УДК 621.3

МЕТОДИКА СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СОСТОЯНИЯ

Кохнюк С.А, Рысик А.Н., Николаева Т.А.

Научный руководитель – к.ф-м.н., доцент Горошко В.И.

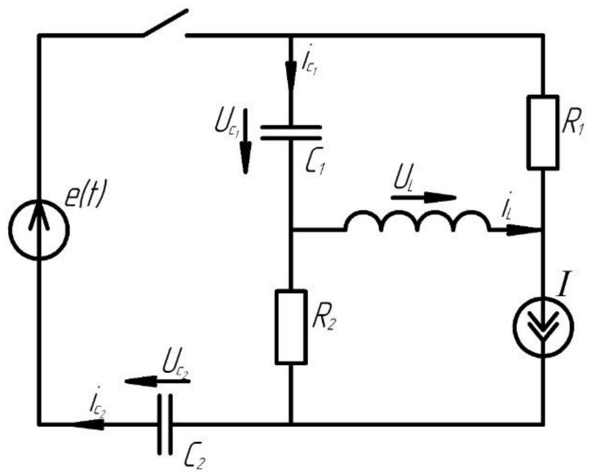

Рисунок 1. Исходная схема

Рассчитать переменные: u_{C1}, u_{C2}, i_L.

Стандартный метод составления системы дифференциальных уравнений громоздок. Он требует по законам Кирхгофа составить систему из пяти уравнений и затем исключить лишние неизвестные.

Мы предлагаем другой подход для получения системы уