную длине вектора $\vec{a}$, умноженной на $|\lambda|$, и направлен в одну сторону с $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и в противоположную, если $\lambda < 0$: $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Вектор $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

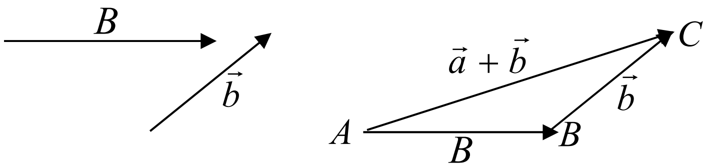
Векторы $\vec{a}$ и $-\vec{a}$ называются *противоположными*.

Вектор, длина которого равна единице, называется единичными или ортом: $\vec{a}^0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

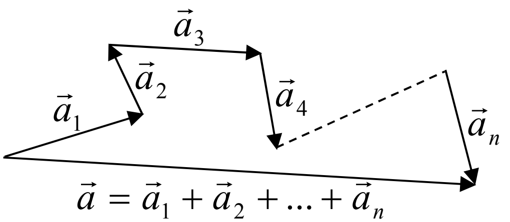
Сложить векторы можно по правилу параллелограмма. Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой третий вектор $\vec{c}$, выходящий из их общего начала, который служит диагональю параллелограмма, сторонами которого являются слагаемые векторы. Сумму обозначают $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



Для нахождения суммы двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ используют правило треугольника: при любой точке A строят вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, тогда вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

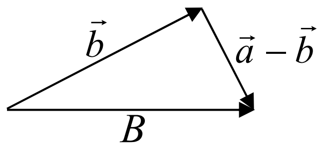


Чтобы построить сумму нескольких векторов $\vec{a}_i \left(i = \overline{1, n} \right)$, достаточно совместить начало каждого последующего вектора $\vec{a}_i$ с концом предыдущего $\vec{a}_{i-1}$ и построить вектор $\vec{a}$, соединяющий начало первого вектора $\vec{a}_1$ с концом последнего вектора $\vec{a}_n$.



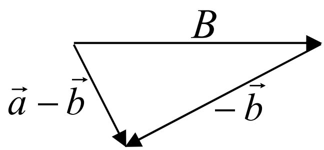
Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{x}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$, т. е. $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$.

Для построения вектора $\vec{a}-\vec{b}$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приводят к общему началу. Тогда вектор, соединяющий конец второго вектора $\vec{b}$ с началом первого вектора $\vec{a}$ есть вектор $\vec{a}-\vec{b}$.



Чтобы из одного вектора вычесть другой, нужно отнести их к общему началу и провести вектор из конечной точки вектора-вычитаемого в конечную точку вектора-уменьшаемого.

Справедливо соотношение $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.



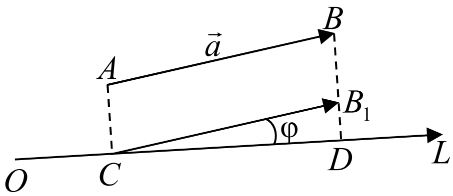
Свойства линейных операций над векторами

1. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.
2. $\alpha(\beta\cdot\vec{a})=(\alpha\cdot\beta)\vec{a}, \quad \forall\alpha,\beta\in R$.
3. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}, \quad \forall\alpha\in R$ (дистрибутивный закон по отношению к умножению на число).
4. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}, \quad \forall\alpha,\beta\in R$.
5. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительный закон).
6. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ (сочетательный закон).
7. $\vec{a}+(-\vec{a})=0$.
8. $\vec{a}+0=\vec{a}$.

2.2. Проекция вектора на ось

Осью называется всякая прямая, на которой указано направление.

Дана ось OL и вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.



Опустим перпендикуляры из точки A и точки B на ось OL и обозначим их основания через C и D.

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось OL называется длина отрезка CD этой оси, заключенного между основаниями перпендикуляров, опущенных из начальной и конечной точек вектора $\vec{a}$, взятая со знаком плюс, если направление отрезка CD совпадает с направлением оси проекции, и со знаком минус, если эти направления противоположны $\text{Пр}_{OL}\vec{a} = CD$.

Углом вектора $\overrightarrow{AB}$ или равного ему вектора $\overrightarrow{CB_1}$ с осью OL называется угол φ, на который нужно повернуть кратчайшим образом ось OL около точки C до совмещения ее с вектором $\overrightarrow{CB_1}$, $0 \le \varphi \le \pi$.

Теорема. Проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью:

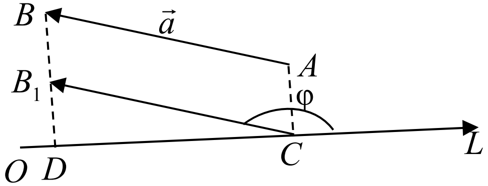
$$\text{Пр}_{OL}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi. \tag{2.1}$$

Доказательство.

а) Пусть φ – острый угол. Из ΔCB_1D находим

$$|CD| = \text{Пр}_{OL}\vec{a} = \left|\overrightarrow{CB_1}\right|\cos\varphi = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi.$$

б) Пусть α – тупой угол.



Из ΔCB_1D находим $\text{Пр}_{OL}\overrightarrow{AB} = -|CD| = -\left|\overrightarrow{CB_1}\right|\cos(\pi - \varphi) = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi.$

Теорема. При умножении вектора $\overrightarrow{AB}$ на число m его проекция на ось умножается на то же число:

$$\text{Пр}_{OL}\vec{a}\cdot m = m\cdot \text{Пр}_{OL}\vec{a}.$$

Теорема. Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме проекций составляющих векторов на ту же ось:

$$\text{Пр}_{OL}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{Пр}_{OL}\vec{a} + \text{Пр}_{OL}\vec{b}.$$

2.3. Линейная зависимость векторов

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие постоянные $C_1, C_2, ..., C_n \in R,$ одновременно не равные 0, такие, что выполняется равенство $C_1\vec{a}_1 + C_2\vec{a}_2 + \ldots + C_n\vec{a}_n = 0.$

В противном случае система векторов будет *линейно независимой*.

В случае линейной зависимости хотя бы один из векторов системы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ является линейной комбинацией остальных векторов системы.

Пусть, например, $C_1 \neq 0,$ тогда $\vec{a}_1 = -\dfrac{C_2}{C_1}\vec{a}_2 - ... - \dfrac{C_n}{C_1}\vec{a}_n.$

Теоремы, устанавливающие условия линейной зависимости векторов на плоскости и в пространстве

Теорема 1. Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы. Два неколлинеарных вектора линейно независимы.

Доказательство. Даны два коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тогда существует единственное число λ, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ или $\vec{b} - \lambda\vec{a} = 0,$ которое и означает линейную зависимость векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пусть теперь два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Предположим, что они линейно зависимы. Тогда существуют такие коэффициенты C_1 и C_2 не равные одновременно нулю, что $C_1\vec{a} + C_2\vec{b} = 0.$

Если, например, $C_1 \neq 0,$ то это означает, что $\vec{a} = -\frac{C_2}{C_1}\vec{b} \Rightarrow \vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны вопреки нашему предположению.

Теорема 2. Три компланарных вектора линейно зависимы. Три некомпланарных вектора линейно независимы.

Теорема 3. Каждые четыре вектора линейно зависимы.

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны, а $\vec{d}$ – произвольный четвертый вектор. Приведем их к общему началу и можно показать, что $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}.$

2.4. Разложение вектора по базису

Базисом на плоскости (в R^2) называют два неколлинеарных вектора на этой плоскости, взятых в определенном порядке.

Базисом в пространстве (в R^3) называют три некомпланарных вектора, взятых в определенном порядке.

Теорема. Если в пространстве R^2 векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ выбраны за базис, то любой с ними компланарный вектор $\vec{a}$ можно представить единственным образом как линейную комбинацию векторов базиса.

Доказательство. На основании теоремы 2 п. 2.3 следует представление вектора $\vec{a}$ в виде линейной комбинации векторов базиса. Предположим, что $\vec{a}$ имеет две различные линейные комбинации векторов базиса:

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2,$$

$$\vec{a} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2.$$

Вычитая почленно равенство второе из равенства первого, получим

$$\vec{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{e}_2.$$

В силу линейной независимости векторов базиса следует, что

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0 \text{ и } \alpha_2 - \beta_2 = 0 \text{ или } \alpha_1 = \beta_1 \text{ и } \alpha_2 = \beta_2.$$

Отсюда следует, что представление $\vec{a}$ по базису $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ в виде $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$ единственно.

Теорема. Если в пространстве R^3 векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ выбраны за базис, то любой вектор $\vec{a}$ пространства можно представить единственным образом как линейную комбинацию векторов базиса:

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3.$$

Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – базис и вектор $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$, то числа α_1, α_2, α_3 называются *координатами вектора* $\vec{a}$ *в данном базисе.*

Обозначение: $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Слагаемые $\alpha_1\vec{e}_1, \alpha_2\vec{e}_2, \alpha_3\vec{e}_3$ называются *компонентами вектора.*

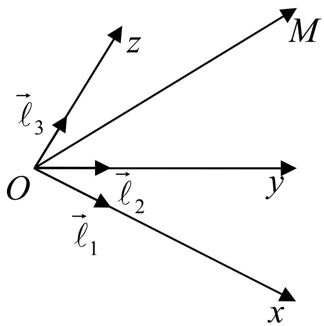
Из представления вектора через его координаты в выбранном базисе и свойств умножения вектора на число и сумму векторов следует, что:

1) при умножении вектора $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ на число $m \in R$ все его координаты умножаются на это число: $m\vec{a} = (m\alpha_1, m\alpha_2, m\alpha_3)$;

2) при сложении (вычитании) $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ складываются (вычитаются) их соответствующие координаты:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \alpha_3 \pm \beta_3).$$

2.5. Декартова система координат. Линейные операции над векторами в координатной форме



Зафиксируем в пространстве точку O и рассмотрим произвольную точку M. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором точки M по отношению к точке O.*

Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность фиксированной точки O и базиса $\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \vec{\ell}_3$. Точка O называется *началом координат*. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются *осями координат*. Прямая Ox называется осью абсцисс, прямая Oy – осью ординат, прямая Oz – осью аппликат.

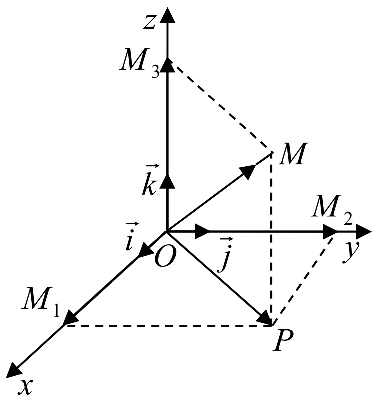
Координаты радиус-вектора точки M по отношению к точке O называются *координатами точки M* в данной системе координат. Первая координата называется абсциссой, вторая – ординатой, третья – аппликатой.

В дальнейшем будем пользоваться декартовой системой координат, когда базисные векторы попарно ортогональны и имеют длину, равную единице. Такой базис называется *ортонормированным.*

Систему векторов ортонормированного базиса в R^3 обозначают через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k},$ а на плоскости в R^2 – через $\vec{i}, \vec{j}$.

Декартова система координат с ортонормированным базисом называется *прямоугольной.*

Рассмотрим прямоугольную декартовую систему координат. Пусть точка M – произвольная точка пространства, $\overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор точки M.



Координаты (проекции на координатной оси) радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ называются координатами точки M. Между точками $M\,(x,\, y,\, z)$ пространства и ее радиус-векторами имеется взаимно-однозначное соответствие:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM};$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{PM};$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}.$$

Разложение радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ по ортам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеет вид

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ или } \overrightarrow{OM} = (x, y, z).$$

Пусть

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k},$$

тогда

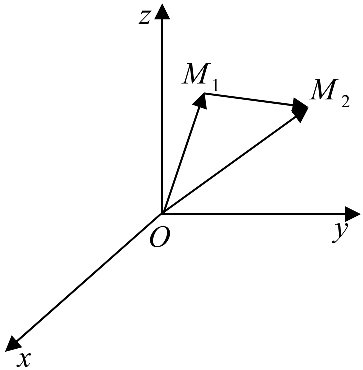
$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k};$$

$$\vec{a}m=mx_1\vec{i}+my_1\vec{j}+mz_1\vec{k},\ \ m\in R.$$

2.6. Нахождение проекций вектора по координатам его начала и конца

Даны две точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1};\ \ \overrightarrow{OM_2}=(x_2,y_2,z_2),\ \ \overrightarrow{OM_1}=(x_1,y_1,z_1),$$



$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).\quad (2.2)$$

Итак, если заданы координаты начала и конца вектора, то, чтобы найти координаты этого вектора, надо из соответствующей координаты его конца вычесть координату начала. Длину вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ можно определить по формуле

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.\qquad (2.3)$$

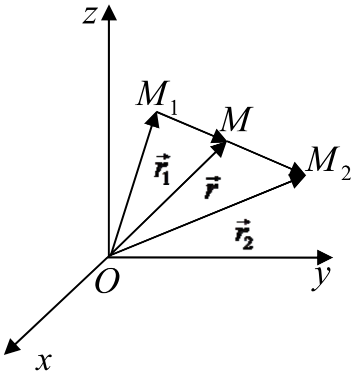
Пример 2.1. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(–2, 3, –4)$, $B(3, 2, 5)$.

Решение. Определим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ = (5, –1, 9). Найдем модуль вектора $\overrightarrow{AB}$: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{25+1+81}=\sqrt{107}.$

2.7. Деление отрезка в данном отношении

Даны точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. На прямой M_1M_2 требуется найти точку $M(x, y, z)$, делящую отрезок M_1M_2 в отношении λ:

$$\lambda=\frac{\overrightarrow{M_1M}}{\overrightarrow{MM_2}}.\qquad (2.4)$$



Из (2.4) получим $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$, где $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1$ и $\overrightarrow{MM_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}$.

Следовательно, $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r})$, $\vec{r}(1+\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2$,

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1+\lambda} \qquad (2.5)$$

или в координатной форме:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (2.5')$$

Формулы (2.5') называются *формулами деления отрезка в заданном отношении.*

Если $\lambda = 1$, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (2.6)$$

Пример 2.2. Центр тяжести однородного стержня находится в точке $M(2, -3, 4)$ и один его конец в точке $A(1, 5, 2)$. Определить координаты точки B другого конца этого стержня.

Решение. Так как стержень однородный, то центр тяжести его находится в точке M (2, –3, 4), делящий этот стержень пополам.

По формулам (2.6) находим координаты точки B:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2};$$

$$x_B = 2 \cdot 2 - 1 = 3; \quad y_B = -6 - 5 = -11; \quad z_B = 8 - 2 = 6.$$

Итак, точка $B(3, -11, 6)$ – второй конец стержня.

2.8. Направление вектора в пространстве

Дан вектор $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.

$$\text{Пр}_{\overline{Ox}}\vec{a} = a_x, \quad \text{Пр}_{\overline{Oy}}\vec{a} = a_y, \quad \text{Пр}_{\overline{Oz}}\vec{a} = a_z.$$

Вектор $\vec{a}$ образует с положительным направлением осей Ox, Oy, Oz углы α, β, γ соответственно.

Известно, что $\text{Пр}_{\overline{OL}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$, где $\varphi = (\vec{a}, \overrightarrow{OL})$.

Итак, $a_x = |\vec{a}|\cos\alpha$, $a_y = |\vec{a}|\cos\beta$, $a_z = |\vec{a}|\cos\gamma$.

Направляющие косинусы имеют вид:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}. \tag{2.7}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{\left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\right)^2} = 1;$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{2.8}$$

Единичный вектор $\vec{a}^0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

$$\vec{a}^0 = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}. \tag{2.9}$$

2.9. Скалярное произведение двух векторов

Углом между двумя векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол между этими векторами, приведенными к общему началу. Обозначение ($\vec{a}$,^$\vec{b}$).

Скалярным произведением двух нулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},^\wedge\vec{b}\right)=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi. \tag{2.10}$$

Из (2.10) следует, что

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}. \tag{2.11}$$

Откуда следует, что $\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$, $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$.

Основные свойства скалярного произведения

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (переместительный закон).

2. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (распределительный закон).

3. $\vec{a}(\lambda\cdot\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})\quad\forall\quad\lambda\in R$ (сочетательный закон относительно числового множителя).

4. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2\to|\vec{a}|^2=\vec{a}^2$.

5. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$ или один из векторов нулевой.

Справедливость свойств вытекает непосредственно из определения (2.10) скалярного произведения.

Так как $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – орты, то согласно свойству 4

$$\vec{i}^{\,2}=1,\ \vec{j}^{\,2}=1,\ \vec{k}^{\,2}=1,$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\ \ \vec{i}\cdot\vec{k}=0,\ \ \vec{j}\cdot\vec{k}=0.$$

Заданы векторы $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

Найдем их скалярное произведение:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=a_x\cdot b_x\vec{i}^{\,2}+a_y\cdot b_x\vec{i}\cdot\vec{j}+a_z\cdot b_x\vec{k}\cdot\vec{i}+$$

$$+a_x\cdot b_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_y\cdot b_y\vec{j}^{\,2}+a_z\cdot b_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_x\cdot b_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_y\cdot b_z\vec{j}\cdot\vec{k}+a_z\cdot b_z\vec{k}^{\,2}$$

или

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z. \qquad (2.13)$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов в ортонормированном базисе равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.

Скалярный квадрат имеет вид $\vec{a}^{\,2}=a_x^2+a_y^2+a_z^2$, откуда длина вектора равна

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \qquad (2.14)$$

Используя формулы (2.10) и (2.11), можно определить косинус угла между векторами и проекцию вектора на направление другого вектора:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}, \qquad (2.15)$$

$$\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (2.16)$$

Скалярное произведение двух векторов имеет механический смысл: если $\vec{F}$ – сила, действующая на материальную точку, а $\vec{S}$ – вектор перемещения, то скалярное произведение векторов $\vec{F}$ и $\vec{S}$ характеризует работу силы на этом перемещении:

$$A=\vec{F}\cdot\vec{S}. \qquad (2.17)$$

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то условие перпендикулярности двух векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0. \qquad (2.18)$$

Если $\vec{a} \| \vec{b}$, то условие коллинеарности (параллельности) двух векторов

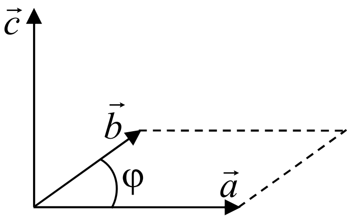
$$\vec{a} = \lambda\vec{b} \Rightarrow (a_x, a_y, a_z) = (\lambda b_x, \lambda b_y, \lambda b_z) \Rightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda. \qquad (2.19)$$

Пример 2.3. Вычислить, какую работу производит сила $\vec{F}$ = (3, 2, 4), когда точка ее приложения перемещается прямолинейно из положения M_1(2, –5, 4) в положение M_2(7, –1, 3).

Решение. Определим вектор перемещения $\vec{S} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ = (5, 4, –1).

Работу найдем по формуле (2.17): $A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 19.$

2.10. Векторное произведение двух векторов



Векторным призведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, который:

1) имеет длину, равную $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \hat{} \, \vec{b})$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) направлен так, что кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ происходит против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\vec{c}$.

В этом случае векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку, в противном случае – тройка левая.

Длина вектора $\vec{c}$: $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \hat{} \, \vec{b})$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Основные свойства векторного произведения

1. Векторное произведение антикоммутативно $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$, так как $\sin(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$ и $\sin(\vec{b},\hat{\ }\vec{a})$ отличаются знаком.

2. Векторное произведение ассоциативно относительно скалярного множителя, т. е. $\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{a},\lambda\vec{b}\right]=\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

3. Векторное произведение дистрибутивно относительно сложения $\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right]$.

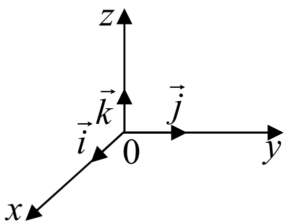
4. Векторное произведение равно 0, если $\vec{a}\,\|\,\vec{b}$ или один из векторов нулевой.

Согласно свойству 4 векторное произведение одноименных ортов $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ равно нулю, т. е.

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0. \qquad (2.20)$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\quad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k};\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i};$$

$$\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i};\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j};\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}. \qquad (2.21)$$



Даны два вектора $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$.

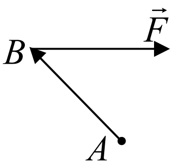
Перемножив их векторно, используя свойства и равенства (2.20) и (2.21), получим

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-$$

$$-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \qquad (2.22)$$

Механический смысл векторного произведения



Пусть точка A твердого тела закреплена, а в его точке B приложена сила $\vec{F}$, тогда возникает вращательный момент или момент силы. По определению момент силы относительно точки A находится по формуле

$$m_A\vec{F}=\overrightarrow{AB}\times\vec{F}. \qquad (2.23)$$

Векторное произведение имеет приложение не только в механике, но и в геометрии.

$$S_{\text{пар.}}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|, \qquad S_{\text{пар.}}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin(\vec{a},\wedge\vec{b}), \qquad S_{\Delta}=\frac{1}{2}S_{\text{пар.}}.$$

Пример 2.4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, где $A(7, 7, 3)$; $B(6, 5, 8)$; $C(3, 5, 8)$.

Решение. $\overrightarrow{AB}=(-1,-2,5)$; $\overrightarrow{AC}=(-4,-2,5)$;

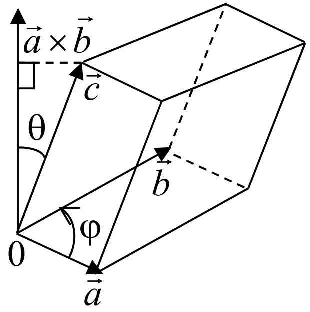
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -2 & 5\\ -4 & -2 & 5\end{vmatrix}=-15\vec{j}-6\vec{k};$$

$$S_{\text{пар.}}=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{225+36}=\sqrt{261}\ (\text{кв. ед.}).$$

2.11. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется число, которое получается скалярным умножением векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на третий вектор $\vec{c}$.

Обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ или $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$, или ($\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}$).



Выясним геометрический смысл смешанного произведения. Пусть $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – некомпланарные векторы. Предположим, что они образуют правую тройку векторов. Приведем эти векторы к общему началу и построим на них параллелепипед.

$\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$ направлены одинаково. $\text{Пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}=H$; $H=\left|\vec{c}\right|\cos\theta$;

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\theta=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\theta=S_{\text{осн.}}\cdot H=V, \quad (2.24)$$

где V – объем параллелепипеда.

Следовательно, смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ численно равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Если $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют левую тройку, то смешанное произведение будет со знаком «–», так как $\text{Пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\vec{c}$ будет отрицательной и поэтому $V_{\text{пар.}}=\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|$.

Итак, смешанное произведение некомпланарных векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Найдем значение смешанного произведения, если векторы заданы в прямоугольной декартовой системе координат:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k};\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k};\quad \vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}.$$

По формуле (2.22) получаем

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}.$$

Полученный вектор умножим скалярно на вектор $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$. Тогда

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = c_x(a_yb_z - a_zb_y) - c_y(a_xb_z - a_zb_x) + c_z(a_xb_y - a_yb_x) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{2.25}$$

Итак, смешанное произведение векторов в координатах равно определителю третьего порядка, у которого элементами строк являются соответственно координаты первого, второго и третьего сомножителей.

Свойства смешанного произведения

1. Круговая перестановка трех сомножителей смешанного произведения не меняет его величины. Перестановка двух соседних сомножителей меняет знак произведения (так как меняются строки определителя (2.25)):

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}.$$

2. $\left(\alpha\vec{a}\right)\vec{b}\vec{c} = \alpha\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$, где $\forall\alpha\in R$.

3. Операции скалярного и векторного умножений в смешанном произведении можно менять местами, т. е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

4. $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\vec{b}\vec{c} = \vec{a}_1\vec{b}\vec{c} + \vec{a}_2\vec{b}\vec{c}$.

5. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Доказательство необходимости. Смешанное произведение трех векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ может обратиться в нуль в следующих случаях:

– если среди множителей есть хотя бы один нулевой вектор;

– если хотя бы два из перемножаемых векторов коллинеарны, например, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{a}\times\vec{b} = 0$, следовательно,

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0.$ Если $\vec{a}$ и $\vec{c}$ или $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, то векторы $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{c}$ и их скалярное произведение $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0;$

– если три вектора $\vec{a},$ $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то в этом случае вектор $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{c}$ и, следовательно, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0.$

Объединяя все три случая можно сказать, что смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0,$ если $\vec{a},$ $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Доказательство достаточности. Пусть

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi|\vec{c}|\cos\theta=0, \tag{2.26}$$

где φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

θ – угол между векторами $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Равенство (2.26) возможно в следующих случаях:

– хотя бы один вектор нулевой, тогда все три вектора компланарны;

– $\sin\varphi=0,$ тогда $\vec{a}\|\vec{b}$ и, следовательно, $\vec{a},$ $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – компланарны;

– $\cos\theta=0,$ тогда $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{c}$ и, следовательно, $\vec{c}$ лежит в одной плоскости с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример 2.5. Проверить, лежат ли точки $A(1, 2, -1)$; $B(4, 1, 5)$; $C(-1, 2, 1)$ и $D\,(2, 1, 3)$ в одной плоскости.

Решение. Точки A, B, C и D будут лежать в одной плоскости при условии, если $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ компланарны:

$$\overrightarrow{AB}=(3,-1,6);\qquad \overrightarrow{AC}=(-2,0,2);\qquad \overrightarrow{AD}=(1,-1,4).$$

Вычислим смешанное произведение

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}3&-1&6\\-2&0&2\\1&-1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1&9\\-2&0&0\\1&-1&5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1&9\\-1&5\end{vmatrix}\neq0,$$

т. е. точки не лежат в одной плоскости.

Пример 2.6. Даны четыре точки: $A(2, -3, 4)$; $B(1, -2, 0)$; $C(4, -5, 4)$ и $D(6, -1, 3)$. Вычислить объем треугольной пирамиды $ABCD$.

Решение.

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар.}}; \quad \overrightarrow{AB} = (-1, 1, -4); \quad \overrightarrow{AC} = (2, -2, 0); \quad \overrightarrow{AD} = (4, 2, -1);$$

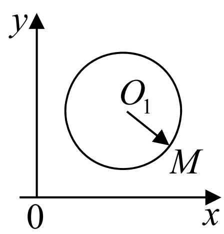
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -48;$$

$$V_{\text{парал.}} = 48; \; V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} \cdot 48 = 8 \text{ (куб. ед.).}$$

3. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

3.1. Понятие об уравнении линии на плоскости и поверхности в пространстве

Предмет аналитической геометрии заключается в исследовании геометрических объектов с помощью аналитических методов, в основе которых лежит метод координат. Сущность этого метода состоит в том, что различным геометрическим объектам сопоставляются некоторым стандартным способом уравнения или системы уравнений, и изучение свойств геометрических объектов сводится к изучению свойств уравнений. Условно 1637 год считают датой рождения аналитической геометрии.



В аналитической геометрии всякую линию рассматривают как множество точек, обладающих каким-то свойством, общим для всех ее точек.

Например, пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат. Рассмотрим окружность радиуса R, центр которой находится в точке $O_1(a, b)$.

$M(x, y, z)$ – произвольная точка, которая принадлежит окружности.

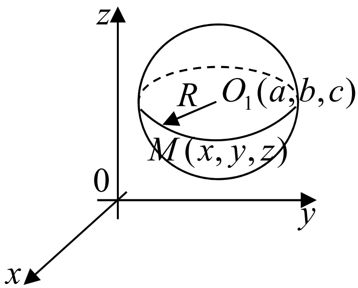
Окружностью называется множество точек плоскости, отстоящих от центра на одно и то же расстояние R.

По условию $\overline{O_1M} = R$ или $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$;

$$(x-a)^2 + (y-b) = R^2 \text{ – уравнение окружности.} \quad (3.1)$$

Уравнением данной линии называется такое уравнение между переменными x и y или ρ и φ, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней.

Обозначение: $F(x, y) = 0$ или $F(\rho, \varphi) = 0$.



Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат сферу радиуса R, центр которой в точке $O_1(a, b, c)$. По определению *сфера* – множество точек, отстоящих от центра на одно и то же расстояние R.

Обозначая через x, y, z координаты произвольной точки M сферы и выражая через них равенство $\left|\overrightarrow{O_1M}\right| = R,$ получим

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$$

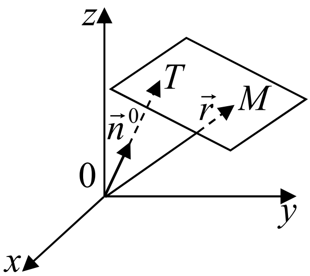
или

$$(x-a)^2 + (y-b) + (z-c)^2 = R^2. \quad (3.2)$$

Это уравнение выполняется для всех точек сферы. В аналитической геометрии всякую поверхность рассматривают как множество точек, обладающих каким-то определенным свойством, общим для всех точек данной поверхности. Уравнение $F(x, y, z) = 0$, выражающее свойство, общее для всех точек данной поверхности, называют *уравнением поверхности*, а x, y, z – *текущими координатами.*

3.2. Плоскость. Нормальное уравнение плоскости

Положение плоскости в пространстве вполне определяется ее расстоянием p от начала координат (т. е. длиной перпендикуляра OT, опущенного из точки O на плоскость) и единичным вектором $\vec{n}^0$, который перпендикулярен к плоскости и направлен от начала координат к плоскости.



Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x, y, z)$. При движении точки M по плоскости ее радиус-вектор $\vec{r}$ меняется так, что

$$\text{Пр}_{\vec{n}^0} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OT} = p. \tag{3.3}$$

Это условие справедливо для всех точек плоскости и нарушается, если точка M не лежит на плоскости.

Используя скалярное произведение, запишем

$$\text{Пр}_{\vec{n}^0} \overrightarrow{OM} = \vec{n}^0 \cdot \overrightarrow{OM} = \vec{r} \cdot \vec{n}^0.$$

Формула (3.3) может быть переписана в виде

$$\vec{r} \cdot \vec{n}^0 - p = 0. \tag{3.4}$$

Это *нормальное уравнение плоскости в векторной форме*.

Перейдем к координатной форме: $\vec{n}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$ и получим *нормальное уравнение плоскости в координатной форме:*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{3.4'}$$

Полученное уравнение есть уравнение первой степени относительно x, y, z, а это значит, что всякая плоскость может быть представлена уравнением первой степени относительно текущих координат.

3.3. Общее уравнение плоскости

Теорема. В пространстве в прямоугольной декартовой системе координат уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3.5}$$

определяет плоскость при условии, что $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Доказательство. Рассматриваем коэффициенты A, B, C как проекции вектора $\vec{n}$ на оси координат $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, $\overrightarrow{Oz}$, а x, y, z – как проекции радиус-вектора $\vec{r}$ точки M: $\vec{n} = (A, B, C)$, $\vec{r} = (x, y, z)$.

Тогда уравнение (3.5) может быть записано в векторной форме:

$$\vec{r} \cdot \vec{n} + D = 0. \tag{3.5'}$$

Покажем, что уравнение (3.5') может быть приведено к уравнению (3.4). Рассмотрим следующие случаи.

1) Пусть $D < 0$, тогда разделив (3.5') на $|\vec{n}|$, получим $\vec{r} \cdot \vec{n}^0 + \dfrac{D}{|\vec{n}|} = 0.$

Обозначив $\dfrac{D}{|\vec{n}|} = -p$, где $p > 0$, будем иметь нормальное уравнение плоскости в векторной форме: $\vec{r} \cdot \vec{n}^0 - p = 0$.

2) Если $D > 0$, то разделив (3.5') на $-|\vec{n}|$, получим $\vec{r} \cdot (-\vec{n}^0) + \dfrac{D}{|\vec{n}|} = 0.$

Обозначим $\dfrac{D}{|\vec{n}|} = p$ и получим нормальное уравнение плоскости: $\vec{r} \cdot (-\vec{n}^0) - p = 0$ (минус указывает, что единичный нормальный вектор $\vec{n}^0$ направлен от начала координат не к плоскости, а в обратную сторону).

3) Если $D = 0$, то (3.5') разделив на $|\vec{n}|$, получим $\vec{r} \cdot \vec{n}^0 = 0$ – нормальное уравнение плоскости, проходящей через начало координат. Таким образом, (3.5') всегда может быть приведено к уравнению

вида (3.4). Но уравнение (3.4) определяет плоскость. Следовательно, уравнение (3.5') и исходное уравнение (3.5) определяют плоскость.

Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ называется *общим уравнением плоскости*.

Из предыдущих рассуждений следует, что $\vec{n} = (A, B, C) \parallel \vec{n}^0 \Rightarrow \vec{n} \perp$ плоскости.

Всякий вектор, отличный от нулевого, перпендикулярный к плоскости, называют *нормальным вектором плоскости*.

Из предыдущих рассуждений следует способ приведения общего уравнения плоскости (3.5) к нормальному уравнению.

Чтобы привести общее уравнение плоскости к нормальному виду, надо его разделить на длину вектора $\vec{n} = (A, B, C)$, взятую со знаком «+», если $D < 0$ и со знаком «–», если $D > 0$.

Пример 3.1. Уравнение $3x + 6y - 2z - 35 = 0$ привести к нормальному виду.

Решение.

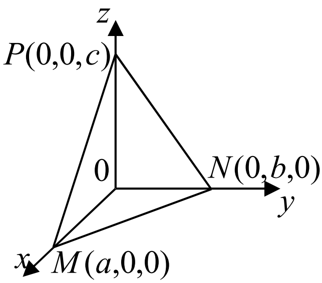
$$\frac{3x + 6y - 2z - 35}{\sqrt{9 + 36 + 4}} = 0; \qquad \frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z - 5 = 0.$$

Частные случаи расположения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$

1. $D = 0$, тогда $Ax + By + Cz = 0$ – плоскость проходит через начало координат.
2. $C = 0$, тогда $Ax + By + D = 0$ – плоскость параллельна оси Oz.
3. $B = 0$, тогда $Ax + Cz + D = 0$ – плоскость параллельна оси Oy.
4. $A = 0$, тогда $By + Cz + D = 0$ – плоскость параллельна оси Ox.
5. $C = 0$, $D = 0$, тогда $Ax + By = 0$ – плоскость проходит через ось Oz.
6. $D = 0$, $B = 0$, тогда $Ax + Cz = 0$ – плоскость проходит через ось Oy.
7. $D = 0$, $A = 0$, тогда $By + Cz = 0$ – плоскость проходит через ось Ox.
8. $B = 0$, $C = 0$, тогда $Ax + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости yOz.
9. $By + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOz.
10. $Cz + D = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOy.
11. $B = C = D = 0$, тогда $x = 0$ – уравнение плоскости yOz.
12. $A = C = D$, тогда $y = 0$ – уравнение плоскости xOz.
13. $A = B = D$, тогда $z = 0$ – уравнение плоскости xOy.

3.4. Уравнение плоскости в отрезках

Дана плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A, B, C, D \neq 0$. Она отсекает на осях координат отрезки, длины которых a, b, c.



Так как точка $M(a, 0, 0) \in$ плоскости, то $Aa + D = 0 \Rightarrow A = -\dfrac{D}{a}$.

Так как точка $N(0, b, 0) \in$ плоскости, то $Bb + D = 0 \Rightarrow B = -\dfrac{D}{b}$.

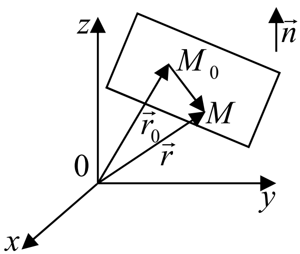
Так как точка $P(0, 0, c) \in$ плоскости, то $Cc + D = 0 \Rightarrow C = -\dfrac{D}{c}$.

Уравнение плоскости в отрезках имеет следующий вид:

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (3.6)$$

3.5. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку

Требуется составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, перпендикулярной к вектору $\vec{n} = (A, B, C)$. Точка $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости.

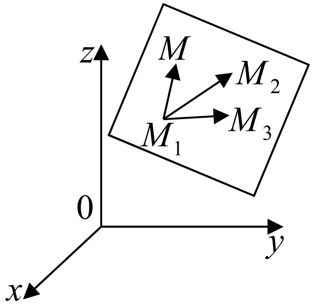


Проведем радиус-вектор точки M и точки M_0: $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$. Так как $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$, то скалярное произведение $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$. Выражая скалярное произведение через координаты векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$, получаем уравнение искомой плоскости

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (3.7)$$

3.6. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Даны три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не принадлежащие одной прямой. Следовательно, эти три точки определяют плоскость, через них проходящую.



Чтобы написать уравнение плоскости, возьмем на ней произвольную точку $M(x, y, z)$, тогда следующие векторы:

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1);$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1);$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) -$$

компланарны.

Следовательно, смешанное произведение этих векторов равно нулю:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.8)$$

3.7. Угол между плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности плоскостей

Даны две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, а следовательно, и их нормальные векторы $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

Один угол между плоскостями φ равен углу между их нормальными векторами. Определим величину φ, используя формулу

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}. \quad (3.9)$$

Другой угол равен $\pi - \varphi$.

Если плоскости параллельны, то

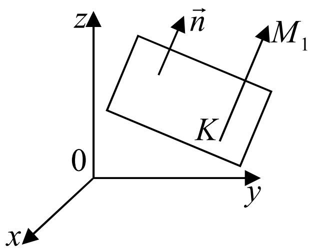
$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ – *условие параллельности двух плоскостей*. (3.10)

Если плоскости перпендикулярны, то

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$ – *условие перпендикулярности двух плоскостей*. (3.11)

3.8. Расстояние от точки до плоскости

Требуется найти расстояние от данной точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.



Опустим из точки M_1 перпендикуляр M_1K на данную плоскость.

Пусть $K(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n} = (A, B, C)$, $d = |KM_1|$.

$$\overline{KM_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0);$$

$$\vec{n} \parallel \overline{KM_1} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overline{KM_1} = \pm|\vec{n}|d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = \pm|\vec{n}|d;$$

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1) - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = \pm|\vec{n}|d;$$

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) - (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = \pm|\vec{n}|d;$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = \pm|\vec{n}|d. \qquad (3.12)$$

Так как точка $K(x_0, y_0, z_0) \in$ плоскости, то $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Из (3.12) получаем

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{|\vec{n}|}\right| \quad \text{или} \quad d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (3.13)$$

Пример 3.2. Найти расстояние от точки $M_1(1, 1, 1)$ до плоскости $x + 2y + z = 3$.

Решение. Уравнение плоскости $x + 2y + z - 3 = 0$ приведем к нормальному виду:

$$\frac{x+2y+z-3}{\sqrt{1+4+1}}=0; \quad d=\frac{|1+2\cdot 1+1-3|}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow$$

точка $M_1(1, 1, 1)$ и начало координат $O(0, 0, 0)$ находятся по разные стороны от плоскости.

3.9. Прямая линия. Прямая в пространстве (R^3) и на плоскости (R^2)

Общее уравнение прямой в пространстве

Пусть даны в прямоугольной декартовой системе координат две непараллельные плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Система уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{3.14}$$

определяет прямую линию в пространстве и называется *общим уравнением прямой*.

Рассмотрим прямую на плоскости xOy ($z = 0$):

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ax+By+D=0 \text{ – общее уравнение прямой на плоскости.} \tag{3.15}$$

$\vec{n}=(A, B)$ – *нормальный вектор прямой*.

Частные случаи расположения прямой на плоскости

$D = 0$, $Ax + By = 0$ – прямая проходит через точку $O(0, 0)$.

$B = 0$, $Ax + D = 0$ – прямая параллельна оси Oy.

$A = 0$, $By + D = 0$ – прямая параллельна оси Ox.
$D = 0$, $B = 0$, $x = 0$ – уравнение оси Oy.
$D = 0$, $A = 0$, $y = 0$ – уравнение оси Ox.

$$\frac{Ax + By + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \text{ – \textit{нормальное уравнение прямой на плоскости.}} \quad (3.16)$$

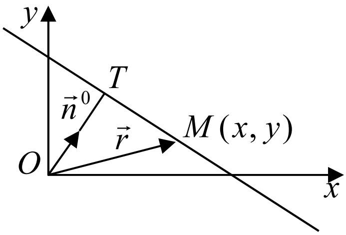
Знак «+» берем, когда $D < 0$ и «–», когда $D > 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ – \textit{уравнение прямой в отрезках}.} \quad (3.17)$$

Рассуждая аналогично как и при выводе нормального уравнения плоскости, получим *нормальное уравнение прямой на плоскости в векторной форме:*

$$\text{Пр}_{\vec{n}^0} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}^0 = p; \qquad \vec{r} \cdot \vec{n}^0 - p = 0. \qquad (3.18)$$

$\vec{n}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta)$ или $\vec{n}^0 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\vec{r} = (x, y)$.



Нормальное уравнение прямой на плоскости в координатной форме

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta - p = 0$$

или

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0. \quad (3.18')$$

Расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + D = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (3.19)$$

Угол между двумя прямыми $A_1x + B_1y + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + D_2 = 0$ можно найти по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}, \tag{3.20}$$

где $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$ – нормальные векторы данных прямых.

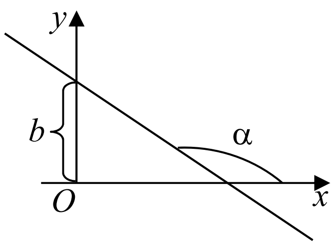
$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{3.20'}$$

Условие параллельности прямых можно записать в виде

$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \tag{3.21}$$

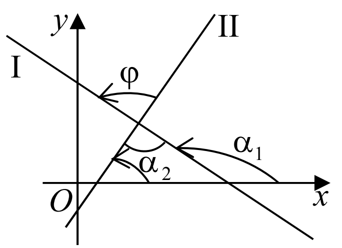
Условие перпендикулярности прямых:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{3.22}$$



$y = kx + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом, где $k = \mathrm{tg}\alpha$ – угловой коэффициент прямой, α – угол наклона прямой к оси Ox положительного направления, b – начальная ордината, т. е. величина отрезка, отсекаемого прямой от оси Oy.

Пример 3.3. Найти угол φ между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.
Решение. По условию $k_1 = \mathrm{tg}\alpha_1$, $k_2 = \mathrm{tg}\alpha_2$.



$$\alpha_1 = \alpha_2 + \varphi; \quad \varphi = \alpha_1 - \alpha_2;$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \mathrm{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1 - \mathrm{tg}\,\alpha_2}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha_1 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha_2};$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}. \tag{3.23}$$

Если прямые перпендикулярны, то tgφ не существует, следовательно, $1+k_1k_2=0 \Rightarrow k_1\cdot k_2=-1$.

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$k_1=-\frac{1}{k_2}. \qquad (3.24)$$

Если прямые параллельны, то tgφ = 0, следовательно,

$k_1=k_2$ *– условие параллельности двух прямых.* (3.25)

Пример 3.4. Найти угол между прямыми $y = 2x + 3$ и $y = -3x + 5$.

Решение. $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{-3-2}{1-2\cdot 3}=1,\ \ \varphi=45°.$

Пусть прямая не параллельна оси Oy, задана точкой $M_0(x_0, y_0)$ и угловым коэффициентом k. Уравнение прямой можно записать как $y = kx + b$. Так как точка M_0 лежит на прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой $y_0 = kx_0 + b \Rightarrow b = y_0 - kx_0$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом:

$$y = kx + y_0 - kx_0 \quad \text{или} \quad y - y_0 = k(x - x_0). \qquad (3.26)$$

Если прямая параллельна оси Oy и проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, то ее уравнение $x = x_0$.

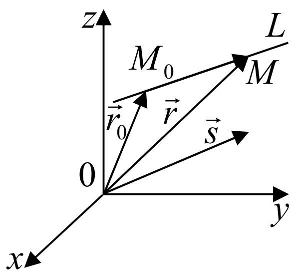
Векторно-параметрическое уравнение прямой (R^3 и R^2)

Положение прямой в пространстве вполне определено, если задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ этой прямой и вектор, отличный от нулевого, $\vec{s}=(m, n, p)$, которому прямая параллельна.

Вектор $\vec{s}$, который лежит на прямой или параллелен прямой, называется *направляющим вектором прямой*.

На прямой L возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$. $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ – радиус-векторы соответственно точек M_0 и M.

Так как $\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{s}$, то $\overrightarrow{M_0M}=t\cdot\vec{s}\ \ \forall\, t\in R$.



Если $\overrightarrow{M_0M} \uparrow\uparrow \vec{s}$, то $t > 0$. Если $\overrightarrow{M_0M} \uparrow\downarrow \vec{s}$, то $t < 0$.

Векторно-параметрическое уравнение прямой в R^3 (*или R^2*): $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$;

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{s}$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}. \tag{3.27}$$

Если $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{s} = (m, n, p)$, то *параметрические уравнения прямой в R^3*:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt. \\ z = z_0 + pt \end{cases} \tag{3.28}$$

Параметрические уравнения прямой в R^2:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}. \tag{3.28'}$$

Если в формулах (3.28), (3.28') исключить параметр t, то получим *канонические уравнения прямой R^3 и R^2*:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}; \tag{3.29}$$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{3.29'}$$

m, n, p одновременно нулю не равны.

Угол между прямыми $\dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$, $\dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$ можно найти по следующим формулам:

– для R^3

$$\cos\varphi = \cos(\vec{s}_1, ^\wedge \vec{s}_2) = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}; \quad (3.30)$$

– для R^2

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (3.30')$$

Условием параллельности двух прямых является $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$, т. е.

$$\vec{s}_1 = \lambda \vec{s}_2 \quad \text{или} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \ \left(\text{для } R^2 \ \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}\right). \qquad (3.31)$$

Условие перпендикулярности двух прямых $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$ или

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \ (\text{для } R^2 \ m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0). \qquad (3.32)$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Искомая прямая проходит через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. За направляющий вектор прямой примем вектор $\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, а за фиксированную точку прямой возьмем любую точку M_1 или M_2. Данные подставим в уравнение (3.29) и получим уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (3.33)$$

Для R^2

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (3.33')$$

Расстояние от точки M_0 до прямой L находится по формуле

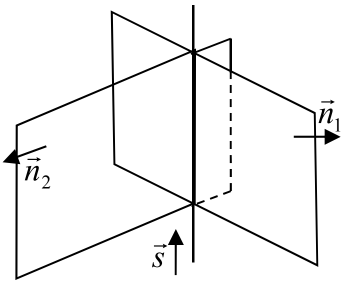
$$d = \frac{\left|\overrightarrow{NM_0} \times \vec{s}\right|}{|\vec{s}|}, \quad N \in L. \tag{3.34}$$

Приведение общего уравнения прямой к каноническому виду

Для того, чтобы привести общее уравнение прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

к каноническому виду, нужно определить координаты какой-либо точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на прямой, и координаты направляющего вектора $\vec{s}$ прямой. Для определения координат точки M_0 нужно дать произвольное числовое значение одной из искомых координат, а затем из системы уравнений (3.14) найти соответствующие значения двух других. Так как прямая – линия пересечения двух плоскостей, то она перпендикулярна к $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. В качестве направляющего возьмем вектор $\vec{s}$.



$\vec{s} \perp \vec{n}_1$, $\vec{s} \perp \vec{n}_2$, следовательно, $\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

где $m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$; $n = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$; $p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$.

Пример 3.5. Найти каноническое уравнение прямой $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$.

Решение. Полагая, например, $x = 0$, из данных уравнений получаем систему $\begin{cases} -3y - 3z = 9 \\ -2y + z = -3 \end{cases}$, решая которую, находим $y = 0$, $z = -3$. Одна из точек, принадлежащих прямой, имеет координаты (0, 0, –3).

Найдем направляющий вектор прямой. Имеем $\vec{n}_1 = (2, -3, -3)$; $\vec{n}_2 = (1, -2, 1)$.

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}.$$

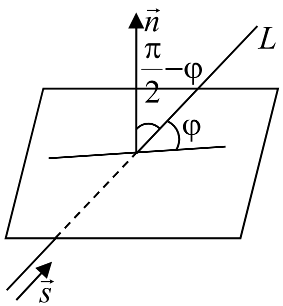
Следовательно, каноническое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x}{-9} = \frac{y}{-5} = \frac{z+3}{-1} \quad \text{или} \quad \frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z+3}{1}.$$

Угол между прямой и плоскостью

Дана плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$.

Углом между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|}$$

или

$$\sin\varphi = \frac{|A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \quad (3.35)$$

так как $\sin\varphi \geq 0$.

3.10. Взаимное расположение прямой и плоскости

Рассмотрим плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямую $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$.

Условие параллельности прямой и плоскости: $\vec{s} \perp \vec{n}$, т. е. $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$ или

$$Am + Bn + Cp = 0. \tag{3.36}$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости: $\vec{s} \,||\, \vec{n}$, т. е.

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \tag{3.37}$$

Для определения общих точек прямой и плоскости нужно данные два уравнения решить совместно, положив, что $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t$, тогда уравнение прямой из канонического вида запишем в параметрическом: $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt. \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

Найденные выражения подставим в уравнение плоскости и получим

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + (Am + Bn + Cp)t = 0. \tag{3.38}$$

Возможны три случая:

1) если $Am + Bn + Cp \neq 0$, тогда $t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$ имеет определенное конечное значение.

Подставив это значение t в параметрические уравнения прямой, получим единственную точку пересечения прямой с плоскостью;

2) если $Am + Bn + Cp = 0$, то $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, тогда уравнение (3.38) не имеет решения (так как $Am + Bn + Cp = 0$, то прямая

параллельна плоскости, а точка (x_0, y_0, z_0), через которую проходит прямая, лежит вне плоскости, так как $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, следовательно, прямая не имеет общих точек с плоскостью);

3) если $Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то прямая лежит в плоскости.

Пример 3.6. Даны точки $A(5, 3, 1)$, $B(4, 5, 1)$, $C(3, -2, -5)$, $D(7, 6, -1)$. Найти уравнение плоскости ABC, длину высоты, опущенной из точки D, и точку пересечения высоты с плоскостью.

Решение. Найдем уравнение плоскости ABC, применяя формулу (3.8):

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-3 & z-1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -5 & -6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-5)(-12) - 6(y-3) + 9(z-1) = 0;$$

$$-12x - 6y + 9z + 69 = 0;$$

$$4x + 2y - 3z - 23 = 0.$$

Длину высоты, опущенную из точки D на плоскость ABC, определим по формуле (3.13):

$$d = \frac{|4 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 - 23|}{\sqrt{16+4+9}} = \frac{20}{\sqrt{29}}.$$

Найдем уравнение высоты, опущенной из точки D на плоскость ABC, используя формулу (3.29):

$$\frac{x-7}{4} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+1}{-3}.$$

Чтобы найти точку пересечения высоты, опущенной из точки D, и плоскости ABC, перейдем к параметрическим уравнениям прямой:

$x = 4t + 7,\quad y = 2t + 6,\quad z = -3t - 1.$ Найденные выражения подставим в уравнение плоскости ABC и получим

$$4(4t+7)+2(2t+6)-3(-3t-1)-23=0;$$

$$16t+28+4t+12+9t+3-23=0,\quad t=-\frac{20}{29}.$$

Подставив значение $t=-\frac{20}{29}$ в параметрические уравнения прямой, получим единственную точку пересечения прямой с плоскостью:

$$x=-\frac{80}{29}+7=\frac{123}{29};$$

$$y=-\frac{40}{29}+6=\frac{134}{29};$$

$$z=\frac{60}{29}-1=\frac{31}{29}.$$

Ответ. $4x+2y-3z-23=0;\ \frac{20}{\sqrt{29}};\ (\frac{123}{29},\ \frac{134}{29},\ \frac{31}{29}).$

3.11. Кривые 2-го порядка

Уравнение 2-й степени относительно x и y имеет вид

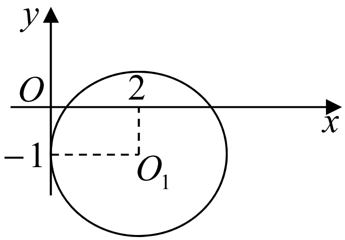
$$Ax^2+2Byx+Cy^2+2Dx+2Ey+N=0,$$

где хотя бы один из коэффициентов A, B или C отличен от нуля.

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ – каноническое уравнение окружности. Преобразуем уравнение: $x^2-2ax+y^2-2by+a^2+b^2-R^2=0.$ И обозначив $-2a=2D,\quad -2b=2E,\quad a^2+b^2-R^2=N,$ получим $x^2+y^2+2Dx+2Ey+N=0.$

Уравнение окружности есть уравнение второй степени относительно x и y, но не всякое уравнение второй степени определяет окружность.

Для того, чтобы уравнение второй степени определяло окружность необходимо: 1) $A = C$; 2) $B = 0$.



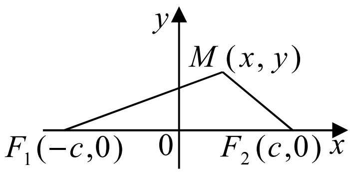
Пример 3.7. Выяснить, является ли уравнение $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ уравнением окружности. Если да, то построить ее.

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду: $(x-2)^2+(y+1)^2=4$; $O_1(2; -1)$; $R = 2$.

Замечание. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$ – параметрические уравнения окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$ (большая, чем расстояние между фокусами).



Фокусы обозначены буквами F_1 и F_2. Расстояние между ними обозначено через $2c$. Начало координат прямоугольной декартовой системы координат находится в середине отрезка F_1F_2. Для вывода уравнения возьмем произвольную точку $M(x, y)$, лежащую на эллипсе. Из определения эллипса следует, что $|F_1M|+|F_2M|=2a.$ Очевидно, что расстояние $2a > 2c$, т. е. $a > c$.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a;$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2};$$

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2;$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4xc; \qquad a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+xc;$$

$$a^2(x^2+2xc+c^2+y^2)=a^4+2a^2xc+x^2c^2$$

или

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Так как $a>c$, то $a^2-c^2>0$. Обозначим, что $a^2-c^2=b^2$, тогда $x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2$. Разделив на a^2b^2, получим

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ – \textit{каноническое уравнение эллипса}.} \tag{3.39}$$

Исследование формы эллипса по его каноническому уравнению

1) *Симметрия*. Так как уравнение (3.39) содержит только квадраты текущих координат, т. е. эллипсу принадлежат точки (x, y); $(-x, y)$; $(-x, -y)$; $(x, -y)$, то эллипс симметричен относительно координатных осей. Оси координат являются осями симметрии эллипса. Точка пересечения осей симметрии называется центром симметрии (начало координат). Ось симметрии эллипса, на которой расположены фокусы, называется *фокальной*.

2) Точки пересечения эллипса с осями симметрии называются его *вершинами*.

Найдем точки пересечения эллипса с осью Ox, положив $y = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x=\pm a.$$

Эллипс пересекается с осью Ox в двух точках: $A_1(-a;\ 0)$, $A_2(a;\ 0)$.

Точки пересечения эллипса с осью Oy: $B_1(0; b)$; $B_2(0; -b)$, так как

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y=\pm b.$$

Отрезок $A_1A_2 = 2a$ – большая ось эллипса, $B_1B_2 = 2b$ – малая ось эллипса ($a > b$), a – большая полуось эллипса, b – малая полуось эллипса.

Отрезок $F_1F_2 = 2c$ называется фокусным расстоянием.

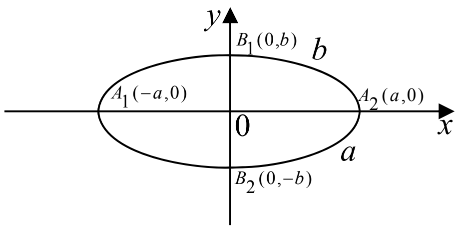
Так как $a^2 - c^2 = b^2$, то $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

3) Форма эллипса.

Из уравнения (3.39) следует, что $\dfrac{x^2}{a^2} \le 1 \Rightarrow |x| \le a$ или $-a \le x \le a$.

$\dfrac{y^2}{b^2} \le 1$ или $-b \le y \le b$. Следовательно, эллипс расположен в прямоугольнике, образованном прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$.

Так как эллипс симметричен относительно координатных осей, то достаточно исследовать его форму для положительных x и y ($x > 0$, $y > 0$, точки находятся в I четверти).



Решив уравнение эллипса относительно y и взяв только со знаком плюс, получим $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

С увеличением x от 0 до a y уменьшается от b до 0.

Получив эту линию в первой четверти и достроив симметрично относительно координатных осей во всех остальных четвертях, получим линию эллипса. Кривая замкнутая.

Эксцентриситетом ε называется отношение расстояния между фокусами к длине большой оси эллипса. $\varepsilon=\dfrac{2c}{2a}$, $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ и так как $a >$ c, то $\varepsilon<1$.

Замечание.

1) Если в уравнении эллипса $a = b$, то это будет окружность. Следовательно, окружность – частный случай эллипса. Для окружности $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 0$, а это значит, что $\varepsilon = 0$ для окружности.

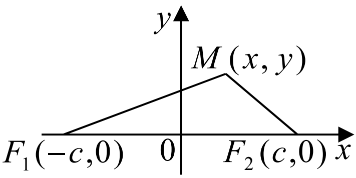
Следовательно, для эллипса $0 \le \varepsilon < 1$.

2) $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}$. Центр этого эллипса в точке $O_1(\alpha, \beta)$.

3) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ параметрические уравнения эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$, меньшая расстояния между данными точками и отличная от нуля.



$M(x, y)$ – произвольная точка гиперболы.

$2a < 2c$, $a < c$.

Из определения следует, что

$$\big||F_1M| - |F_2M|\big| = 2a,$$

$$|F_1M| - |F_2M| = \pm 2a$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Освобождаясь от радикалов, получим $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$.

Так как для гиперболы $c > a$, то $c^2 - a^2$ положительна.

Полагая, что $c^2 - a^2 = b^2$, получаем *каноническое уравнение гиперболы:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3.40)$$

Исследование гиперболы по ее каноническому уравнению

1) *Симметрия.* Так как x и y входят в (3.40) только в квадратах, то гипербола как и эллипс симметрична относительно осей координат. Оси координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат – центром симметрии. Точка пересечения осей симметрии называется *центром гиперболы.* Ось симметрии гиперболы, на которой распологаются фокусы, называется *фокальной.* Для гиперболы (3.40) фокальной плоскостью является ось Ox.

2) Точки пересечения гиперболы с осями симметрии называются *вершинами гиперболы*. Найдем их:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm a.$$

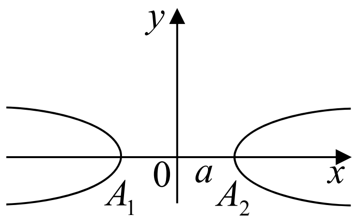
Точки $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$ являются вершинами гиперболы, а точек пересечения с осью Oy не имеет, так как

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2} \neq 1.$$

Расстояние $A_1A_2 = 2a$ – действительная ось гиперболы; a – действительная полуось гиперболы; ось Oy – мнимая; b – мнимая полуось гиперболы.

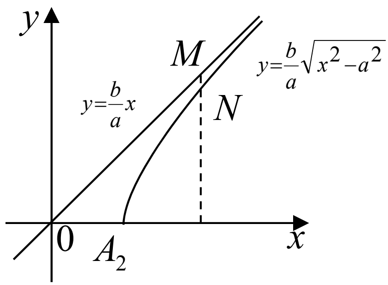
3) *Форма гиперболы.* Так как гипербола – кривая симметричная, то исследуем ее форму только для положительных x и y ($x > 0$, $y > 0$). Из уравнения (3.40) получаем $\dfrac{x^2}{a^2} = 1 + \dfrac{y^2}{b^2} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} \geq 1;\ \left|\dfrac{x}{a}\right| \geq 1;\ x \geq a.$

Если x изменяется от a до ∞, то $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ изменяется от 0 до ∞.



4) *Асимптоты гиперболы.*

Прямая называется асимптотой кривой, если точка кривой при удалении в бесконечность неограниченно приближается к данной прямой.



Гипербола имеет две асимптоты, уравнения которых $y=\pm\frac{b}{a}x.$

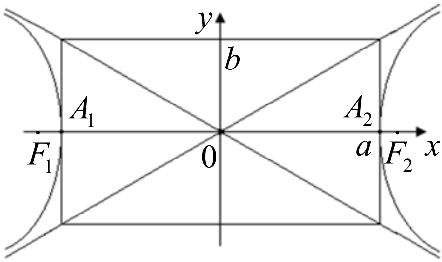
Покажем, что уравнение асимптот гиперболы $y=\pm\frac{b}{a}x.$

На кривой и на асимптоте возьмем точки с одинаковыми абсциссами, тогда

$$|MN|=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

При $x\to\infty$ $|MN|\to 0,$ отсюда следует, что точка N, двигаясь по гиперболе в первой четверти, удаляется в ∞, а ее расстояние до прямой $y=\frac{b}{a}x$ уменьшается и стремится к 0.

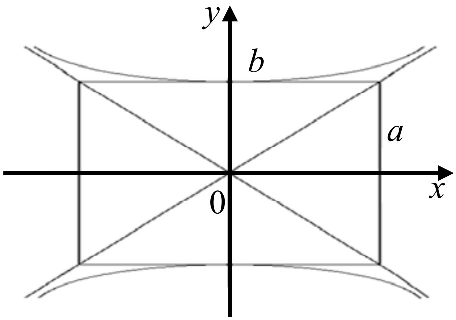
Асимптоты гиперболы располагаются по диагоналям прямоугольника, одна сторона которого параллельна оси Ox и равна $2a$, а другая – параллельна оси Oy и равна $2b$, а центр лежит в начале координат.



Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \dfrac{c}{a} > 1$ так как $c > a$.

Замечание.

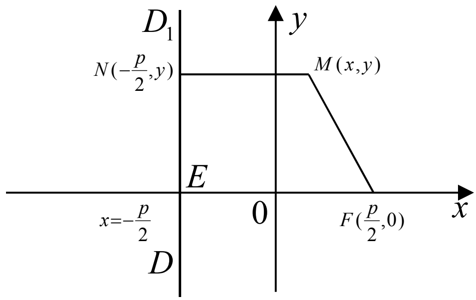
1) Если действительной осью является ось Oy, то уравнение гиперболы имеет вид $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$.



$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1$$
– уравнения гипербол с центром симметрии в точке $O_1(\alpha, \beta)$.

Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки F, называемой фокусом, и данной прямой DD_1, называемой *директрисой*.



$M(x, y)$ – произвольная точка параболы.

$EF = p$ – расстояние от фокуса до директрисы, $p > 0$.

Точка E – точка пересечения оси абсцисс с директрисой.

NM – расстояние от точки M до директрисы.

По определению $MN = MF$.

$$\sqrt{(-\frac{p}{2} - x)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{(\frac{p}{2} - x)^2 + (0 - y)^2}$$

или

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} + px + x^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - px + x^2 + y^2}.$$

Избавляясь от радикалов, получим каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px. \qquad (3.41)$$

Исследование формы параболы по ее каноническому уравнению

1) *Симметрия*.

Так как y входит в (3.41) в квадрате, то x неотрицательно, т. е. все точки параболы лежат справа от оси Oy; каждому значению x соответствует два значения y, следовательно, график симметричен относительно оси Ox.

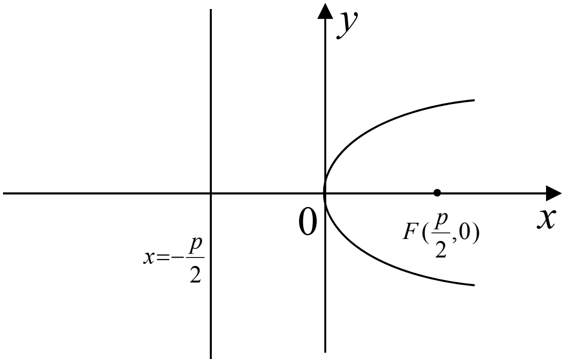
Ox – ось симметрии.

2) Точка пересечения параболы с осью симметрии называется ее вершиной. Точка $O(0, 0)$ – вершина параболы.

Из уравнения (3.41) можно получить $y = \pm\sqrt{2px}$.

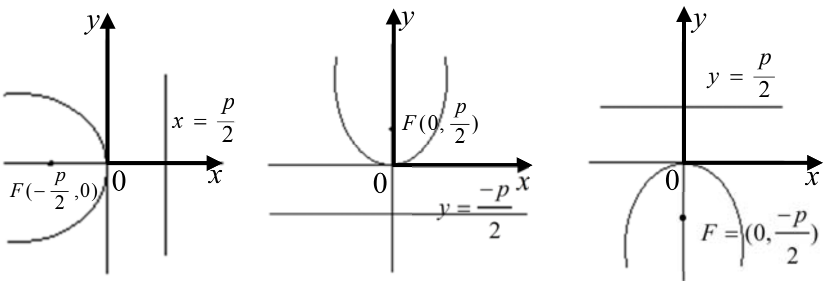
Рассмотрим ту часть параболы, которая лежит в первой четверти, т. е. $y = \sqrt{2px}$.

Так как $p > 0$ и $x > 0$, то с изменением x от 0 до ∞ y изменяется от 0 до ∞.



Эксцентриситет для параболы $\varepsilon = 1$.

Различные положения параболы относительно осей координат



Замечание.

1) $y^2 = \pm 2px$, $x^2 = \pm 2py$ – уравнения парабол, вершина которых находится в начале координат.

2) $(y-\beta)^2 = \pm 2p(x-\alpha)$, $(x-\alpha)^2 = \pm 2p(y-\beta)$ – уравнения парабол, вершины которых находятся в точке $O_1(\alpha, \beta)$.

3) Рассмотрим уравнение второй степени относительно x и y:

$$Ax^2 + 2Byx + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + N = 0.$$

Составим определитель Δ и главный минор Δ' определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & N \end{vmatrix}; \quad \Delta' = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

I. Если $\Delta \neq 0$, то кривая невырожденная:

1) при $\Delta' > 0$ – эллипс;
2) $\Delta' < 0$ – гипербола;
3) $\Delta' = 0$ – парабола.

II. Если $\Delta = 0$, то кривая вырожденная (прямая, точка). Возможны случаи, когда уравнению (3.38) никакая линия не соответсвует.

Пример 3.8. Назвать и построить кривую $9x^2 - 16y^2 + 64y - 18x - 199 = 0$.

Решение. Найдем $\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -9 \\ 0 & -16 & 32 \\ -9 & 32 & -199 \end{vmatrix} > 0$, кривая невырожденная

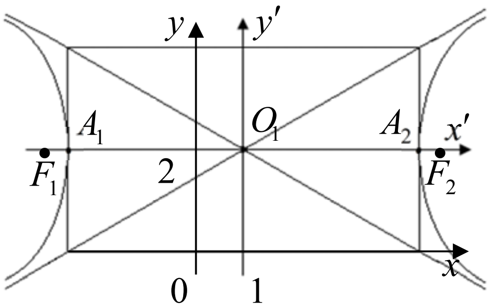
$\Delta' = \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -16 \end{vmatrix} < 0$, кривая гипербола.

Для приведения данного уравнения к каноническому виду перепишем его следующим образом: $9(x^2 - 2x) - 16(y^2 - 4y) - 199 = 0$. Выделяя полные квадраты, получим $9(x-1)^2 - 16(y-2)^2 = 144$ и разделив левую и правую часть равенства на 144, получим каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$

Центр гиперболы в точке $O_1(1, 2)$, $a = 4$, $b = 3$.

$$c^2 = a^2 + b^2; \quad c^2 = 25; \quad c = 5.$$



3.12. Поверхности 2-го порядка

Множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Kxy + 2Qxz + 2Nyz + 2Hx + 2Ey + 2Fz + D = 0$$

называется *поверхностью 2-го порядка*.

Будем рассматривать поверхности 2-го порядка, где нет произведения текущих координат:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Hx + 2Ey + 2Fz + D = 0. \qquad (3.42)$$

В аналитической геометрии можно решить две задачи.

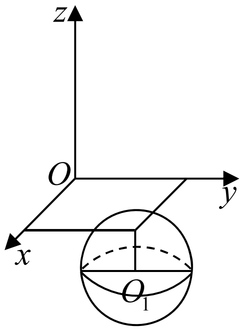
1) Дана поверхность как множество точек. Необходимо составить уравнение этой поверхности. Например, составить уравнение сферы (3.2):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

2) Дано уравнение поверхности. Нужно исследовать форму поверхности, изображаемой этим уравнением, т. е. построить поверхность.

Пример 3.9. Назвать и построить поверхность

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z + 5 = 0.$$



Решение. Запишем уравнение поверхности в каноническом виде. После выделения полных квадратов данное уравнение примет вид

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9.$$

Это уравнение сферической поверхности. Центр сферы находится в точке $O_1(2,\ 3,\ -1)$ и $R = 3$.

Цилиндрическая поверхность

Положим, что уравнение $F(x, y, z) = 0$ не содержит переменной z, т. е. $F(x, y) = 0$.

На плоскости xOy уравнение изображает некоторую линию L. Но этому уравнению будут удовлетворять также координаты всех тех точек пространства, у которых первые две координаты совпадают с координатами любой точки линии L, т. е. тех точек пространства, которые проектируются на плоскость xOy в точки линии L.

Совокупность таких точек есть поверхность, описанная прямой, параллельной оси Oz и пересекающей линию L. Такую поверхность называют *цилиндрической*.

Линия L называется ее направляющей, а всевозможные положения движущейся прямой, параллельной оси Oz, называется *образующими*.

Итак, уравнение $F(x,y)=0$ в пространстве изображает цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси Oz.

$F(y, z) = 0$ – цилиндр с образующими параллельными оси Ox.

$F(x, z) = 0$ – цилиндр с образующими параллельными оси Oy.

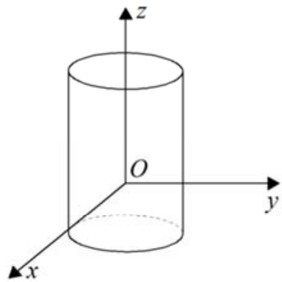
Всякую линию в пространстве можно рассматривать как пересечение двух поверхностей:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0; \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$$

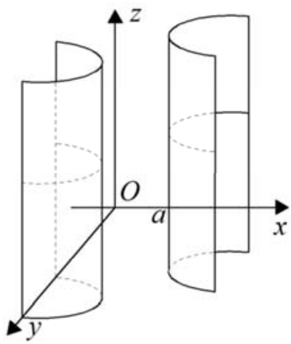
Возьмем за направляющие цилиндрических поверхностей различные кривые 2-го порядка, лежащие в плоскости xOy, и принимая направление оси Oz за направление образующих этих цилиндров, получаем уравнения следующих цилиндрических поверхностей:

1) эллиптический цилиндр:

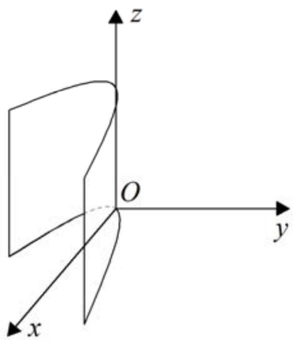
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (осью цилиндра служит ось Oz;



2) гиперболический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$



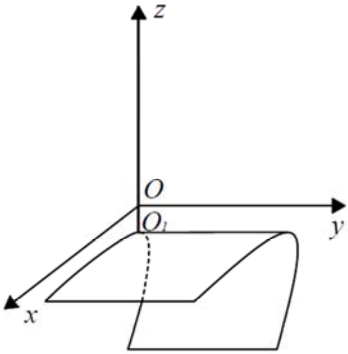
3) параболический цилиндр: $y^2 = 2px$ ($p > 0$);



4) круговой цилиндр: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Пример 3.10. Назвать и построить поверхность $z^2+2z-4x+1=0$.

Решение. $(z+1)^2=4x$; $O'(0, 0, -1)$.

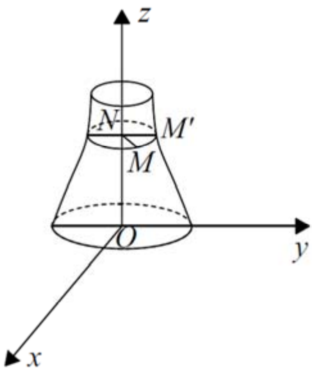


Поверхности вращения

Поверхностью вращения называют поверхность, образованную вращением некоторой кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости.

Пусть в плоскости yOz дана линия L, имеющая уравнение: $F(Y, Z)=0$. Найдем уравнение поверхности, полученной от вращения этой линии вокруг оси Oz.

Возьмем на поверхности точку $M(x, y, z)$ и проведем через нее плоскость, перпендикулярную оси вращения.



N и M' – точки пересечения плоскости с осью вращения Oz и данной линией L. Точки N, M, M' имеют одинаковое z. Точка $N(0, 0, z)$.

$r=|NM|=\sqrt{x^2+y^2}$ – радиус окружности, получившейся в сечении поверхности плоскостью. С другой стороны, так как точка M' лежит одновременно и на L, и на окружности сечения, то $r=|NM|$ равен абсолютной величине ординаты точки M':

$$Y=\pm\sqrt{x^2+y^2}, \qquad Z=z.$$

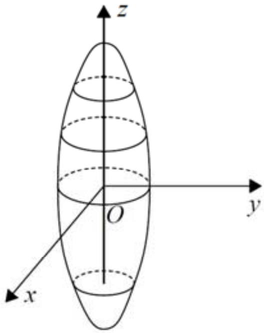
Тогда искомая поверхность имеет уравнение

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},\, z)=0.$$

Итак, чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением линии L, лежащей в плоскости yOz, вокруг оси Oz, нужно в уравнении этой линии заменить Y на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, а z оставить без изменения.

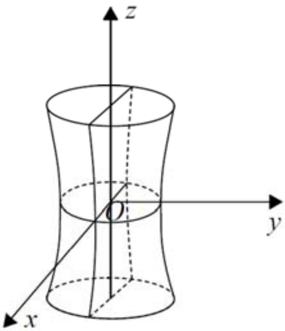
Найдем уравнения поверхностей, образованных вращением кривых 2-го порядка вокруг их осей симметрии. Кривые будем располагать в плоскости yOz, за ось вращения примем ось Oz.

1. *Эллипсоид вращения.*



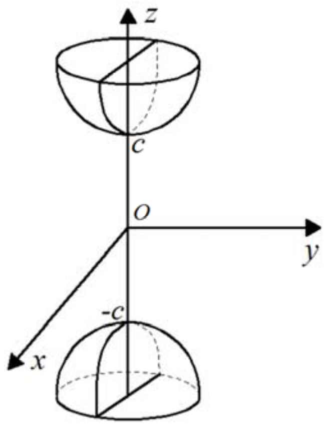
Возьмем эллипс $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ и будем вращать его вокруг оси Oz. z оставим без изменения, а y заменим на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Получим $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – *уравнение эллипсоида вращения.*

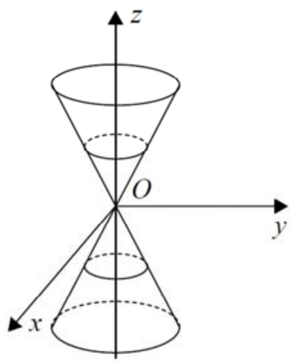
2. *Гиперболоид вращения.*



Возьмем гиперболу $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ и будем вращать ее вокруг оси Oz. z оставим без изменения, а y заменим на $\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Получим поверхность $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – *однополостный гиперболоид вращения.*

Возьмем сопряженную гиперболу $\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ и будем вращать ее вокруг оси Oz. Получим $\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – *двуполостный гиперболоид вращения.*



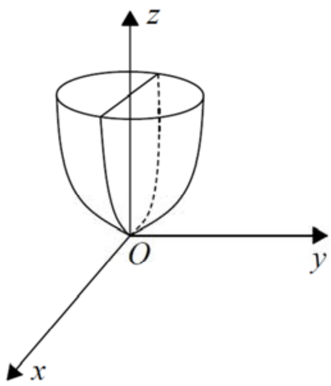


Вращая вокруг оси Oz пару общих асимптот этих гипербол, получаем конус вращения. Так как уравнением пары асимптот будет уравнение $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$ то *уравнение конуса вращения* запишется в виде $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$

3. *Параболоид вращения.*

Если возьмем параболу $y^2 = 2pz$ и будем вращать ее вокруг оси Oz, то получим $x^2 + y^2 = 2pz$ – *параболоид вращения.*

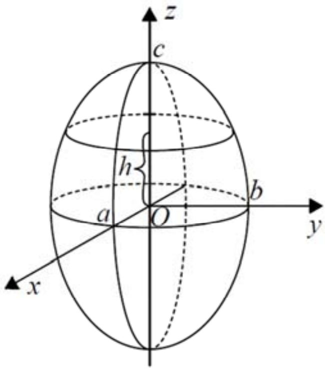
Поверхности вращения 2-го порядка, в сечении которых плоскостями, перпендикулярными оси вращения, получаются окружности, являются частными случаями поверхностей 2-го порядка общего вида, в сечении которых соответствующими плоскостями получаются не окружности, а эллипсы.



Это следующие поверхности.

1) *Трехосный эллипсоид*, уравнение которого имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Используем метод сечения.



а) $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – эллипс;

б) $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ – эллипс;

в) $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ – эллипс;

г) $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \\ z=\pm h \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$ – уравнение определяет следующее:

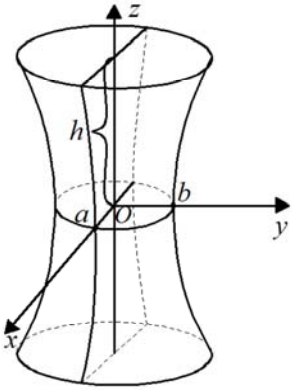
– при $|h|<|c|$ – эллипс;

– $|h|=|c|$ – точку;

– $|h|>|c|$ данная плоскость поверхности не пересекает.

2) *Гиперболоид однополостный*, уравнение которого $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

а) $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ – гипербола;

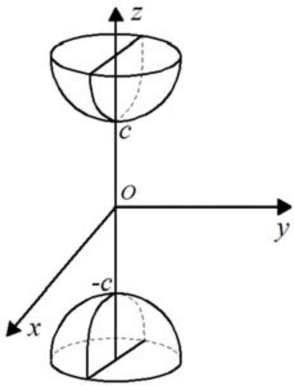


б) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ – гипербола;

в) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – эллипс;

г) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ z=\pm h \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2}$ – эллипс.

3) *Двуполостный гиперболоид*, уравнение которого $\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1.$



а) $\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – гипербола;

б) $\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ – гипербола;

в) $\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=\pm h \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1$ – уравнение определяет следующее:

– при $|h|<|c|$ не определяет никакой линии;

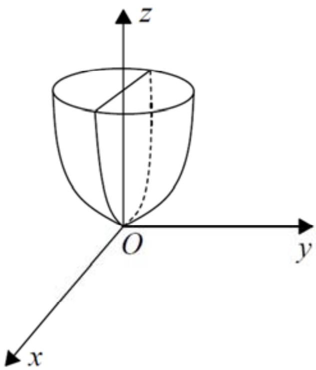
– $|h|=|c|$ – точки (0, 0, –*c*) и (0, 0, *c*);

– $|h|>|c|$ – эллипс.

4) *Конус*, уравнение которого $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$

5) *Эллиптический параболоид*, уравнение которого $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz.$

а) $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz \\ x=0\end{cases} \Rightarrow y^2=2pb^2z$ –



парабола;

б) $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz \\ y=0\end{cases} \Rightarrow x^2=2pa^2z$ –

парабола;

в) $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz \\ z=0\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ –

точка;

г) $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz \\ z=h>0\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2ph$ – эллипс;

д) $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz \\ z=h<0\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2ph$ при $h<0$ никакой линии не определяет.

6) *Гиперболический параболоид*, уравнение которого $\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z,$

где p и q одного знака, например, $p>0$, $q>0$.

Гиперболическим параболоидом называется поверхность, образуемая движением параболы, сохраняющей неизменными форму и направление, когда вершина этой параболы скользит по другой параболе, направленной в противоположную сторону и лежащей в плоскости, перпендикулярной к плоскости первой параболы.

Определим вид поверхности методом сечений:

а) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} = z \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y^2 = -2qz$ – вершина в точке $O(0, 0, 0)$, парабола симметрична относитально оси Oz отрицательного направления;

б) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} = z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2pz$ – вершина в точке $O(0, 0, 0)$, парабола симметрична относительно оси Oz положительного направления.

Рассечем плоскостью, параллельной плоскости xOy: $z = h$.

в) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} = z \\ z = h; h > 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{2ph} - \dfrac{y^2}{2qh} = 1$ – гипербола, $\sqrt{2qh}$, $\sqrt{2ph}$ – полуоси гиперболы, вещественная ось параллельна оси Ox;

г) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} = z \\ z = h; h < 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{y^2}{2qh} - \dfrac{x^2}{2ph} = 1$ – гипербола, $\sqrt{2qh}$, $\sqrt{2ph}$ – полуоси гиперболы, вещественная ось параллельна оси Oy;

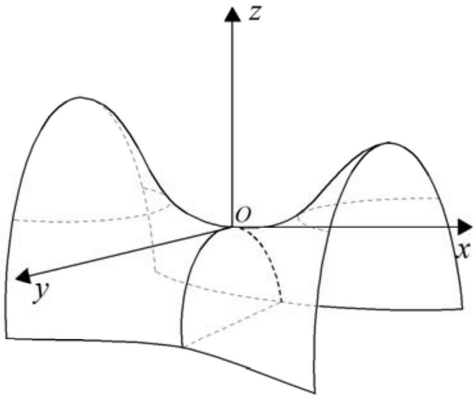
д) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} = z \\ z = h; h = 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} = 0$ – в сечении получим пару пересекающихся в начале координат прямых.

Рассечем плоскостью, параллельной плоскости yOz: $x = \pm a$.

е) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} = z \\ x = \pm a \end{cases} \Rightarrow y^2 = -2q(z - \dfrac{a^2}{2p})$.

Рассечем плоскостью, параллельной плоскости xOz: $y = \pm b$.

ж) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} = z \\ y = \pm b \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2p(z + \dfrac{b^2}{2q})$.



Пример 3.11. Привести уравнение $4x^2 + z^2 + 8x + 16y + 6z - 3 = 0$ к каноническому виду и установить, какой геометрический образ оно определяет.

Решение. Уравнение перепишем следующим образом:

$$4(x^2 + 2x) + (z^2 + 6z) + 16y - 3 = 0.$$

Дополним выражения в скобках до полных квадратов:

$$4(x + 1)^2 - 4 + (z + 3)^2 - 9 + 16y - 3 = 0.$$

После преобразований получим каноническое уравнение эллиптического параболоида:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(z+3)^2}{16} = -(y-1),$$

у которого вершина в точке $O_1(-1,\ 1,\ -3)$, ось симметрии параллельна оси Oy отрицательного направления.

4. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Математический анализ – раздел математики, дающий методы для количественного исследования разных процессов изменения, движения, зависимости одних величин от других.

4.1. Основные понятия о множествах

Любая совокупность объектов произвольной природы, объединенных общим признаком, называется *множеством*.

Множества обозначаются большими буквами, а их элементы малыми:

$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – множество натуральных чисел;

$S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{10}\}$.

Основные числовые множества

N – множество натуральных чисел.

Z – множество целых чисел.

Q – множество рациональных чисел.

R – множество вещественных или действительных чисел.

$\varnothing$ – пустое множество (множество, которое не содержит ни одного элемента).

$[a, b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$ – сегмент, отрезок.

$(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$ – интервал.

$(a, b] = \{x \in R \mid a < x \le b\}$ – полусегмент, полуинтервал.

Интервалы, отрезки, полуинтервалы называются *промежутками*.

Другие обозначения

$\forall$ – для любого, для всякого (квантор общности).

$\exists$ – существует, найдется (квантор существования).

$\in$ – принадлежит, $s_3 \in S$.

$\subset$ – содержится, $N \subset R$.

$\Leftrightarrow$ – равносильно.

$\Rightarrow$ – следует.

$\to$ – стремится.

$\bigcup$ – объединение множеств.

$\bigcap$ – пересечение множеств.

: – имеет место (такое что).

Подмножеством множества A называется любое множество B, каждый элемент которого является элементом множества A.

Для числовых множеств справедливо:

а) $N \subset Z \subset Q \subset R$;

б) пустое множество является подмножеством любого множества.

Если к R добавить $\pm\infty$, то говорят о расширенном множестве действительных чисел.

1) $x \in R \;\; x \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty \text{ при } \; x > 0, \\ \mp\infty \text{ при } \; x < 0. \end{cases}$

2) $\begin{matrix} +\infty + (+\infty) = +\infty, \\ -\infty + (-\infty) = -\infty. \end{matrix}$

3) $x \pm \infty = \pm\infty.$

4) $\dfrac{x}{\pm\infty} = 0, \;\; x \neq 0$.

5) $\infty - \infty, \;\; \dfrac{\infty}{\infty}$ – операции не определены.

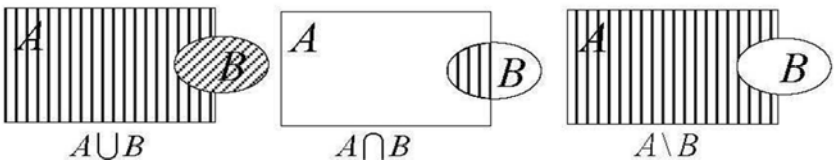
Действия над множествами

1. Объединением множеств A и B называется множество $A \bigcup B$, состоящее из тех элементов, которые входят или в множество A, или в множество B.

2. Пересечением A и B называется множество $A \bigcap B$, состоящее из элементов, входящих и в A, и в B.

3. Разность множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из элементов, входящих в A, но не входящих в B.

Диаграммы Эйлера



Пример 4.1. Пусть $A = \{3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 7\}$.

$A \bigcup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \bigcap B = \{3, 4\}$, $A \setminus B = \{5, 6\}$.

4.2. Числовая последовательность. Основные понятия и определения

Определение. Если каждому натуральному числу $n \in N$ ставится в соответствие по некоторому закону (правилу) f действительное число $f(n) = x_n$, то совокупность чисел x_1, x_2, x_3, …, x_n, …, расположенных в порядке возрастания, называют *числовой последовательностью*.

Обозначения: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ или $\{x_n\}$.

Выражение для n-го члена последовательности называется общим членом последовательности; x_n – общий член последовательности $\{x_n\}$.

Пример 4.2. Если $x_n = \dfrac{1}{2^n}$, то $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \ldots, \dfrac{1}{2^n}, \ldots$ – последовательность.

Примеры 4.3.

1) $\left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots\right\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ – числовая последовательность, n-й член $x_n = \dfrac{1}{n}$.

2) $\left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots\right\} = \left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}$, $x_n = \dfrac{n-1}{n}$.

Отдельные числа x_n последовательности $\{x_n\}$ называются ее элементами.

Элементы x_n и x_m при $m \neq n$ считаются отличными как элементы последовательности, хотя не исключено, что как числа они равны между собой ($x_n = x_m$).

Например, в последовательности $\left\{\dfrac{1}{3}, 3, \dfrac{1}{3}, 3, \ldots\right\}$ $x_2 = 3$ и $x_4 = 3$ являются различными элементами последовательности, несмотря на то, что значения их одинаковы.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей*, если $x_n \le x_{n+1}$ $\forall\, n \in N$ (4.1).

Последовательность $\{x_n\}$ называется *невозрастающей*, если $x_n \geq x_{n+1}\ \forall\ n \in N$ (4.2).

Неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*.

При этом, если в неравенствах (4.1), (4.2) стоит строгий знак неравенства, то последовательность $\{x_n\}$ называется *строго возрастающей* (строго убывающей), *монотонной*.

Например, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{n^2+1\right\}$ – монотонные последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число $M(m)$, что $x_n \leq M$ $(x_n \geq m)$ $\forall\ n \in N$.

Последовательность $\{x_n\}$, ограниченная сверху и снизу, называется ограниченной.

Например, последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ ограниченные. Последовательность $\left\{2, 5, 10, ...\right\} = \left\{n^2+1\right\}$ ограничена снизу.

4.3. Предел числовой последовательности

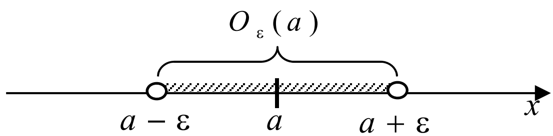
Определение. Число a называется пределом числовой последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ при $n \to \infty$, если для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ найдется число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что как только $n > n_0$, то выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$.

Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ стремится к числу (или сходится к числу a). Числовая последовательность $\{x_n\}$, имеющая предел, называется сходящейся, а не имеющая предела – расходящейся.

Замечание. Если $x_n = c = \text{const}\ \forall\ n \in N$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$.

Рассмотрим геометрическую иллюстрацию предела числовой последовательности.



Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ эквивалентно неравенству $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Интервал $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ будем называть ε – окрестностью точки a: $O_\varepsilon(a)$, a – центр окрестности, ε – радиус.

Пример 4.4. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$ и решим неравенство $|x_n - a| < \varepsilon,$ т. е. решим неравенство $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$

Таким образом, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $n_0 = n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon},$ такое, что неравенство $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ выполняется для всех $n > n_0$. Это и доказывает тот факт, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

4.4. Свойства сходящихся последовательностей

Теорема. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то он единственный.

Теорема. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то она ограничена.

Замечание. Ограниченность последовательности является необходимым условием сходимости последовательности, но не достаточным.

Подтверждением тому является последовательность 1, –1, 1, –1, … Это ограниченная последовательность, однако предела ее не существует.

Теорема (теорема Вейерштрасса, немецкого математика, 1815–1897 гг.). Если последовательность ограничена и монотонна, то она имеет предел (сходится).

Теорема. Если для любого натурального n $x_n \le y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b,$ т. е. в неравенствах можно переходить к пределу, сохраняя знак неравенства.

Замечание. Если $x_n < y_n$, то при переходе к пределу знак неравенства ослабевает, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Теорема. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \overset{\exists}{=} a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n \overset{\exists}{=} b,$ то

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) \overset{\exists}{=} a+b;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) \overset{\exists}{=} a\cdot b,$ в частности $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot x_n = c\cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c\cdot a;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} \overset{\exists}{=} \dfrac{a}{b},$ где $b \neq 0$.

Если дана последовательность $\{x_n\}$ и из некоторого подмножества ее членов образована новая последовательность, то она называется *подпоследовательностью* исходной последовательности, если порядок следования в ней членов такой же, как и в данной последовательности. Последовательность $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots$ является подпоследовательностью последовательности $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ Последовательность $2, 1, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ не является подпоследовательностью последовательности $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$

Теорема (Больцано–Вейерштрасса)

Б. Больцано – чешский математик, 1781–1848 гг.

Из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся к некоторому числу подпоследовательность.

Дана последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, где $n \in N$.

Можно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e,\ e \approx 2{,}7182818\ldots$

Логарифм с основанием e называется натуральным и обозначается $\log_e x = \ln x$.

4.5. Функция. Область определения, множество значений, способы задания

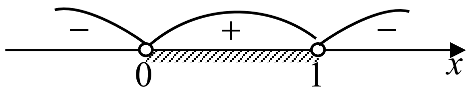
Дадим понятие функции. Переменная величина y называется функцией переменной величины x, если каждому значению x, взятому из области ее изменения, соответствует по определенному правилу единственное значение y. Обозначение: $y = f(x)$.

Под *областью определения* $D(y)$ функции $y = f(x)$ понимается совокупность всех действительных значений аргумента x, при которых функция определена.

Множеством значений $E(y)$ функции $y = f(x)$ называется множество всех действительных значений функции y, которые она может принимать.

Пример 4.5. Найти область определения функции $y = \dfrac{1}{x} + \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$.

Решение. $\begin{cases} \dfrac{x}{1-x} \geq 0; \\ x \neq 0; \\ x \neq 1. \end{cases}$



$D(y)$: $x \in (0,1)$.

Пусть даны два множества X и Y: $x \in X$, $y \in Y$.

Определение функции на языке множеств

Если каждому элементу $x \in X$ по некоторому закону (правилу f) поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$ со значениями в множестве Y.

Элементы $x \in X$ называются значениями аргумента. Элементы $y \in Y$ называются значениями функции. Множество X называется областью определения функции: $X = D(f)$. Множество Y называется областью значений функций: $Y = E(f)$. Если $X \subset R$, $Y \subset R$, то функцию f называют числовой функцией действительного переменного.

Если $z = \varphi(x)$ – некоторая функция с областью определения X и множеством значений Z, а $y = f(z)$ – функция с областью определения Z, то функцию $y = f(\varphi(x))$ называют *сложной функцией* с областью определения X.

Если каждому $y \in Y$ ставится в соответствие по закону f^{-1} единственное $x \in X$, то функцию $x = f^{-1}(y)$ называют обратной для функции $y = f(x)$. Например, если $y = \mathrm{tg}x$, то $x = \mathrm{arctg}y$.

К основным способам задания функции относятся следующие:

1) аналитический (с помощью одной или нескольких формул);
2) графический (с помощью графика);
3) табличный (с помощью таблицы значений);
4) описательный (словесный);
5) с помощью указания программы для вычисления значений функции на цифровой вычислительной машине.

Наиболее распространенным является аналитический способ задания функции. При аналитическом способе задания функции различают следующие формы:

а) явная форма задания функции – это задание функции формулой $y = f(x)$;

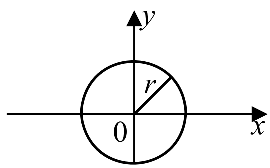
б) неявная форма задания функции – это задание функции в виде уравнения $F(x, y) = 0$, не разрешенным относительно y;

в) параметрическая форма задания функции $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$,

где t – параметр, $t \in T$, $x \in X$, $y \in Y$, $X, Y \subset R$.

Например, $x^2 + y^2 = r^2$ (неявная форма задания функции).

$\begin{cases} x = r \cdot \cos t \\ y = r \cdot \sin t \end{cases}$ (параметрическая форма задания функции).



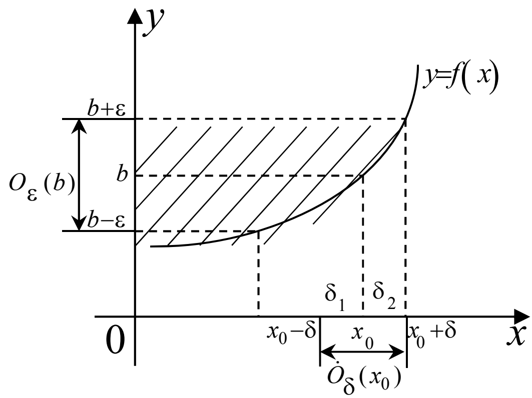
4.6. Предел функции

Число $b \in Y$ называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$ (при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $x \in D(f)$, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Записывают $b = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Неравенство $0 < |x - x_0| < \delta$ эквивалентно неравенству $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. Такая область называется δ-окрестностью точки x_0 и обозначается $O_\delta(x_0)$, а без точки x_0 – проколотой δ-окрестностью точки x_0 и обозначается $\dot{O}_\delta(x_0)$.

Неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ эквивалентно неравенству $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Это окрестность точки b радиуса ε: $O_\varepsilon(b)$.

Изобразим указанные окрестности на соответствующих осях.

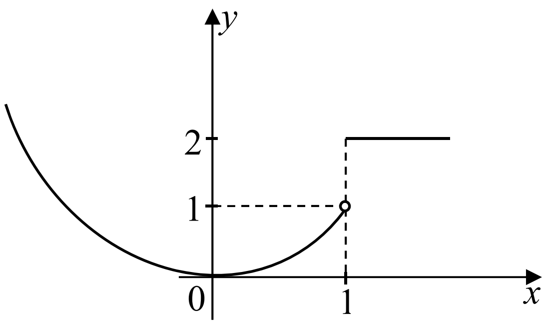


Пусть $x \to x_0$ и при этом $y \to b$. Из δ_1 и δ_2 берется минимальное и обозначается через δ.

Вывод. То есть геометрически $b = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ означает, что $\dot{O}_\delta(x_0)$ отображается функцией $f(x)$ в $O_\varepsilon(b)$.

Существуют функции, которые не имеют предела.

Пример 4.6. Функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 1; \\ 2, & \text{если } x \geq 1 \end{cases}$ не имеет предела при $x \to 1$.



Теорема (об единственности предела функции)

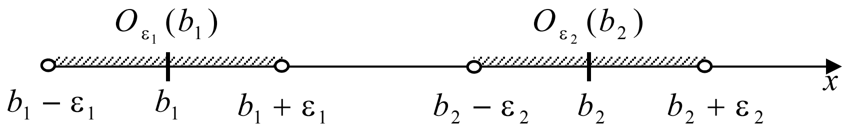
Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке $x = x_0$, то он единственный.

Доказательство проведем методом от противного.

Пусть $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b_1$ и $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b_2$, $b_1 \neq b_2$.

$$b_1 = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon_1 > 0\ \exists\, \delta_1(\varepsilon_1) > 0 : \forall x \in \dot{O}_{\delta_1}(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_{\varepsilon_1}(b_1).$$

$$b_2 = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon_2 > 0\ \exists\, \delta_2(\varepsilon_2) > 0 : \forall x \in \dot{O}_{\delta_2}(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_{\varepsilon_2}(b_2).$$



Выберем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\forall x \neq x_0$, $x \in O_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in O_{\varepsilon_1}(b_1) \cap O_{\varepsilon_2}(b_2)$, но это невозможно, так как $O_{\varepsilon_1}(b_1)$ и $O_{\varepsilon_2}(b_2)$ не имеют общих точек при достаточно малых ε_1 и ε_2. Наше предположение неверно. Итак, $b_1 = b_2$.

Замечание. Для основных элементарных функций в точке x_0 из их области определения $D(f)$ справедливо равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x) = f(x_0)$.

Пример 4.7. Показать, что предел функции $y = 2x + 1$ в точке $x_0 = 5$ равен $b = 11$. Для данного ε найти такую δ-окрестность точки $x_0 = 5$, чтобы для всех точек, взятых из этой окрестности, выполнялось неравенство $|y - b| < \varepsilon$.

Решение. Функция элементарная, непрерывная и $x = 5 \in D(y)$. Для нахождения предела подставляем предельное значение: $\lim\limits_{x \to x_0} y = \lim\limits_{x \to 5}(2x + 1) = 11$.

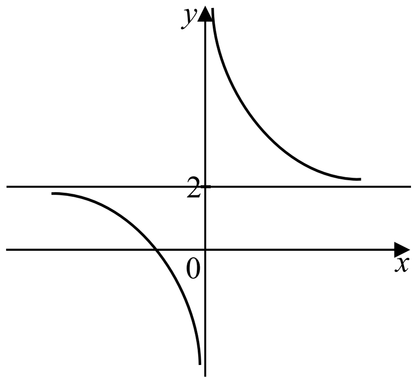
Покажем в общем виде, что для каждого ε найдется свое δ.

$|y-11|<\varepsilon \Rightarrow |2x+1-11|<\varepsilon,\ 2|x-5|<\varepsilon,\ |x-5|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, т. е. $|y-11|<\varepsilon$ при $|x-5|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Итак, $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Конечный предел функции на бесконечности

Определение. Число $b\in Y$ называется пределом функции $y=f(x)$ на бесконечности (или при $x\to\infty$), если $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\forall x\in\dot{O}_\delta(\pm\infty)$, $f(x)\in O_\varepsilon(b)$. Записывают: $b=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$.

Например, $y=2+\dfrac{1}{x}$ при $x\to\infty$, $y\to 2$.



Бесконечный предел функции

Достаточно часто приходится рассматривать бесконечный предел функции в точке $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

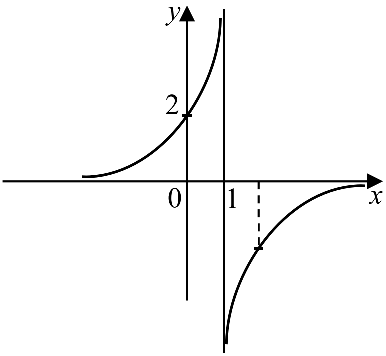
Определение. Функция $y=f(x)$ имеет бесконечный предел в точке $x_0\in X$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\forall x\in\dot{O}_\delta(x_0)\ \ f(x)\in O_\varepsilon(\infty)$.

Записывают $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

Определение. Предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ называется бесконечным, если для любого положительного числа M существует число $\delta > 0$ такое, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x)| > M$.

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Например, $y = \dfrac{2}{1-x}$ при $x \to 1$, $y \to \infty$.



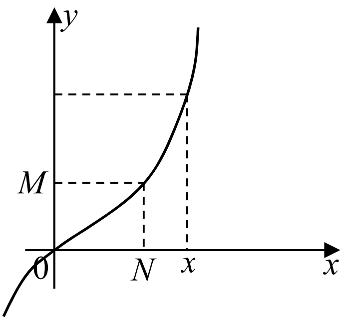
Покажем в общем виде, что для каждого M есть свое δ.

$|y| > M$, $\left|\dfrac{2}{1-x}\right| > M$; $\left|\dfrac{1-x}{2}\right| < \dfrac{1}{M}$;

$|1-x| < \dfrac{2}{M}$, т. е. $|y| > M$, если $|x - x_0| < \delta$, где $\delta = \dfrac{2}{M}$.

Определение. Предел функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$) называется бесконечным, если для любого сколь угодно большого числа $M \in R$ найдется такое число $N > 0$, что для любого x, для которого $|x| > N$ выполняется неравенство $|f(x)| > M$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \ \exists \ N(M) > 0: \ \forall |x| > N \Rightarrow |f(x)| > M.$$

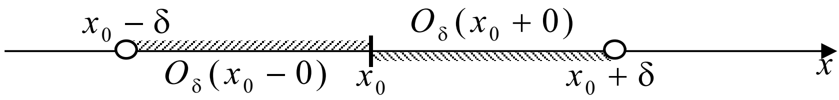


4.7. Односторонние пределы функции в точке

При определении предела функции в точке x_0 не учитывалось, как $x \to x_0$. Могут быть следующие случаи:

1) $x \to x_0$, $x < x_0$ (x стремится к x_0 слева); записывают: $x \to x_0 - 0$;

2) $x \to x_0$, $x > x_0$ (x стремится к x_0 справа); записывают: $x \to x_0 + 0$.



$O_\delta(x_0 - 0)$ – левая δ-окрестность точки x_0.

$O_\delta(x_0 + 0)$ – правая δ-окрестность точки x_0.

Число $b \in Y$ называется *левосторонним пределом* (пределом слева) функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall\, x \in \dot{O}_\delta(x_0 - 0): f(x) \in O_\varepsilon(b)$ или $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b$ или $b = f(x_0 - 0)$.

Число $b \in Y$ называется правосторонним пределом функции $y = f(x)$ в точке $x_0 \in X$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall\, x \in \dot{O}_\delta(x_0 + 0): f(x) \in O_\varepsilon(b)$ или $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Записывают $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$ или $b = f(x_0 + 0)$.

Замечание. Если в точке x_0 $f(x)$ имеет левосторонний и правосторонний пределы и они равны между собой, то это число является пределом функции $f(x)$ в точке x_0.

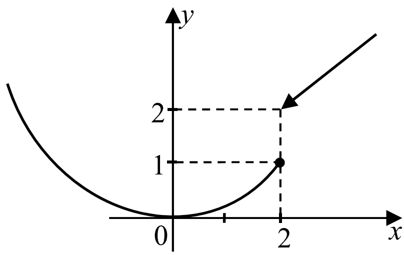
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = b.$$

Пример 4.8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4}, & x \in (-\infty, 2]; \\ x, & x \in (2, \infty). \end{cases}$

Решение. $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = 2.$

Односторонние пределы существуют, но $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2+0} f(x)$. Следовательно, в точке $x_0 = 2$ функция предела не имеет.



4.8. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Связь между ними

Среди функций, имеющих предел в точке, особую роль играют функции, предел которых в точке есть нуль или бесконечность.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0.$

Бесконечно малые функции принято обозначать греческими буквами $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, …

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty.$

Связь между бесконечно малыми функциями и бесконечно большими функциями выражается следующими теоремами.

Теорема. Если функция $f(x)$ в точке x_0 бесконечно большая функция, то в некоторой окрестности точки x_0 определена функция $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая.

Теорема. Если в точке x_0 функция $f(x)$ бесконечно малая, то в некоторой окрестности точки x_0 $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно большая функция.

При вычислении пределов функции важно знать, что: 1) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{c}{x} = 0$; 2) $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{c}{x} = +\infty$; 3) $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{c}{x} = -\infty$, где $c = \text{const} > 0$.

4.9. Операции над пределами

Вычисление пределов облегчается, если применять теоремы о пределе алгебраической суммы, произведения и частного двух функций.

Распространим эти теоремы на случай конечного предела функции на бесконечности и бесконечного предела функции.

$x \to a$, где a – либо x_0, либо один из символов: $\infty, +\infty, -\infty, x_0 + 0,\ x_0 - 0.$

Теорема. Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x) = d$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b,$ то:

1) $\lim\limits_{x\to a} c = c,$ где c = const;

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = d + b;$

3) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = d\cdot b;$

4) $\lim\limits_{x\to a} c\cdot f(x) = c\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = c\cdot d;$

5) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{d}{b},$ где $b \neq 0.$

Арифметические операции над пределами функций могут давать неопределенности: $\left[\dfrac{0}{0}\right],\ \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right],\ [\infty\cdot 0],\ [\infty-\infty],\ \left[1^{\infty}\right],\ \left[\infty^{0}\right],\ \left[0^{0}\right].$

Неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ раскрывают так:

1) если числитель и знаменатель многочлены, то их следует разложить на множители и сократить на $x - x_0$;

2) если числитель и знаменатель содержат иррациональности, то от этих иррациональностей нужно избавиться, сделав соответствующие преобразования.

Пример 4.9. Найти

$$\lim_{t\to 2}\frac{t^4 - 2t^3 + t^2 - 3t + 2}{t^3 - 2t^2 + 3t - 6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t^3 + t - 1)}{(t^2+3)(t-2)} = \lim_{t\to 2}\frac{t^3 + t - 1}{t^2 + 3} = \frac{9}{7}.$$

Пример 4.10. Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{4x}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{4x}+2\right)}{\left(\sqrt{4x}-2\right)\left(\sqrt{4x}+2\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt{4x}+2\right)}{4(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{4x}+2}{4}=1.$$

Пример 4.11. Найти

$$\lim_{x\to 4}\frac{1-\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\left(1-\sqrt{x-3}\right)\left(1+\sqrt{x-3}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)}{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)\left(2+\sqrt{x}\right)}{(4-x)\left(1+\sqrt{x-3}\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{2+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x-3}}=2.$$

Неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Для ее раскрытия делят на старшую степень переменной числитель и знаменатель.

Пример 4.12. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{2}{x^2}+5\right)}{x^4\left(\dfrac{2}{x^4}+\dfrac{3}{x^2}+1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{2}{x^2}+5}{\dfrac{2}{x^4}+\dfrac{3}{x^2}+1}=5.$$

Теорема (сравнения). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности $\dot{O}_\delta(a)$. Тогда, если $f(x)\le g(x)\ \forall\ x\in\dot{O}_\delta(a)$ и существуют конечные пределы $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to a$, то $\lim\limits_{x\to a}f(x)\le\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

Теорема (о промежуточной функции). Функции $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ определены в $\dot{O}_\delta(a)$. Если $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)\ \forall\ x \in \dot{O}_\delta(a)$ и существуют пределы функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при $x \to a$, причем $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to a}\psi(x) = b,$ то функция $f(x)$ также имеет предел в точке a и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b.$

4.10. Ограниченные функции

Определение. Функция $z(x)$ называется *ограниченной*, если $\forall\ M > 0\ \ \exists\ \delta(x_0):\ \forall\ x \in O_\delta(x_0) \Rightarrow |z(x)| < M.$

Не всякая функция имеет предел, даже будучи ограниченной. Например, $\sin x$ при $x \to \infty$ предела не имеет, хотя $|\sin x| \le 1$ ($\sin x$ ограниченная функция).

Теорема (об ограниченной функции). Если функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то она ограничена на $\dot{O}_\delta(a)$.

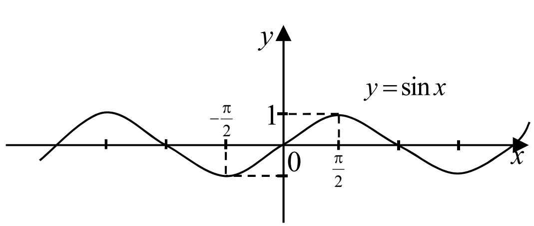
Доказательство.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0 : \forall x \in \dot{O}_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$

$|f(x) - b| \ge |f(x)| - |b| \Rightarrow |f(x)| - |b| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon + |b|.$ Обозначим $\varepsilon + |b| = M$ и тогда $|f(x)| < M\ \forall\, x \in \dot{O}_\delta(a),$ т. е. функция $f(x)$ ограничена на $\dot{O}_\delta(a)$.

4.11. Замечательные пределы

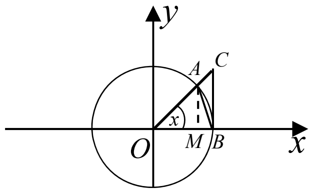
Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$



Теорему о пределе частного применить нельзя, так как предел знаменателя равен 0. Вычислим этот предел, пользуясь геометрическими рассуждениями.

$\frac{\sin x}{x}$ – функция четная, поэтому пределы этой функции при $x \to 0$ слева и справа равны между собой. Вычислим предел этой функции справа, $x > 0$, т. е. рассмотрим интервал $(0, \frac{\pi}{2})$.

x выражен в радианах.



$R = 1$, $|OB| = 1$, $|AM| = \sin x$, $|OM| = \cos x$, $|CB| = \operatorname{tg} x$. $S_{\Delta OAB} < S_{\text{сектора}} < S_{\Delta OCB}$.

$\frac{1}{2} < \sin x \cdot 1 < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x$, $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Разделим на $\sin x > 0$ и получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{или} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Мы получили это неравенство в предположении, что $x > 0$, но так как $\frac{\sin x}{x}$ и $\cos x$ – четные функции, то это неравенство справедливо и при $x < 0$, т. е. $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right)$. Таким образом, неравенство $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ выполняется $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$. $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$. Тогда на основании теоремы о промежуточной функции имеем $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Следствие: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Примеры 4.13. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, $\qquad \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left|\begin{array}{l}\arcsin x=y\\ x=\sin y\\ x\to 0,\ y\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\sin y}=1,\qquad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{arctg} x=y\\ x=\operatorname{tg} y\\ x\to 0,\ y\to 0\end{array}\right|=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\operatorname{tg} y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\dfrac{\operatorname{tg} y}{y}\cdot y}=1,$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1;$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$

Первый замечательный предел применяют при раскрытии неопределенностей $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $(0\cdot\infty)$ при наличии в выражении тригонометрических функций.

Второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ служит для раскрытия неопределенности $\left(1^\infty\right)$.

Примеры 4.14. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{k}{x})^x=\left[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{k}{x})^{\frac{x}{k}}\right]^k=e^k;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^2=e^2;$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^x=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x-3}\right)^{\frac{x-3}{5}}\right]^{\frac{5x}{x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{x-3}}=e^5$

или $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^x} = \dfrac{e^2}{e^{-3}} = e^5.$

4.12. Свойства бесконечно малых функций

Теорема (о разности между функцией и ее пределом).

Если существует конечный предел функции $b = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ в точке x_0, то функция $f(x) - b$ будет бесконечно малой функцией: $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-b\right)=0.$

Доказательство. Так как по условию $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b,$ то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-b) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} b = b-b=0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x)-b)=0.$$

Следствие. Если функция $f(x)$ при $x\to x_0$ имеет конечный предел b, то она представима в виде $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция в точке x_0.

Теорема. Сумма конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

Доказательство.

Дано $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha_i(x)=0, i=\overline{1,n}.$ $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(x);$

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n\right) =$$

$$= \lim_{x\to x_0}\alpha_1(x) + \lim_{x\to x_0}\alpha_2(x)+\ldots+\lim_{x\to x_0}\alpha_n(x)=0.$$

Теорема. Произведение бесконечно малой функции на функцию ограниченную есть функция бесконечно малая.

Теорема. Произведение конечного числа бесконечно малых есть функция бесконечно малая.

Теорема. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, предел которой отличен от нуля, есть функция бесконечно малая.

Доказательство.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}=\frac{0}{b}=0\Rightarrow\frac{\alpha(x)}{f(x)}$$ – бесконечно малая функция.

4.13. Сравнение бесконечно малых функций

Для сравнения двух бесконечно малых функций вычисляют предел их отношения.

Рассмотрим бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to a$ ($a = x_0$ или $a = \infty$). $\beta(x)\neq 0$ в некоторой окрестности точки a.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A$ $(A\neq 0,\ \ A\neq\infty)$, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют один и тот же порядок малости в точке a и обозначают $\alpha(x) = O(\beta(x))$. Можно записать наоборот: $\beta(x) = O(\alpha(x))$.

Читают: $\alpha(x)$ есть O большое от $\beta(x)$.

Пример 4.15. Пусть $\alpha(x) = \sin 5x$, $\beta(x) = 2x$ при $x\to 0$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}=\dfrac{5}{2}$, то бесконечно малые функции $\sin 5x$ и $2x$ имеют одинаковый порядок малости, т. е. $2x = O(\sin 5x)$ или $\sin 5x = O(2x)$ при $x\to 0$.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ называют бесконечно малой функцией более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$ в точке a. Обозначают $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

Пример 4.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=0$ следовательно, $1-\cos x = o(x)$. То есть бесконечно малая функция $1-\cos x$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с бесконечно малой функцией x при $x\to 0$.

Определение. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty,$ то α(x) называется бесконечно малой низшего порядка, чем β(x).

Пример 4.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty.$

Следовательно, бесконечно малая функция tg$x$ – бесконечно малая функция более низкого порядка малости, чем x^2, $x^2 = o(\operatorname{tg}x)$.

Определение. Бесконечно малую функцию α(x) называют бесконечно малой функцией k-го порядка малости ($k > 0$) по сравнению с бесконечно малой β(x), если α(x) и $(\beta(x))^k$ будут бесконечно малыми функциями одного порядка, т. е. если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\left(\beta(x)\right)^k}=A\ \ (A\neq 0,\ \ A\neq\infty).$

4.14. Эквивалентные бесконечно малые функции

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1,$ то бесконечно малые функции α(x) и β(x) называются эквивалентными в точке a. Записывают α(x) ~ β(x) при $x \to a$.

Пример 4.18. $\alpha(x) = \ln(1 + x)$ и $\beta(x) = x$ – эквивалентные бесконечно малые функции при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

Пример 4.19. $\alpha(x) = e^x - 1$ и $\beta(x) = x$ при $x \to 0$ бесконечно малые эквивалентные, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\left|\begin{matrix} e^x-1=y \\ e^x=1+y \\ x=\ln(1+y) \\ x\to 0,\, y\to 0\end{matrix}\right|=$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}==\lim_{y\to 0}\frac{y}{\dfrac{\ln(1+y)}{y}\cdot y}=1.$$

Эквивалентные бесконечно малые функции при x → 0

$$\sin\alpha x \sim \alpha x; \quad \operatorname{tg}\alpha x \sim \alpha x; \quad \operatorname{arctg}\alpha x \sim \alpha x; \quad \arcsin\alpha x \sim \alpha x;$$

$$\ln(1+\alpha x) \sim \alpha x; \qquad e^{\alpha x} - 1 \sim \alpha x; \qquad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

Свойства эквивалентных бесконечно малых функций

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения двух бесконечно малых функций, им эквивалентных.

Доказательство. Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} = 1$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = 1$, а также $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ существует.

Итак,

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\frac{\beta_1(x)}{\beta_1(x)} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Пример 4.18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot\ln(1+3x)\cdot\operatorname{arctg}7x}{\operatorname{arctg}8x\cdot\operatorname{tg}10x\cdot\sin 4x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{5x\cdot 3x\cdot 7x}{8x\cdot 10x\cdot 4x} = \frac{21}{64}.$

Теорема. Две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентные порознь третьей бесконечно малой функции $\gamma(x)$, эквивалентны между собой.

Доказательство. Дано $\alpha(x) \sim \gamma(x)$, $\beta(x) \sim \gamma(x)$.

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}\cdot\frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Следовательно, $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Пример 4.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1,$ то $\sin x \sim \operatorname{tg} x$ при $x \to 0$.

Теорема. Разность $\alpha(x) - \beta(x)$ двух эквивалентных бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией более высокого порядка, чем каждая из них:

$$\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)),\ \alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)).$$

Теорема. Если разность $\alpha(x) - \beta(x)$ двух бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть бесконечно малая функция высшего порядка малости, чем $\alpha(\text{x})$ и $\beta(x)$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ есть эквивалентные бесконечно малые функции.

4.15. Непрерывные функции. Непрерывность функции в точке

Определение. Функция $f(x)$, определенная в $O_\delta(x_0)$, называется непрерывной в точке x_0, если существует предел функции при $x \to x_0$ и этот предел равен значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{4.1}$$

Так как $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, то равенство (4.1) можно записать $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$.

Таким образом, для непрерывной функции знаки функции и предела можно переставлять. Из определения (4.1) вытекают три условия непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = x_0$. Функция $f(x)$ *непрерывна* в точке x_0, если выполнены следующие требования:

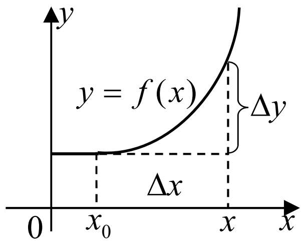
1) $f(x)$ должна быть определена как в точке x_0, так и в некоторой ее окрестности;

2) $f(x)$ должна иметь предел, когда $x \to x_0$ произвольным образом, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{\text{x}\to \text{x}_0+0} f(x)$;

3) предел функции должен совпадать со значением функции в точке x_0: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Графиком непрерывной функции является непрерывная кривая.

Используют определение непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0, которое эквивалентно определению (4.1).



Дана функция $y = f(x)$.

Разность $x - x_0$ называется приращением аргумента и обозначается $\Delta x = x - x_0$, $f(x) - f(x_0)$ – приращением функции, соответствующим данному приращению аргумента Δx и обозначается $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$, но $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$, тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = 0$ или $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$.

$$\lim_{x - x_0 \to 0} \left(f(x) - f(x_0)\right) = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (4.2)$$

Равенство (4.1) эквивалентно равенству (4.2).

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Это определение особенно удобно для практического использования.

Пример 4.20. Докажем, что функция $y = \sin x$ непрерывна на интервале $(-\infty, \infty)$. Пусть $x_0 \in R$. Аргумент получает приращение Δx, тогда функция получит приращение Δy.

Рассмотрим $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$

$$= \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = 2 \lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot 0 \cdot \cos x_0 = 0.$$

По определению (4.2) $y = \sin x$ непрерывна в $(-\infty, \infty)$.

4.16. Односторонняя непрерывность

Непрерывность слева: $y = f(x)$ непрерывна слева в точке x_0, если она определена в $O_\delta(x_0 - 0)$, имеет левосторонний предел в ней, который совпадает со значением функции в точке x_0: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$.

Непрерывность справа: $y = f(x)$ непрерывна справа в точке x_0, если она определена в $O_\delta(x_0 + 0)$, имеет правосторонний предел в ней, который совпадает со значением функции в точке x_0: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

4.17. Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции:

1) $c \cdot f(x)$, $c \cdot \varphi(x)$, где $c = \text{const}$;
2) $f(x) \pm \varphi(x)$;
3) $f(x) \cdot \varphi(x)$;
4) $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, где $\varphi(x) \neq 0$ также непрерывны в точке x_0.

Доказательства этой теоремы основаны на определении непрерывности функции в точке и на теоремах о пределах (п. 4.9).

Например, докажем 2). По условию дано: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$.

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = f(x_0) + \varphi(x_0).$$

Определение. Элементарными функциями называются такие, которые получаются из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий и суперпозиции (взятие функции от функции), примененных конечное число раз.

Теорема. Основные элементарные функции непрерывны в области своего определения. Например, $y = \sin x$ непрерывна при $x \in (-\infty, +\infty)$.

Теорема (о непрерывности сложной функции). Если функция $y=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0=\varphi(x_0)$, тогда сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Утверждение теоремы можно записать в виде формулы $\lim\limits_{x\to x_0} f\big(\varphi(x)\big)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0}\big(\varphi(x)\big)\right)$, из которой видно, что операция предельного перехода перестановочна с операцией взятия непрерывной функции.

4.18. Точки разрыва и их классификация

Точка, в которой нарушается непрерывность функции, называется *точкой разрыва* этой функции.

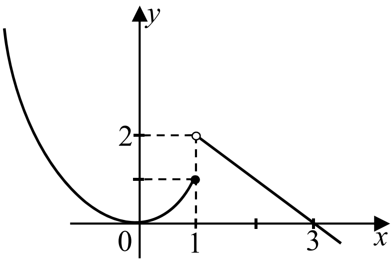
1. Если $f(x)$ в точке x_0 имеет конечные односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, – то точка x_0 называется *точкой разрыва I рода*.

Разность $\delta=\left|\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\right|$ называется *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0.

2. Если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен ∞, то точка x_0 называется *точкой разрыва II рода*.

3. Если односторонние пределы конечны и равны между собой, но не равны значению функции в самой точке: $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq$ $\neq f(x_0)$, то точка x_0 – точка устранимого разрыва функции $f(x)$.

Приняв значение функции $f(x)$ в этой точке $x=x_0$ равное односторонним пределам, устраняем разрыв и новая функция становится непрерывной.



Пример 4.21. Исследовать функцию на непрерывность

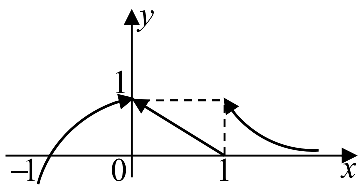
$$y=\begin{cases} x^2 & \forall x\le 1;\\ 3-x & \forall x>1.\end{cases}$$

Решение. Функция задана двумя аналитическими выражениями $y=x^2$, $y=3-x$ – непрерывные функции, как основные элементарные функции. В точке $x = 1$ нарушено второе условие непрерывности функции в точке. Исследуем точку $x = 1$.

$\lim\limits_{x \to 1-0} x^2 = 1$. $\lim\limits_{x \to 1+0} (3 - x) = 2$. Следовательно, точка $x = 1$ является точкой разрыва I рода. Скачок функции $\delta = |1 - 2| = 1$.

Пример 4.22. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \text{ при } x < 0, \\ 1 - x \text{ при } 0 < x \le 1, \\ \dfrac{1}{x} \text{ при } x > 1. \end{cases}$$



Решение. Функция задана тремя аналитическими выражениями, из которых первые два являются функциями, непрерывными для всех значений x, а выражение $\dfrac{1}{x}$ не существует при $x = 0$. Так как выражение $\dfrac{1}{x}$ задано при $x > 1$, то все три аналитические выражения – непрерывные функции. Данная функция может иметь разрыв на границах интервалов, где меняется ее аналитическое выражение, т. е. в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Исследуем поведение функции в точке $x_1 = 0$:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (1 - x^2) = 1, \qquad \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (1 - x) = 1.$$

Левый и правый пределы одинаковы, но в самой точке $x = 0$ функция не задана. Следовательно, при $x = 0$ функция имеет устранимый разрыв. Скачок в точке устранимого разрыва $\delta = 0$.

Исследуем поведение функции в точке $x_2 = 1$:

$$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} (1 - x) = 0, \qquad \lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x} = 1.$$

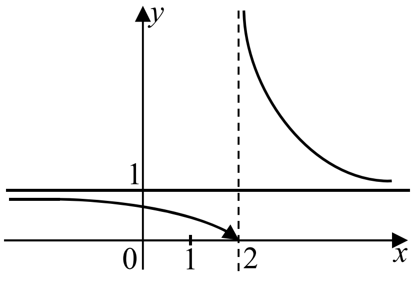
Левый и правый пределы функции $f(x)$ конечны, но не одинаковы, значит, в точке $x_2 = 1$ имеет место разрыв I рода. Скачок функции в точке разрыва равен $\delta = |0 - 1| = 1$.

Пример 4.23. Исследовать на непрерывность функцию $y = 5^{\frac{1}{x-2}}$ в точках $x = 2$ и $x = 3$.

Решение. Данная функция определена и непрерывна во всех точках, кроме $x = 2$.

Найдем $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{1}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{1}{x-2} = +\infty$. Значит, $\lim\limits_{x\to 2-0} 5^{\frac{1}{x-2}} = 0$, $\lim\limits_{x\to 2+0} 5^{\frac{1}{x-2}} = \infty$. Правый предел бесконечен, следовательно, точка $x = 2$ является точкой разрыва II рода. Исследуем функцию на непрерывность в точке $x = 3$: $\lim\limits_{x\to 3-0} 5^{\frac{1}{x-2}} = 5$, $\lim\limits_{x\to 3+0} 5^{\frac{1}{x-2}} = 5$, $f(3) = 5$.

Все условия непрерывности функции выполнены, значит, при $x = 3$ функция непрерывна. Для уточнения графика найдем пределы функции при $x \to \pm\infty$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 5^{\frac{1}{x-2}} = 1$. Строим схематично график данной функции.

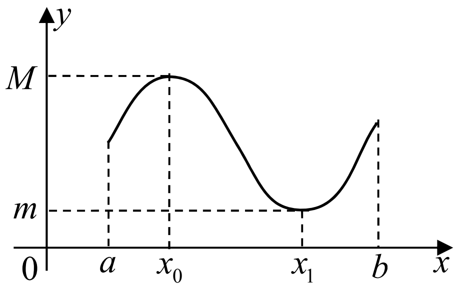


4.19. Свойства функций, непрерывных на отрезке

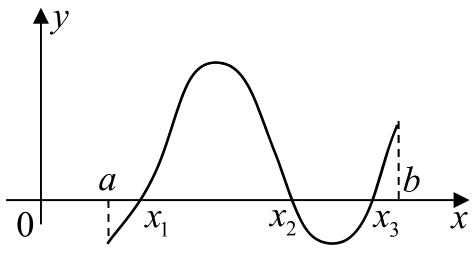
Определение. Функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и непрерывная в каждой его точке, называется функцией, *непрерывной на отрезке*.

Теорема (об ограниченности непрерывной функции на отрезке). Если $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, т. е. $|f(x)| \le M \ \forall\, x \in [a, b]$, $M = \text{const}$.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она достигает по меньшей мере один раз наибольшего M и наименьшего m значения на $[a, b]$, т. е. существуют $x_0 \in [a, b]$ и $x_1 \in [a, b]$ такие, что $f(x_0) = M$ и $f(x_1) = m$.

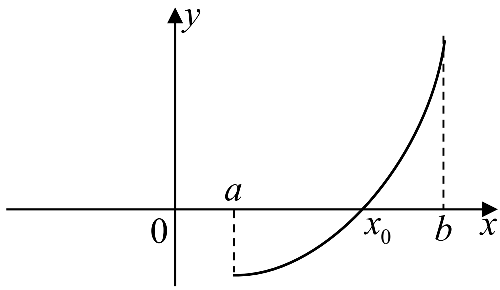


Теорема (об обращении функции в нуль). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает значение разных знаков $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, то внутри этого отрезка существует по крайней мере одна точка, в которой функция равна нулю.

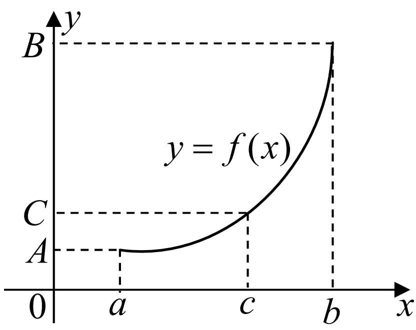


На чертеже три точки: x_1, x_2, x_3, где $f(x) = 0$. Сформулированная теорема имеет геометрический смысл: непрерывная кривая при переходе с одной полуплоскости, границей которой является ось Ox, в другую полуплоскость пересекает эту ось.

Замечание. Если $f(x)$ непрерывна и монотонна на $[a, b]$, то существует единственная точка x_0, $x_0 \in (a, b)$, в которой функция равна нулю: $f(x_0) = 0$.



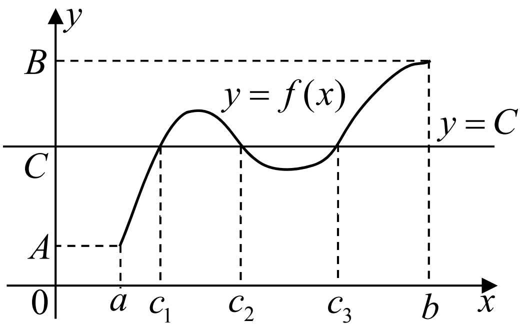
Теорема (о промежуточных значениях). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и принимает на концах этого отрезка различные значения, т. е. $f(a) = A, f(в) = B$, то $\forall C \in (A, B)\ \exists\ c \in [a, b] : f(c) = C$.



Доказательство. Пусть $C \in \left(A, B\right)$. Для доказательства теоремы составим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Эта функция непрерывна на $[a, b]$ как разность непрерывных функций. $x = a \Rightarrow \varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0$, $x = b \Rightarrow \varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0$. Следовательно, непрерывная функция $\varphi(x)$ принимает на концах отрезка $[a, b]$ значения разных знаков. На основании предыдущей теоремы существует по крайней мере одна точка $c \in \left[a, b\right]$, такая что $\varphi(c) = 0 \Rightarrow f(c) - C = 0$, т. е. $f(c) = C$.

Значит, непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно принимает все промежуточные значения.

Геометрический смысл теоремы.



Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(в) = B$ и $A < C < B$, то прямая $y = C$ пересечет график $y = f(x)$ по меньшей мере в одной точке.

Если же на $f(x)$ наложить еще и условие монотонности на $[a, b]$, то точка $c \in \left[a, b\right]$, в которой $f(c) = C$ – единственная.

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5.1. Определение производной, ее геометрический и механический смысл

Пусть дана функция $y = f(x)$, определенная на некотором интервале.

Дадим $x \in D(y)$ приращение Δx, тогда y получит приращение Δy: $\Delta y = f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)$.

Рассмотрим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и найдем предел этого отношения при $\Delta x \to 0$. Если этот предел существует и конечен, то его называют производной от функции $f(x)$ по переменному x.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ по аргументу x в произвольной фиксированной точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если он существует и конечен при произвольном стремлении приращения аргумента к нулю.

Производная обозначается y', $y'(x)$, y'_x, $f'(x)$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{5.1}$$

Процесс нахождения производной называется *дифференцированием функции*.

Δy зависит от x и Δx. Производная y' зависит только от x и является функцией x.

При каждом конкретном числовом значении x производная представляет собой определенное число.

Например, найти, пользуясь определением, производную функции $y = \cos x$.

Для нахождения производной от данной функции, согласно определению, необходимо произвести определенные действия.

1. Дать фиксированному аргумента $x \in D(y)$ приращение Δx.

2. Найти соответствующее приращение функции

$$\Delta y = f\left(x+\Delta x\right) - f\left(x\right) = \cos\left(x+\Delta x\right) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}.$$

3. Составить отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

4. Найти предел полученного отношения при $\Delta x \to 0$.

$$y' \overset{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x.$$

Итак, $\left(\cos x\right)' = -\sin x$.

Если $y = f(x)$ – произвольная функция, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right)}{\Delta x}$ – средняя скорость изменения функции f в точке x.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'\left(x\right)$ – скорость изменения функции f в точке x. В этом состоит *механический смысл* производной, т. е. производная – математическая модель мгновенной скорости процесса. В зависимости от сущности функции f можно получить множество математических моделей скорости протекаемых процессов.

Например, пусть материальная точка движется прямолинейно неравномерно и $s(t)$ – закон движения материальной точки во времени t. Тогда мгновенная скорость движения в момент времени t есть производная от перемещения s по времени t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s\left(t + \Delta t\right) - s(t)}{\Delta t} = s'(t).$$

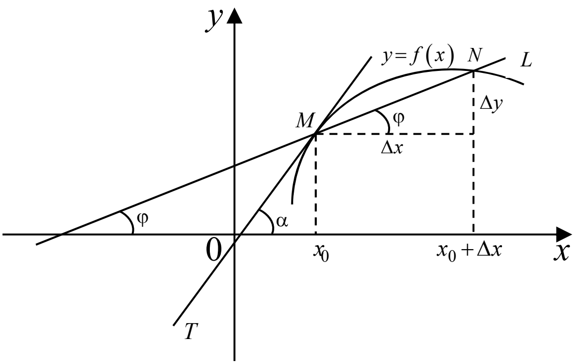
Пусть $y = v(t)$ – функция, описывающая процесс изменения скорости неравномерного движения в зависимости от времени t. Тогда мгновенное ускорение материальной точки в фиксированный момент времени есть производная от скорости v по времени t:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\left(t + \Delta t\right) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = s''(t).$$

Геометрический смысл производной

Пусть L – дуга плоской кривой, заданной уравнением $y = f(x)$. $y = f(x)$ определена и непрерывна в некотором интервале.

На кривой зафиксируем точку $M(x_0,\ y_0)$. Через произвольную точку $N(x,\ y)$ на кривой и фиксированную точку M проведем секущую MN. Если точка N движется по гладкой кривой к точке M, то секущая поворачивается вокруг точки M и стремится к некоторому предельному положению MT.



Касательной к кривой в точке M называется предельное положение секущей MN, когда точка N стремится к точке M, перемещаясь по кривой.

Если предельного положения секущей не существует, то в точке M провести касательную нельзя.

Предположим, что касательная к кривой в точке M существует. Угловой коэффициент секущей MN равен $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Угловой коэффициент касательной $k_{\text{кас}} = \operatorname{tg}\alpha$ и $y'(M) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{N \to M} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha.$ Следовательно,

$$k_{\text{кас}} = y'(x_0). \tag{5.2}$$

Равенство (5.2) устанавливает *геометрический смысл* производной. Производная от функции $y = f(x)$, с геометрической точки зрения, вычисленная в данной точке, равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0.

Используя геометрический смысл производной, можно составить уравнения касательной и нормали к плоской кривой.

Если точку касания обозначить через $M(x_0, y_0)$, то уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ примет вид

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0), \tag{5.3}$$

где $k = f'(x_0)$.

Нормаль к линии в точке M – прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной.

Угловые коэффициенты касательной и нормали связаны условием перпендикулярности: $k_{\text{норм}} = -\dfrac{1}{k_{\text{кас}}}$.

Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0). \tag{5.4}$$

5.2. Дифференцируемость функции

Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ существует не для всякой функции, а если и существует, то не обязательно при всех значениях ее аргумента, для которых функция определена.

Определение. Функция называется *дифференцируемой в точке* $x = x_0$, если она имеет в этой точке производную.

Определение. Функция f называется *дифференцируемой в интервале* (a, b), если она дифференцируема в каждой точке данного интервала.

Теорема (о связи между дифференцируемостью и непрерывностью функции). Если функция f дифференцируема в некоторой точке $x = x_0$, то она и непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т. е. $\exists\, f'(x_0) : f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Так как переменная величина, имеющая предел, может быть представлена в виде суммы этого предела и бесконечно малой, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x)$.

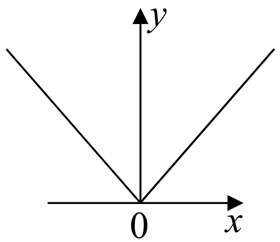
$$\Delta y = \left(f'(x_0) + \alpha\right) \cdot \Delta x.$$

$f'(x_0) + \alpha$ – величина ограниченная, Δx – бесконечно малая функция. $\Delta y = \left(f'(x_0) + \alpha\right) \cdot \Delta x$ – бесконечно малая функция. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$ Следовательно, $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$.

Замечание. Обратное утверждение теоремы в общем случае неверно, т. е. функция f непрерывная в точке $x = x_0$ может в этой точке не иметь производной.

Например, $y = |x|$ определена и непрерывна при $x \in R$, но в точке $x = 0$ она не дифференцируема.

Действительно, при $x \geq 0$ $y = |x| = x$, $\Delta y = \Delta x$.



$$y' = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

При $x < 0$ $y = |x| = -x$, $\Delta y = -\Delta x$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Так как пределы не равны, то не существует $y'(0)$.

Следовательно, данная функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ не имеет производной.

Итак, всякая дифференцируемая функция непрерывна, но не всякая непрерывная функция дифференцируема.

5.3. Основные правила дифференцирования

1. Производная постоянной величины равна нулю.

Доказательство. Постоянную можно рассматривать как функцию, принимающую при всех значениях аргумента x одинаковые значения $y = C, \forall x \in R$.

Дадим аргументу x приращение Δx, тогда функция получит приращение Δy: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, $\Delta y = C - C = 0$.

Итак, по определению, если $y = c$, то

$$y' = c' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0, c' = 0. \qquad (5.5)$$

2. Производная от переменной по этой же переменной равна 1.

Доказательство. Дадим аргументу x приращение Δx, тогда функция $y = x$ получит приращение Δy: $\Delta y = (x + \Delta x) - x = \Delta x$.

$$x' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \; x'_x = 1. \tag{5.6}$$

Теорема. Если функции $U(x)$ и $V(x)$ дифференцируемы в точке x, то функции $U(x) \pm V(x)$, $C \cdot U(x)$, $U(x) \cdot V(x)$, $\dfrac{U(x)}{V(x)}$, $V(x) \neq 0$ также дифференцируемы в точке x и справедливы равенства:

$$(U + V)' = U' + V'; \tag{5.7}$$

$$(C \cdot U)' = C \cdot U', \text{ где } C = \text{const}; \tag{5.8}$$

$$(U \cdot V)' = U' \cdot V + U \cdot V'; \tag{5.9}$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}. \tag{5.10}$$

Доказательство теоремы основано на определении производной и на свойствах предела функции. Например, покажем равенство (5.9). Если x получает приращение Δx, то функции $U(x)$, $V(x)$, $y(x)$ получат соответственно приращения ΔU, ΔV, Δy, которые зависят от Δx, а $U(x)$ и $V(x)$ не зависят от Δx.

$$\Delta y = (U + \Delta U) \cdot (V + \Delta V) - U \cdot V = V \cdot \Delta U + U \cdot \Delta V + \Delta U \cdot \Delta V.$$

Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = V \dfrac{\Delta U}{\Delta x} + U \dfrac{\Delta V}{\Delta x} + \dfrac{\Delta U \cdot \Delta V}{\Delta x}$.

Используя теоремы о пределах функций, находим, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = V \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} + U \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta V,$$

но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta U}{\Delta x} = U'$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta V}{\Delta x} = V'$ и так как функция $V = V(x)$ непрерывна, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta V = 0$.

Итак, если $y = U \cdot V$, то $y' = U' \cdot V + U \cdot V'$.

Покажем равенство (5.10). Пусть $y = \frac{U(x)}{V(x)}$. Придавая аргументу x приращение Δx, найдем $\Delta y = \frac{U + \Delta U}{V + \Delta V} - \frac{U}{V} = \frac{V \cdot \Delta U - U \cdot \Delta V}{V \cdot (V + \Delta V)}$.

Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{V \cdot \frac{\Delta U}{\Delta x} - U \cdot \frac{\Delta V}{\Delta x}}{V \cdot (V + \Delta V)}$.

Переходя к пределу $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{V \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} - U \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x}}{V \lim\limits_{\Delta x \to 0} (V + \Delta V)}.$$

Итак, если $y = \frac{U}{V}$, то $y' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$.

Замечание. Если $y = \frac{C}{V}$, то $y' = \frac{-CV'}{V^2}$. Если $y = \frac{U}{C}$, то $y' = \frac{1}{C} U'$.

5.4. Дифференцирование сложной функции

Пусть $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$; $f(u)$, $\varphi(x)$ – дифференцируемые функции; $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция; u – промежуточный аргумент; x – основной аргумент.

Дадим фиксированному значению аргумента x приращение Δx. Этому приращению соответствует приращение Δu. Приращению Δu соответствует приращение Δy функции $y = f(u)$ в точке x.

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0$.

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x;$$

$$y'(x) = y'_u \cdot u'_x. \tag{5.11}$$

Производная сложной функции по основному аргументу равна производной этой функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную промежуточного аргумента по основному.

Замечание. Если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.

5.5. Дифференцирование обратной функции

Пусть $y = f(x)$, а $x = \varphi(y)$ – обратная функция – монотонна и дифференцируема в некотором интервале и имеет $\varphi'(y) \neq 0$.

Продифференцируем $x = \varphi(y)$ по x и получим

$$1 = \varphi'_y \cdot y'_x; \quad y'_x = \frac{1}{\varphi'_y}; \quad y'_x = \frac{1}{x'_y}; \quad x'_y = \frac{1}{y'_x}. \qquad (5.12)$$

5.6. Дифференцирование основных элементарных функций

Вначале запишем таблицу производных основных элементарных функций.

1. $y = \sin u$, где $u = u(x)$	$y' = \cos u \cdot u'$
2. $y = \cos u$	$y' = -\sin u \cdot u'$
3. $y = \mathrm{tg}\, u$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
4. $y = \mathrm{ctg}\, u$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
5. $y = \arcsin u$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
6. $y = \arccos u$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
7. $y = \mathrm{arctg}\, u$	$y' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

8. $y = \operatorname{arcctg} u$	$y' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
9. $y = \log_a u\,(a > 0,\ a \neq 1)$	$y' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
10. $y = \ln u$	$y' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
11. $y = a^u\ (a > 0,\ a \neq 1)$	$y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
12. $y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$
13. $y = u^a$, где $u = u(x)$, $a \in R$	$y' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'$
14. $y = u(x)^{v(x)}$	$y' = u^v \ln u v' + v u^{v-1} \cdot u'$

Производные тригонометрических функций

1. $y = \sin x.$

Дадим x приращение Δx, тогда функция получит приращение Δy:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x,$$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

$y = \sin u$, где $u = u(x)$. Применяя теорему о производной сложной функции, можно записать, что $y' = \cos u \cdot u'_x$.

Итак, $(\sin u)' = \cos u \cdot u'.$

2. $y=\cos u$.

$$\cos u=\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right);$$

$$y'=(\cos u)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-u\right)'=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\cdot(-u')=-\sin u\cdot u',\ (\cos u)'=-\sin u\cdot u'_x.$$

3. $y=\operatorname{tg}u$, $\operatorname{tg}u=\dfrac{\sin u}{\cos u}$, $\cos u\neq 0$.

Применяя правило производной дроби, получим

$$y'=\frac{(\sin u)'\cdot\cos u-\sin u\cdot(\cos u)'}{\cos^2 u}=\frac{\cos^2 u\cdot u'+\sin^2 u\cdot u'}{\cos^2 u}=\frac{u'}{\cos^2 u}.$$

$$(\operatorname{tg}u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'.$$

4. $y=\operatorname{ctg}u,\ \operatorname{ctg}u=\dfrac{\cos u}{\sin u},\ \sin u\neq 0,\ y'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u',\ (\operatorname{ctg}u)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$.

5. $y=\arcsin u,\ u\in[-1;1],\ y\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$u=\sin y$ – обратная функция, в интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ эта функция строго монотонная. Продифференцируем ее по y и получим

$$u'_y=\cos y\cdot y'\Rightarrow y'_x=\frac{u'}{\cos y}=\frac{u'}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$. «+» перед корнем, так как $\cos y > 0$ на $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

6. Аналогично доказывается, что если $y = \arccos u$, то

$$y'_x = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},\ \left(\arccos u\right)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

7. $y = \operatorname{arctg} u,\ u \in (-\infty; \infty),\ y = \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right).$

$u = \operatorname{tg} y$ – обратная функция для функции $y = \operatorname{arctg} u$.

Продифференцируем $u = \operatorname{tg} y$ по y и получим

$$u' = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' \Rightarrow y' = \cos^2 y \cdot u'.$$

$$y' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} \cdot u' \Rightarrow y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'. \quad \left(\operatorname{arctg} u\right)' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

8. Аналогично доказывается, что если $y = \operatorname{arcctg} u$, то $\left(\operatorname{arcctg} u\right)' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$.

Производная логарифмической функции

9. Дана функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Дадим фиксированному значению $x \in D(y)$ приращение Δx, тогда

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x+\Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log_a\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=$$

$$=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\cdot\ln a}.$$

Для сложной функции $y=\log_a u(x)$ имеем $y'=\dfrac{u'}{u\cdot\ln a}$.

10. Для функции $y=\ln u$ $y'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$.

Логарифмическое дифференцирование

Прием дифференцирования функций, примененный после ее логарифмирования, называется *логарифмическим дифференцированием*.

Этот прием чаще применяется, если необходимо продифференцировать:

1) произведение нескольких функций;
2) дробь, числитель и знаменатель которой содержат произведения функций;
3) корни из дробей;
4) функцию вида $y=\left[f(x)\right]^{\psi(x)}$.

Пример 5.1. Продифференцировать функцию $y=\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.

Решение. Прологарифмируем данную функцию по основанию e и получим

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{1}{2}\Big(\ln\left(ax+b\right)-\ln\left(cx+d\right)\Big).$$

После дифференцирования обеих частей имеем $\dfrac{1}{y}\cdot y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{ax+b}-\dfrac{c}{cx+d}\right)$, откуда $y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\left(\dfrac{a}{ax+b}-\dfrac{c}{cx+d}\right)$.

Производная показательной функции

11. $y = a^u$, где $u = u(x)$.

Прологарифмируем функцию по основанию a:

$$u \cdot \log_a a = \log_a y \Rightarrow u = \log_a y.$$

Дифференцируя по x левую и правую части полученного равенства по правилу дифференцирования сложной функции, считая y функцией x, получим

$$u' = \frac{1}{y \cdot \ln a} \cdot y' \Rightarrow y' = y \cdot \ln a \cdot u' \qquad y' = a^u \cdot \ln a \cdot u', \ \left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'.$$

12. Если $y = e^u$, где $u = u(x)$, то $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

Производная степенной функции

13. $y = u^a$, где $a \in R,\ u(x) \neq 0$.

Прологарифмируем функцию по основанию e:

$$\ln y = \ln u^a; \ \ln y = a \cdot \ln u.$$

Дифференцируя левую и правую части полученного равенства, получим

$$\frac{y'}{y} = a \cdot \frac{u'}{u} \Rightarrow y' = a \cdot y \cdot \frac{u'}{u}; \qquad y' = a \cdot u^a \cdot \frac{u'}{u};$$

$$y' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'; \qquad (u^a)' = a \cdot u^{a-1} \cdot u'.$$

Пример 5.2. Найти производную функции $y = (3x^2 + 7)^5 - \log_2 e^{2x^2} + \operatorname{arctg} 2x$.

Решение. Применяя правило дифференцирования алгебраической суммы и используя таблицу основных производных, получаем

$$y' = 5(3x^2+7)^4 \cdot (3x^2+7)' - \frac{1}{e^{2x^2} \cdot \ln 2} \cdot (e^{2x^2})' + \frac{1}{1+4x^2} \cdot (2x)'$$

$$y' = 5(3x^2+7)^4 \cdot 6x - \frac{e^{2x^2} \cdot 4x}{e^{2x^2} \cdot \ln 2} + \frac{2}{1+4x^2}$$

или

$$y' = 30x(3x^2+7)^4 - \frac{4x}{\ln 2} + \frac{2}{1+4x^2}.$$

Производная показательно-степенной функции

14. $y = u^v$, где $u = u(x), v = v(x)$ дифференцируемы, $u(x) > 0$.

Прологарифмируем это равенство по основанию *e*: $\ln y = v \cdot \ln u$, а затем дифференцируем по *x*:

$$\frac{y'}{y} = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \Rightarrow y' = y\left(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{u'}{u} \right)$$

или

$$(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$$

Таким образом, производная показательно-степенной функции равна сумме производных этой функции, если ее рассматривать сначала как показательную, а затем как степенную.

Пример 5.3. Пусть $y = (\cos 2x)^{\sin\frac{x}{2}}$, тогда

$$y' = (\cos 2x)^{\sin\frac{x}{2}} \cdot \ln\cos 2x \cdot \left(\sin\frac{x}{2} \right)' + \sin\frac{x}{2} \cdot (\cos 2x)^{\sin\frac{x}{2}-1} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2.$$

$$y' = (\cos 2x)^{\sin\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} \cdot \ln\cos 2x - \sin\frac{x}{2} \cdot \frac{2\sin 2x}{\cos 2x} \right).$$

$$y' = (\cos 2x)^{\sin\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} \cdot \ln\cos 2x - 2\sin\frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} 2x \right).$$

5.7. Дифференцирование функции, заданной неявно

Если зависимость между аргументом x и функцией y задана уравнением $F(x,\ y) = 0$, неразрешенным относительно y, то такая зависимость определяет y как неявную функцию от x. Для того, чтобы найти производную от функции, заданной неявно, надо все члены $F(x, y) = 0$ перенести в одну часть, продифференцировать по x все члены, помня, что $y = f(x)$, применяя теорему о дифференцировании сложной функции, а затем разрешить данное равенство относи-тельно $y'(x)$.

Пример 5.4. Найти производную $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ функции, заданной неявно уравнением $x^2 - 2xy + y^3 = 1$.

Решение. Дифференцируем обе части равенства, помня, что y есть функция от x: $2x - 2y - 2xy' + 3y^2 \cdot y' = 0$.

Решая уравнение относительно y', находим, что $y' = \dfrac{2(y-x)}{3y^2 - 2x}$.

5.8. Дифференцирование функции, заданной параметрически

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями $x = x(t),\ y = y(t)$.

Пусть функции $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ определены в некоторой окрестности точки $t_0 \in T$ и одна из этих функций, например, $x = x(t)$, дифференцируема, а следовательно, непрерывна и монотонна в указанной окрестности, тогда для функции $x(t)$ существует обратная функция $t = t(x)$, которая также дифференцируема. Тогда функция $y = f(x)$ может быть представлена как сложная функция $y = y(t) = y(t(x))$. По правилам дифференцирования сложной и обратной функции получим $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t}$.

Итак,

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \ t \in T. \\ x = x(t) \end{cases} \qquad (5.13)$$

Пример 5.5. Найти производную функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$.

Решение. Согласно формуле (5.13) имеем $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\cos 2t \cdot 2}{-\sin 2t \cdot 2} = -\operatorname{ctg} 2t.$

Ответ. $\begin{cases} y'_x = -\operatorname{ctg} 2t \\ x = \cos 2t \end{cases}$.

5.9. Производные высших порядков

I. $y = f(x)$ – дифференцируемая функция в каждой точке некоторого интервала.

$y' = f'(x)$ – функция от x и может, в свою очередь, иметь производную.

$\left(y'_x\right)'_x = y''_x$ – производная 2-го порядка.

$\left(y''_x\right)'_x = y'''_x$ – производная 3-го порядка.

Определение. Производной n-го порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$ порядка и обозначается $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

Пример 5.6. Найти производную 5-го порядка для функции $y = x^5 + \cos 2x$.

Решение. Выполняя последовательное дифференцирование, находим

$$y' = 5x^4 - 2\sin 2x;\;\; y'' = 20x^3 - 4\cos 2x;\;\; y''' = 60x^2 + 8\sin 2x;$$

$$y^{(IV)} = 120x + 16\cos 2x;\quad y^{(V)} = 120 - 32\sin 2x.$$

II. Неявно заданные функции.

Пример 5.7. Найти производную 2-го порядка от функции $y = f(x)$, заданной уравнением $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение. Найдем первую производную $2x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{y}$.

Дифференцируя вторично, имеем

$$y'' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\dfrac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{a^2}{y^3}.$$

III. Параметрически заданные функции: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\; t \in T.$

Была выведена формула (5.13) для вычисления первой производной:

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} \\ x = x(t) \end{cases}.$$

Поскольку вторая производная от y по x есть первая производная от y'_x по x, то при нахождении второй производной снова находим первую производную от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} y''_x = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'(t)} \\ x = x(t) \end{cases},\quad \begin{cases} y'''_x = \dfrac{\left(y''_x\right)'_t}{x'_t} \\ x = x(t) \end{cases} \quad \text{и т. д.}$$

Пример 5.8. Найти y'''_x, если $\begin{cases} y = \cos^3 t \\ x = t + \dfrac{1}{2}\sin 2t \end{cases}$.

Решение. Выполняя последовательные дифференцирования, имеем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3\cos^2 t(-\sin t)}{1+\cos 2t} = \frac{-3\cos^2 t \cdot \sin t}{2\cos^2 t} = -\frac{3}{2}\sin t.$$

$$y''_x = \frac{\left(-\dfrac{3}{2}\sin t\right)'}{2\cos^2 t} = \frac{-\dfrac{3}{2}\cos t}{2\cos^2 t} = -\frac{3}{4\cos t}.$$

$$y'''_x = \frac{\left(-\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{\cos t}\right)'}{2\cos^2 t} = \frac{-\dfrac{3}{4}\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}}{2\cos^2 t} = -\frac{3}{8}\frac{\sin t}{\cos^4 t}.$$

5.10. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x. По определению производной имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$.

По теореме о разности между функцией и ее пределом можно записать $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) + a(x)$, где $a(x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$, $\Delta y = y'(x)\cdot\Delta x + a(x)\cdot\Delta x$. Первое слагаемое $y'(x)\cdot\Delta x$ является главной частью приращения Δy функции.

Определение. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется главная часть приращения функции, линейная относительно приращения аргумента.

Дифференциал обозначается через $\mathrm{d}y$ или $\mathrm{d}f(x)$: $\mathrm{d}y \overset{\mathrm{def}}{=} y'(x)\cdot\Delta x$.

Если x – независимая переменная, то $\Delta x = \mathrm{d}x$:

$$\mathrm{d}y = y'(x)\cdot \mathrm{d}x. \qquad (5.14)$$

Пример 5.9. $y=\cos^5 \ln x$. $\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x = -5\cos^4 \ln x \cdot \sin\ln x \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x дифференциал, то при малых Δx, пренебрегая нелинейным слагаемым, получим $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ или $f(x+\Delta x) - f(x) \approx \mathrm{d}y$.

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + \mathrm{d}y. \qquad (5.15)$$

Формула (5.15) дает возможность найти значение функции f в некоторой точке $x+\Delta x$, если известно значение функции f и ее производной в точке x.

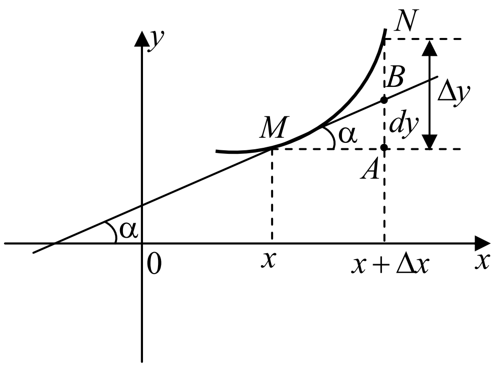
Пример 5.10. Вычислить tg46°.

Решение. $f(x+\Delta x) \approx f(x) + \mathrm{d}f(x)$.

$$\mathrm{tg}(x+\Delta x) \approx \mathrm{tg}\, x + \frac{1}{\cos^2 x}\cdot \Delta x, \quad x = 45°, \quad \Delta x = 1° \approx 0{,}0175,$$

$$\mathrm{tg}\, 46° \approx \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}}\cdot 0{,}0175, \quad \mathrm{tg}\, 46° \approx 1{,}035.$$

5.11. Геометрический смысл дифференциала



Из ΔABM получим $\dfrac{|AB|}{|MA|} = \operatorname{tg}\alpha$ или $\dfrac{|AB|}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha.$

$$|AB| = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x = y'(x)\cdot \Delta x \Rightarrow |AB| = \mathrm{d}y.$$

Таким образом, дифференциал функции f с геометрической точки зрения есть приращение ординаты касательной, проведенной к данной кривой в точке M при переходе точки M с абсциссой x в точку N с абсциссой $x + \Delta x$ по кривой.

5.12. Основные правила нахождения дифференциала

1. $\mathrm{d}c = 0,$ где c – const.
2. $\mathrm{d}(c \cdot u(x)) = c \cdot \mathrm{d}u.$
3. $\mathrm{d}(u(x) + v(x)) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v,$ где $u(x), v(x)$ – дифференцируемые функции.
4. $\mathrm{d}(u \cdot v) = v\mathrm{d}u + u \cdot \mathrm{d}v.$
5. $\mathrm{d}\dfrac{u}{v} = \dfrac{vdu - u \cdot \mathrm{d}v}{v^2}.$

Докажем, например, что $\mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v.$ По условию $y = u(x) + v(x),$ тогда $\mathrm{d}y = y' \cdot \mathrm{d}x = (u+v)' \cdot \mathrm{d}x = u'\mathrm{d}x + v'\mathrm{d}x = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v.$

5.13. Дифференциал сложной функции

Пусть $y = f(u),$ где $u = \varphi(x)$ – дифференцируемая функция. $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция.

Используя правило дифференцирования сложной функции можно записать

$$\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x = f'(u)\cdot u'(x)\cdot \mathrm{d}x = f'(u)\cdot \mathrm{d}u. \qquad (5.16)$$

Сравнивая (5.14) и (5.16), заключаем, что дифференциал функции выражается одной и той же формой, как в случае функции от независимой переменной, так и в случае функции от функции, т. е. дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал аргумента, где аргумент может быть и независимой переменной и функцией от другой независимой переменной. Это свойство дифференциала называется *инвариантностью формы дифференциала*.

При этом следует иметь в виду, что в формуле (5.14) $\mathrm{d}x = \Delta x$, а в формуле (5.16) дифференциал $\mathrm{d}u \neq \Delta u$ (приращение), так как u является промежуточным аргументом, зависящим от x.

5.14. Дифференциалы высших порядков

$y = f(x)$ – дифференцируемая функция n раз.

Определение. Дифференциалом 2-го порядка функции f называется дифференциал от дифференциала 1-го порядка и обозначается $\mathrm{d}^2 y$.

$$\mathrm{d}^2 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}(y'(x)\mathrm{d}x) = (y'(x)\mathrm{d}x)' \cdot \mathrm{d}x = (y'(x))' \cdot (\mathrm{d}x)^2 = y''(x) \cdot (\mathrm{d}x)^2,$$

$$\mathrm{d}^2 y \overset{\mathrm{def}}{=} y''(x) \cdot (\mathrm{d}x)^2, \tag{5.17}$$

$$\mathrm{d}^3 y = \mathrm{d}(\mathrm{d}^2 y) = y'''(x) \cdot (\mathrm{d}x)^3.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{d}^n y = y^{(n)}(x) \cdot (\mathrm{d}x)^n. \tag{5.17'}$$

Формула справедлива в том случае, если x является независимой переменной; если x является зависимой переменной, то формула (5.17') нарушается.

Пример 5.11. $y = \cos 5x$. Найти $\mathrm{d}^2 y$.

Решение. $y'(x) = -5\sin 5x$, $y'' = -25\cos 5x$.

$\mathrm{d}^2 y = -25\cos 5x(\mathrm{d}x)^2$.

5.15. Теоремы о среднем

Теорема Ролля (о нуле производной)

М. Ролль (1648–1719 гг.) – французский математик.

Если функция $y = f(x)$:

1) определена и непрерывна на $[a;b]$,

2) дифференцируема на $(a;b)$,

3) и на концах принимает равные значения: $f(a) = f(b)$, то существует по крайней мере одна точка $c \in (a;b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она имеет на этом отрезке наибольшее значение M и наименьшее m.

Если $M = m$, то $f(x)$ постоянна, т. е. при всех значениях аргумента x имеет постоянное значение $f(x) = m$ и тогда в любой точке отрезка будет $f'(x) = 0 \Rightarrow \forall\, c \;\; f'(c) = 0$ и теорема доказана.

Предположим, что $M \neq m$.

Так как значения функции $f(x)$ на концах отрезка равны, то она достигает одно из этих значений (M или m) внутри отрезка. Предположим, что это наибольшее значение, которое достигается в точке $x = c$, $a < c < b$: $f(c) = M$.

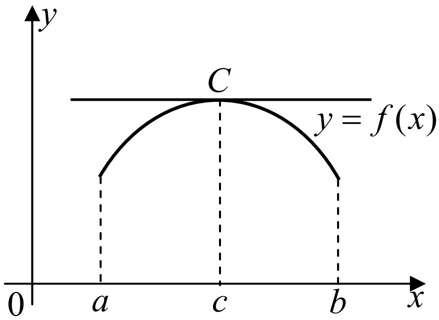
Рассмотрим приращение функции в окрестности точки c. Так как $f(c)$ – наибольшее значение функции, то $\Delta f(c) = f(c + \Delta x) - f(c) \le 0$.

При $\Delta x > 0$ $\dfrac{\Delta f(c)}{\Delta x} \le 0$, при $\Delta x < 0$ $\dfrac{\Delta f(c)}{\Delta x} \ge 0$.

По условию функция $f(x)$ дифференцируема во всех внутренних точках отрезка $[a;b]$, значит, и в точке $x = c$, следовательно, она имеет производную в этой точке $f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0, \Delta x > 0} \dfrac{\Delta f(c)}{\Delta x} \le 0$ (предел справа), $f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0, \Delta x < 0} \dfrac{\Delta f(c)}{\Delta x} \ge 0$ (предел слева).

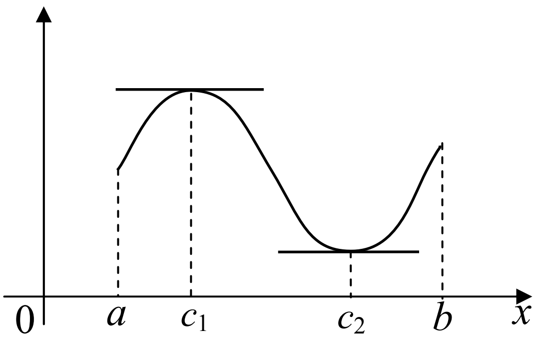
По определению производной пределы слева и справа должны быть равны между собой, следовательно, $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля



Касательная к кривой $y = f(x)$ в точке C с абсциссой $x = c$ параллельная оси x.

На следующем рисунке таких точек две.



Теорема Лагранжа (о конечных приращениях)

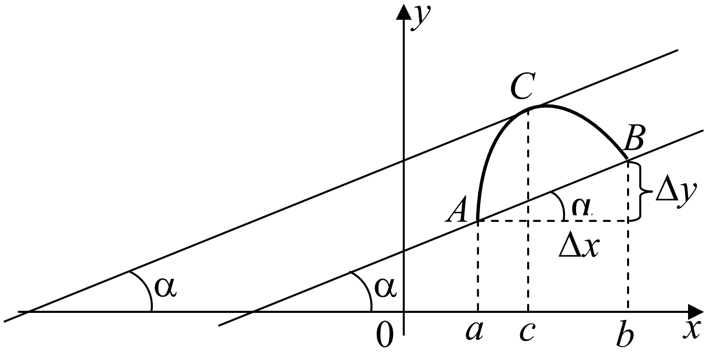
Ж. Лагранж (1736–1813 гг.) – французский математик.

Если функция $y = f(x)$:

1) непрерывна на $[a; b]$,

2) дифференцируема на $(a; b)$, тогда существует по крайней мере одна точка $c \in (a; b)$, для которой выполняется равенство $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Даны точки $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$.



Запишем уравнение секущей *AB*:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A}, \text{ т. е. } \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

$$y_{\text{сек.}} = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - y_{\text{сек.}}$, т. е. $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$

Покажем, что $F(x)$ удовлетворяет всем трем условиям теоремы Ролля:

1) она непрерывна, как сумма непрерывных функций;
2) дифференцируема, как сумма дифференцируемых функций;
3) $F(a) = F(b) = 0$.

Поэтому для $F(x)$ справедлива теорема Ролля $\Rightarrow F'(c) = 0$.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0 \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Из чертежа видно, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=k_{\text{сек.}},\ \ f'(c)=k_{\text{кас.}}.$

Теорема означает геометрически, что найдется такая точка C с абсциссой c, касательная в которой к данной кривой параллельна секущей AB.

Замечание. Если в формуле Лагранжа положить $f(b)=f(a),$ то получим теорему Ролля, т. е. теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Теорема Коши (об отношении конечных приращений)

О. Коши (1789–1857 гг.) – французский математик.

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $\left[a;b\right]$ и дифференцируемы на $\left(a;b\right)$ и $\varphi'(x)\neq 0$ в $\left(a;b\right),$ то существует точка $c\in\left(a;b\right)$ такая, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$

Доказательство. Покажем, что $\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0.$

Предположим противное, что $\varphi(b)-\varphi(a)=0 \Rightarrow \varphi(b)=\varphi(a)$ и тогда функция $\varphi(x)$ будет удовлетворять условиям теоремы Ролля, т. е. найдется такая точка $x=c\ (a<c<b),$ что $\varphi'(c)=0,$ но это противоречит условию, так как $\varphi'(x)\neq 0.$ Следовательно, $\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0.$

Для доказательства данной теоремы рассмотрим функцию

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\cdot(\varphi(x)-\varphi(a)).$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем трем условиям теоремы Ролля:

1) она непрерывна, как сумма непрерывных функций;
2) она дифференцируема, как сумма дифференцируемых функций;
3) $F(a) = F(b) = 0$.

Поэтому внутри отрезка $[a; b]$ найдется такая точка $x = c \ (a < c < b)$, что $F'(c) = 0$.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot \varphi'(x).$$

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \cdot \varphi'(c) = 0.$$

Следовательно, $\dfrac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

5.16. Правило Бернулли–Лопиталя

Иоганн Бернулли (1667–1748 гг.) – швейцарский математик.

Гийом Франсуа де Лопиталь (1661–1704 гг.) – французский математик.

Правило Бернулли–Лопиталя служит для раскрытия неопределенностей $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

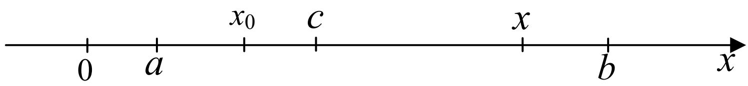
Теорема. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$:

1) определены и дифференцируемы на (a, b), за исключением быть может точки x_0, причем $\varphi(x) \neq 0$ и $\varphi'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a, b)$;

2) а) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ либо б) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$ ($+\infty$ или $-\infty$), то предел отношения функций при $x \to x_0$ равен пределу отношения их производных, если последний предел существует, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Приведем доказательства теоремы для случая раскрытия неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Доказательство.



Запишем теорему Коши для отрезка $[x_0, x]$: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$, где точка $c\in(x_0;x)$. Но по условию $f(x_0)=\varphi(x_0)=0$, тогда последнее равенство запишется так: $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

Перейдем к пределу при $x\to x_0$ (заметим, что $c\to x_0$).

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{c\to x_0}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\frac{f'(x_0)}{\varphi'(x_0)},\text{ но } f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}f'(x),\ \varphi'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\varphi'(x).$$

Итак, $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Пример 5.12. Вычислить $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 4x}$.

Решение. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}\cdot 2}{\cos 4x\cdot 4}=\frac{1}{2}$.

Замечания.

1) если производные от функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы, что и сами функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, то правило Бернулли–Лопиталя можно применять несколько раз.

Пример 5.13.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$$

2) правило Бернулли–Лопиталя справедливо и в том случае, когда $x_0=\infty$;

3) неопределенности вида 1^∞, 0^0, ∞^0 приводятся к случаям $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ с помощью предварительного логарифмирования заданной функции.

Пример 5.14. Найти $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x=\left(0^0\right)$. Обозначим $y=x^x$, тогда $\ln y=x\ln x$.

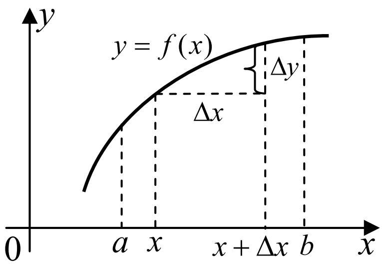
$$\lim_{x\to 0+0}\ln y=\lim_{x\to 0+0}x\cdot\ln x=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+0}(-x)=0.$$

$$\lim_{x\to 0+0}\ln y=\ln\lim_{x\to 0+0}y=0.\quad \lim_{x\to 0+0}y=1.\quad \lim_{x\to 0+0}x^x=1.$$

6. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

6.1. Возрастание и убывание функции

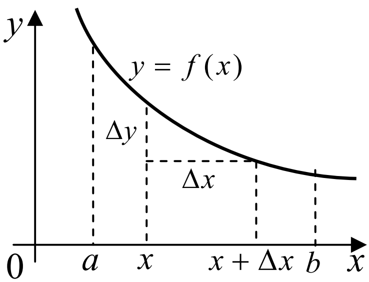
Определение. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* в некотором интервале, если большему значению x из этого интервала соответствует большее значение функции и меньшему значению x соответствует и меньшее значение функции.



Если $\Delta x > 0$, то $f(x+\Delta x) > f(x)$.

Если $\Delta x < 0$, то $f(x+\Delta x) < f(x)$.

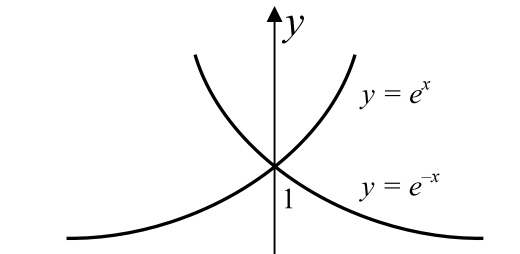
Определение. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* в некотором интервале, если большему значению x из этого интервала соответствует меньшее значение функции и меньшему значению x соответствует большее значение функции.



Если $\Delta x > 0$, то $f(x+\Delta x) < f(x)$.

Если $\Delta x < 0$, то $f(x+\Delta x) > f(x)$.

Например, $f(x) = e^x$ – возрастающая функция на R, $f(x) = e^{-x}$ – убывающая на R.



Теорема (необходимый признак возрастания функции). Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает на некотором интервале $(a; b)$, то производная этой функции неотрицательна в этом интервале, т. е. $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a; b)$.

Докажем теорему.

Доказательство. $f(x)$ на $(a; b)$ возрастает и $\exists f'(x)$. Дадим x приращение Δx, тогда y получит приращение Δy. Так как $f(x)$ возрастает на $(a; b)$, то на основании определения $f(x+\Delta x) > f(x)$ при $\Delta x > 0$ и $f(x+\Delta x) < f(x)$ при $\Delta x < 0$.

В обоих случаях $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Переходя к пределу в последнем неравенстве, получим $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \geq 0$.

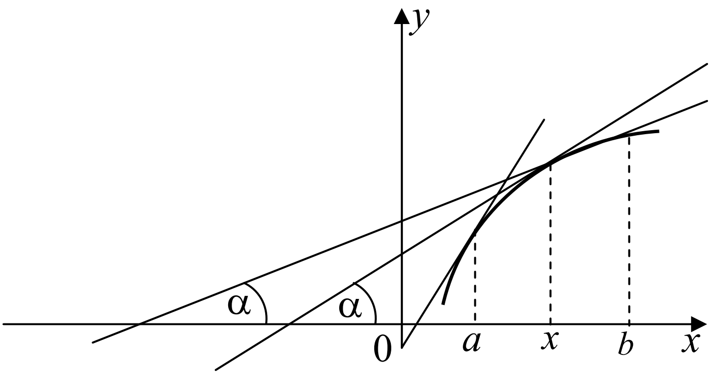
Теорема (необходимый признак убывания функции). Если дифференцируемая функция $f(x)$ убывает на некотором интервале $(a; b)$, то ее производная неположительна в этом интервале, т. е. $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a; b)$.

Теорема доказывается аналогично.

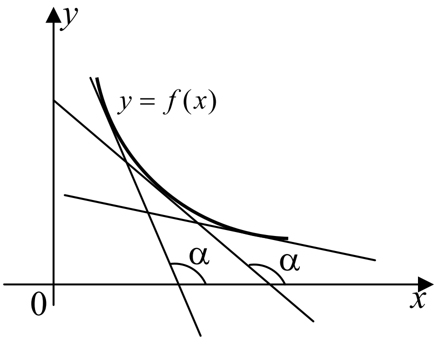
Геометрический смысл теорем

$f(x)$ – возрастающая функция.

$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha$ – острый угол.



Если функция $f(x)$ на $(a;b)$ возрастает, то касательная к кривой $y=f(x)$ в каждой точке на этом промежутке образует с осью Ox острый угол или в отдельных случаях касательная горизонтальна.



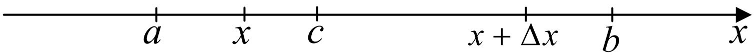
$y=f(x)$ – убывающая функция на $(a;b)$.

$f'(x)=\operatorname{tg}\alpha\le 0\Rightarrow\alpha$ – тупой угол.

Касательная к графику функции $y=f(x)$ в каждой точке на этом промежутке образует с осью Ox тупой угол или в отдельных случаях касательная горизонтальна.

Теорема (достаточный признак возрастания функции). Если $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и ее производная на этом интервале положительна, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Доказательство. Пусть $x\in(a;b)$.



Рассмотрим два любых значения x и $x+\Delta x$, которые принадлежат интервалу $(a;b)$. Применим к отрезку $[x, x+\Delta x]$ и к данной функции теорему Лагранжа: $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(c)\cdot\Delta x$.

Так как по условию $f'(c)>0$, то знак произведения, стоящего в правой части, зависит от Δx: $f(x+\Delta x)-f(x)>0$, если $\Delta x>0$.

$f(x+\Delta x)-f(x)<0$, если $\Delta x<0$, а это означает, что функция возрастает на данном интервале.

Аналогично доказывается *теорема* (достаточный признак убывания функции).

Если $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и ее производная в этом интервале отрицательна, то сама функция $f(x)$ на этом интервале убывает.

Интервалы возрастания и убывания функции называются *интервалами монотонности*.

Точки, в которых $y' = f'(x) = 0,$ называются *стационарными точками*.

Для нахождения интервалов монотонности нужно:

1) найти область определения функции.

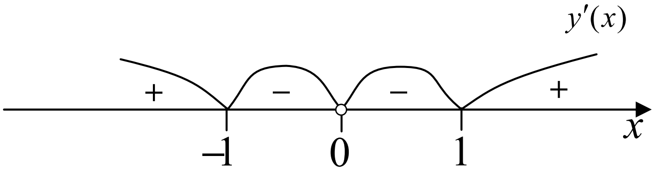
2) найти первую производную и критические точки (точки, в которых первая производная равна нулю или не существует). Найденными точками область определения разбивается на интервалы, в которых первая производная имеет определенный знак;

3) найти знак первой производной в каждом из этих интервалов, причем, если $y' > 0,$ то функция возрастает, если $y' < 0,$ то функция убывает.

Пример 6.1. Найти интервалы монотонности функции $y = x + \dfrac{1}{x}.$

Решение. Функция $y = x + \dfrac{1}{x}$ определена, непрерывна и дифференцируема на интервалах $(-\infty, 0) \cup (0, \infty).$

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}. \qquad y'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$



Ответ. $(-\infty, -1); (1, +\infty)$ – интервалы возрастания функции.

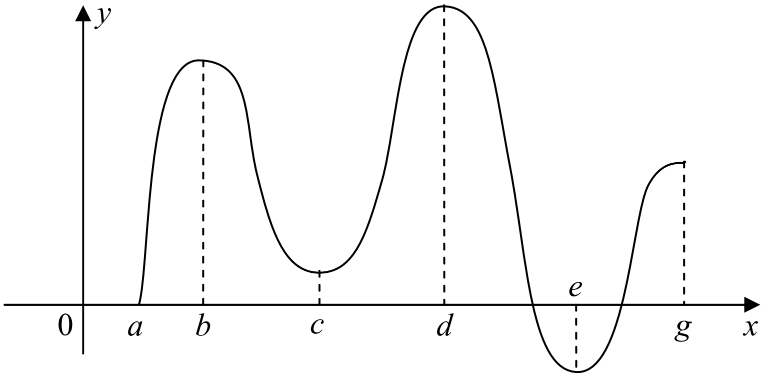
$(-1, 0);$ $(0, 1)$ – интервалы убывания функции.

6.2. Экстремум функции одной переменной

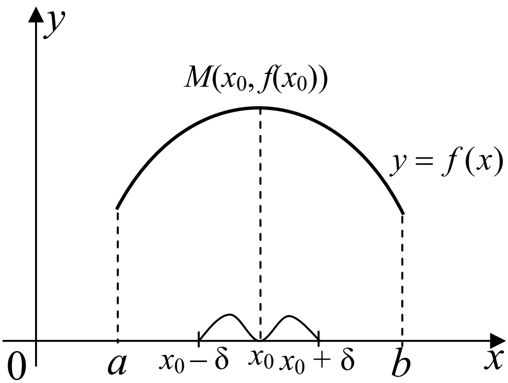
Функции, обычно встречающиеся на практике, не являются возрастающими или убывающими во всей области своего задания.

Чаще дело обстоит так, что промежуток, где задана функция, распадается на несколько участков возрастания и убывания функции.

Особый интерес представляют точки *b*, *c*, *d*, *e*, отделяющие друг от друга участки с различным поведением функции. Эти точки называются точками *экстремума функции*. Точки экстремума двух видов: точки максимума, точки минимума.



Определение. Точка x_0 называется точкой максимума функции $y = f(x)$, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \in \dot{O}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

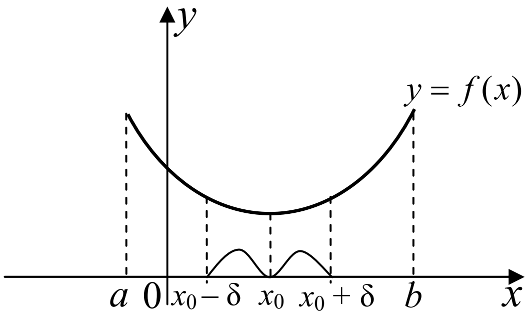


Обозначим $x_0 - \max$.

$$\max f(x) = f(x_0); \ \ x \in O_\delta(x_0).$$

$$f(x_0) > f(x_0 + \Delta x) \text{ для } \Delta x > 0 \text{ и } \Delta x < 0\,. \quad f(x_0) > f(x) \ \forall\, x \in O_\delta(x_0).$$

Определение. Точка x_0 называется точкой минимума функции $y = f(x)$, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \in \dot{O}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.



Обозначим $x_0 - \min$.

$$\min f(x) = f(x_0); \ \ x \in O_\delta(x_0).$$

$$f(x_0) < f(x_0 + \Delta x) \text{ для } \Delta x > 0 \text{ и } \Delta x < 0. \quad f(x_0) < f(x) \ \forall\, x \in O_\delta(x_0).$$

Точки минимума и максимума функции называют точками экстремума функции, а максимумы и минимумы функции называются *экстремумами функции*.

Из определений следует, что экстремумы функции носят локальный характер. Значение $f(x_0)$ называют локальным максимумом (минимумом) функции.

Теорема (необходимое условие существования экстремума функции)

Если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает экстремума, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Точки, в которых $f'(x)$ равна нулю либо не существует, называются *критическими.*

Но необходимый признак не является достаточным и, следовательно, не в каждой критической точке функция достигает экстремума.

Критические точки нужно исследовать.

Теорема (первый достаточный признак существования экстремумов функции)

Критическая точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, если производная $f'(x)$ при переходе x через x_0 меняет знак. Если $f'(x)$ при переходе через критическую точку x_0 меняет знак с «+» на «–», то x_0 – точка локального максимума; если $f'(x)$ при переходе через критическую точку x_0 меняет знак с «–» на «+», то x_0 – точка локального минимума; если $f'(x)$ при переходе через критическую точку x_0 не меняет знак, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Например, дана функция $y = x^3$. $y' = 3x^2$, $y' = 0$ при $x = 0$, $x_0 = 0$ – стационарная точка.

$y' = 3x^2 > 0$ при $x > 0$ и при $x < 0$, т. е. y' переходя через $x_0 = 0$ не меняет знак. Следовательно, $x_0 = 0$ не является точкой экстремума.

Теорема (второй достаточный признак существования экстремумов функции)

Стационарная точка x_0 функции $y = f(x)$, дважды дифференцируемой в $O_\delta(x_0)$, является точкой локального минимума $f(x)$, если $f''(x_0) > 0$, и точкой локального максимума, если $f''(x_0) < 0$.

Доказательство. По условию x_0 – стационарная точка, следовательно, $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$ (по условию), тогда 1) $f''(x_0)<0$ или 2) $f''(x_0)>0$.

Пусть $f''(x_0)<0$, то в силу непрерывности $f''(x)$ она будет меньше нуля и в $O_\delta(x_0)$, т. е. $f''(x_0)<0$ в $O_\delta(x_0)$, но $f''(x)=(f'(x))'<0$, то $f'(x)$ убывает в $O_\delta(x_0)$, а в самой точке x_0 $f'(x_0)=0$, следовательно, в $O_\delta(x_0)$ производная функции $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–».

В силу первого достаточного признака существования экстремумов функции точка x_0 является точкой локального максимума $f(x)$.

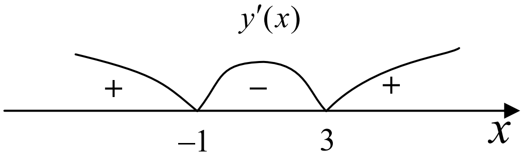
Аналогично доказывается и вторая часть теоремы.

Пример 6.2. Исследовать на экстремум функцию $y=2x^3-6x^2-18x+7$.

Решение. $D(y)$: $x\in(-\infty;\infty)$. Функция непрерывная, дважды дифференцируема на R.

$y'=6x^2-12x-18$, $y'=0$, $x_1=-1$, $x_2=3$ – точки стационарности.

Способ 1.



Следовательно, $x_{\max}=-1$, $y_{\max}=17$. $x_{\min}=3$, $y_{\min}=-47$.

Способ 2.

$$y''=12x-12,\ y''(-1)<0\Rightarrow x_{\max}=-1,\ y_{\max}=17\,.$$

$$y''(3)>0\Rightarrow x_{\min}=3,\ y_{\min}=-47.$$

Замечания.

1) Если y'' в критической точке равна 0 или не существует, то этот признак ответа не дает.

Например, $y=\sqrt[3]{x^2}$.

$D(y)$: $x \in (-\infty; \infty)$. $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, y' не существует при $x = 0$.

$x_0 = 0$ – критическая точка.

$y'' = \dfrac{-2}{9\sqrt[3]{x^4}}$ не существует при $x_0 = 0$. Следовательно, исследовать на экстремум можно только с помощью первой производной.

2) Второй достаточный признак существования экстремумов функции неприменим для исследования тех критических точек, где $f'(x)$ не существует, так как тогда нарушается условие теоремы о непрерывности второй производной.

Может оказаться, что в стационарной точке $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) = 0$. Тогда применяется следующая *теорема.*

Теорема (третий достаточный признак существования экстремумов функции)

Пусть $f(x)$ – n раз непрерывна дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, но $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Тогда:

1) если n – четное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума;

2) если n – четное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального минимума;

3) если n – нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.

6.3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке, тогда по свойству непрерывной функции на отрезке она достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значения по теореме Вейерштрасса.

Если функция непрерывна на $[a;b]$, то наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах отрезка или в точках локального экстремума функции $f(x)$. Наибольшее из них будет наибольшим, а наименьшее – наименьшим значением функции на данном отрезке.

Пример 6.3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$ на $[0;3]$.

Решение. $D(y)\colon x \in (-\infty;\infty)$. $[0;3] \in D(y)$.

$y'(x) = 3x^2 - 18x + 24$. $y' = 0 \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = 4 \notin [0;3]$.

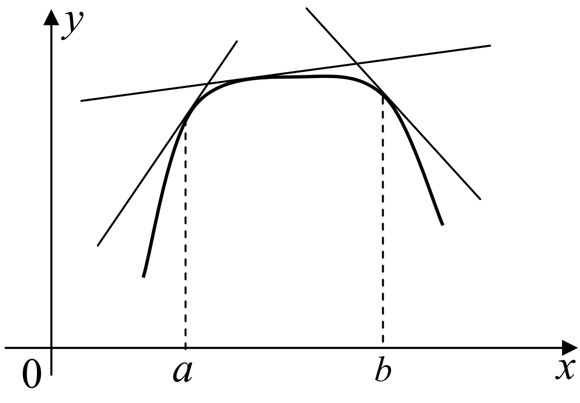
$y''(x) = 6x - 18$. $y''(2) < 0 \Rightarrow$ – точка $x = 2$ – точка максимума.

$x_{\max} = 2$, $y_{\max} = 2$, $y(0) = -18$; $y(3) = 0$.

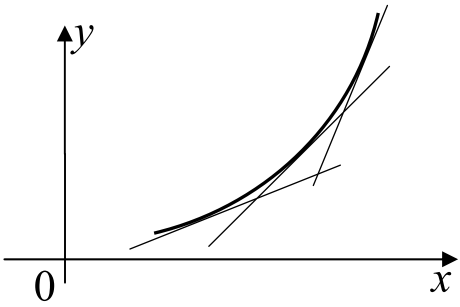
$\underset{[0;3]}{y_{\text{наиб.}}} = f(2) = 2 = M$. $\underset{[0;3]}{y_{\text{наим.}}} = f(0) = -18 = m$.

6.4. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Определение 1. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ является выпуклым на некотором интервале $(a;b)$, если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.



Определение 2. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ является вогнутым на интервале $(a; b)$, если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.

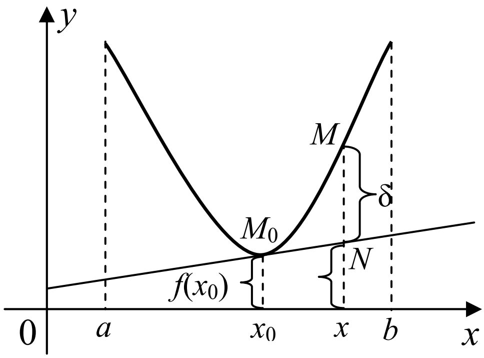


Рассмотрим признаки, по которым можно было бы судить о форме кривой на различных интервалах.

Теорема 1 (достаточный признак вогнутости графика функции). Если $y = f(x)$ на $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x) > 0 \;\; \forall\, x \in (a;b)$, то график функции на $(a;b)$ вогнутый.

Теорема 2 (достаточный признак выпуклости графика функции). Если $y = f(x)$ на $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x) < 0 \;\; \forall\, x \in (a;b)$, то график функции на $(a;b)$ выпуклый.

Доказательство теоремы 1.



Пусть $f''(x) > 0$ при $\forall\, x \in (a;b)$. Возьмем точку $x_0 \in (a;b)$ и покажем, что все точки графика функции $y = f(x)$ на $(a;b)$ лежат выше касательной к нему в точке M_0, т. е. что ординаты этих точек больше ординат точек касательной с одной и той же абсциссой.

Проведем касательную в точке M_0 с абсциссой x_0.

Сравним ординату y точки $M(x, y)$ кривой $y = f(x)$ с ординатой $\overline{y}$ точки $N(x, \overline{y})$, которая лежит на касательной M_0N.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0: $\overline{y} = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

$$\delta = y - \overline{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Применим теорему Лагранжа к разности $f(x) - f(x_0)$, получим $\delta = y - \overline{y} = f'(c)\cdot(x - x_0) - f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, где $c \in (x_0, x)$ или $\delta = (f'(c) - f'(x_0))\cdot(x - x_0)$.

Применим теорему Лагранжа к разности $f'(c) - f'(x_0)$, получим $\delta = y - \overline{y} = f''(d)\cdot(c - x_0)\cdot(x - x_0)$, где $x_0 < d < c$.

В последнем равенстве $f''(d) > 0$, $c - x_0 > 0$, $x - x_0 > 0$.

Таким образом, при $x \neq x_0$ имеем, $\delta = y - \overline{y} > 0$, т. е. $y > \overline{y}$, т. е. ординаты точек кривой больше ординат точек касательной при одной и той же абсциссе. Отсюда следует, что при $x \in (a;b)$ кривая $y = f(x)$ расположена выше своих касательных и, значит, по определению 2, график функции $y = f(x)$ вогнут на $(a; b)$.

Аналогично доказывается теорема 2.

Определение. Точка, отделяющая выпуклую часть графика дифференцируемой функции от вогнутой, называется *точкой перегиба кривой*.

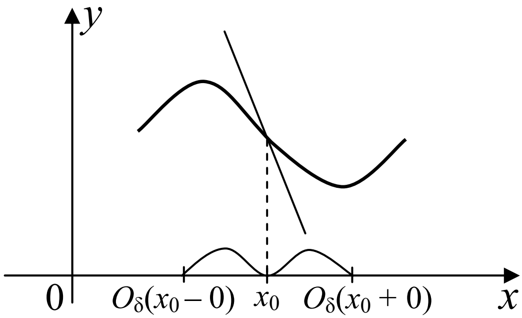
Очевидно, что касательная в точке перегиба должна пересекать непрерывную кривую.

Теорема (необходимый признак точки перегиба). Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в $O_\delta(x_0)$, где x_0 – точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.

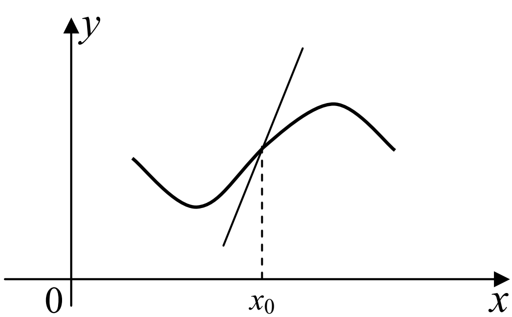
Теорема (достаточный признак точки перегиба). Если $f(x)$ дважды дифференцируема в $O_\delta(x_0)$ и если $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует и при переходе через значение x_0 производная $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой $M(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.

Доказательство.

Пусть $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует.



1. Пусть $f''(x)<0$ в $O_\delta(x_0-0)$ и $f''(x)>0$ в $O_\delta(x_0+0)$, тогда точка кривой с абсциссой x_0 отделяет интервал выпуклости от интервала вогнутости. Следовательно, точка кривой $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.



2. Если $f''(x)>0$ в $O_\delta(x_0-0)$ и $f''(x)<0$ в $O_\delta(x_0+0)$, то точка кривой с абсциссой x_0 отделяет интервал вогнутости от интервала выпуклости кривой. Следовательно, точка кривой $(x_0; f(x_0))$ есть точка перегиба.

Правило нахождения интервалов выпуклости, вогнутости и точек перегиба

1) Находим область определения функции.
2) Находим $f'(x)$ и $f''(x)$.
3) Находим критические точки второго рода (те точки, где $f''(x)$ не существует или $f''(x)=0$).
4) Находим знак $f''(x)$ до критической точки и после нее.
5) Устанавливаем, где график $y=f(x)$ выпуклый, а где вогнутый.
6) Находим точки перегиба (если они есть).

6.5. Асимптоты графика функции

Определение. Асимптотой графика функции $y=f(x)$ называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой.

Различают два вида асимптот:

1) вертикальные (их может быть бесконечное множество);
2) наклонные и горизонтальные (их не может быть более двух).

Определение. Прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $f(x)$ в точке $x=a$ бесконечен, т. е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\pm\infty$.

Например, $y=\dfrac{1}{x}$. $x=0$ – вертикальная асимптота, так как $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{x}=-\infty$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

Замечание. Непрерывные на R функции вертикальных асимптот не имеют. Такие асимптоты существуют только в точках разрыва второго рода функции $y = f(x)$.

Определение. Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $|x| \to \infty$, если $f(x)$ представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$.

Теорема (необходимое и достаточное условие существования наклонных асимптот). Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ имел наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b. \tag{6.1}$$

Доказательство необходимости. Предположим, что $y = kx + b$ – наклонная асимптота графика $y = f(x)$. Тогда на бесконечности справедливо представление $f(x) = kx + b + \alpha(x) \Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} (k + \frac{b + \alpha(x)}{x}) = k.$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Доказательство достаточности. Пусть существуют пределы (6.1), тогда по теореме – функция равна своему пределу плюс бесконечно малая функция – запишем

$$f(x) - kx = b + \alpha(x) \Rightarrow f(x) = kx + b + \alpha(x).$$

Последнее равенство означает, что прямая $y = kx + b$ – наклонная асимптота графика $y = f(x)$.

Итак, теорема доказана для случая $x \to \infty$. Доказательство теоремы для случая $x \to -\infty$ производится аналогично. Если $k = 0$, то асимптоту называют *горизонтальной*, ее уравнение $y = b$.

Пример 6.4. Найти асимптоты графика функции $y = x \cdot e^{-x}$.

Решение. Кривая не имеет вертикальных асимптот, так как она всюду непрерывна.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} x \cdot e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Итак, $y = 0$ – горизонтальная асимптота.

$k = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x} = \infty \Rightarrow$ график функции при $x \to -\infty$ асимптоты не имеет.

6.6. Общая схема исследования функции

При исследовании функции находим:

1) область определения функции, точки разрыва, вертикальные асимптоты;
2) наклонные и горизонтальные асимптоты графика функции;
3) симметрию графика функции (четность, нечетность), периодичность;
4) точки пересечения графика с осями координат;
5) промежутки монотонности, локальные экстремумы;
6) промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба;
7) по результатам исследований построение графика функции.

Пример 6.5. Провести полное исследование и построить график функции $y = \dfrac{x^2}{|x-1|}$.

Решение. Для построения графика функции проведем ее исследование по указанной схеме.

1. $D(y): x \in (-\infty;1) \bigcup (1;\infty)$.

Функция непрерывна на $D(y)$. $E(y): [0,\infty)$.

$x = 1$ – точка разрыва второго рода. $x = 1$ – вертикальная асимптота, так как $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^2}{|x-1|} = \lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^2}{|x-1|} = \infty$.

2. Для нахождения наклонных асимптот $y = kx + b$ вычисляем пределы по формулам (6.1).

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1.$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} - \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Уравнение наклонной асимптоты $y = x + 1$.

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x(1-x)} = -1.$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{1-x} + x \right) = -1.$$

Уравнение наклонной асимптоты $y = -x - 1$. Горизонтальных асимптот нет.

3. Функция не является периодической, так как $f(x+T) \neq f(x)$, $T \neq 0$.

Функция не является четной: $f(-x) \neq f(x)$.

Функция не является нечетной: $f(-x) \neq -f(x)$.

4. $x = 0$, $y = 0$. $y = 0$, $x = 0$.

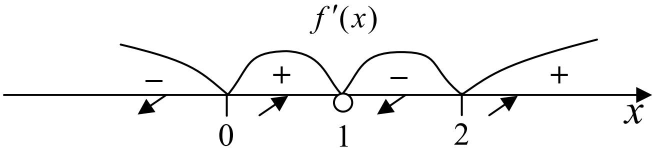
Следовательно, $O(0,\ 0)$ – точка пересечения графика функции с осями координат.

5. Исследуем функцию $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x-1} \text{ при } x>1,\\ \dfrac{x^2}{1-x} \text{ при } x<1\end{cases}$ на монотонность и локальный экстремум.

Находим первую производную:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2} \text{ при } x>1,\\ \dfrac{x(2-x)}{(x-1)^2} \text{ при } x<1.\end{cases}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0,\ x=2$ – критические точки первого рода.



Функция возрастает на интервалах (0; 1); (2; ∞).
Функция убывает на интервалах (–∞; 0); (1; 2).
Определяем локальные экстремумы:

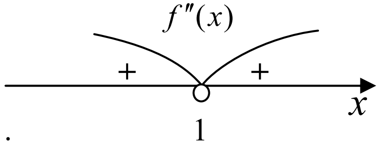
$$x_{\min}=0,\ y_{\min}=0,\ x_{\min}=2,\ y_{\min}=4.$$

6. Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость, точки перегиба.
Находим $f''(x)$:

$$f''(x)=\frac{(2x-2)\cdot(x-1)^2-2(x-1)\cdot(x^2-2x)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

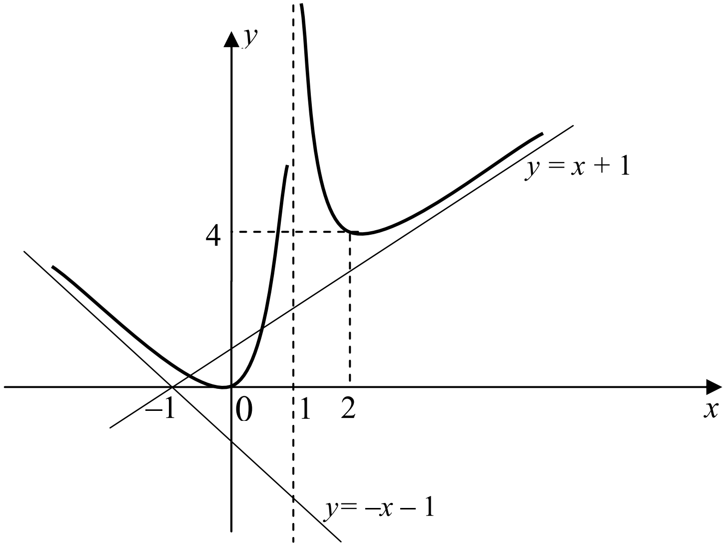
$$f''(x)=\frac{(2-2x)\cdot(x-1)^2-2(x-1)\cdot(2x-x^2)}{(x-1)^4}=\frac{-2}{(x-1)^3}.$$

Итак, $f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x-1)^3} & \text{при } x > 1, \\ -\dfrac{2}{(x-1)^3} & \text{при } x < 1. \end{cases}$



Следовательно, на интервалах (–∞; 1); (1; +∞) график функции вогнут. Точек перегиба у кривой нет.

7. Строим график.



Список использованной литературы

1. Герасимович, А. И. Математический анализ : справочное пособие : в 2 ч. / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Минск: Вышэйшая школа, 1989. – Ч. 1. – 287 с.

2. Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва: Наука, 1980. – 432 с.

3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – Москва: Наука, 1985. – Т. 1. – 432 с.

4. Линейная алгебра и основы математического анализа : сборник задач по математике для втузов : в 2 ч. / под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – Москва: Наука, 1981. – Ч. 1. – 368 с.

5. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – Москва: Наука, 1985. – 416 с.

6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике : учебное пособие : в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2013. – Ч. 1. – 272 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЕРОШЕВСКАЯ Елена Леонидовна

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов строительных специальностей

В 2 частях

Ч а с т ь 1

Редактор *Т. В. Грищенкова*
Компьютерная верстка *Н. А. Школьниковой*

Подписано в печать 03.01.2018. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография.
Усл. печ. л. 10,64. Уч.-изд. л. 8,32. Тираж 100. Заказ 786.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.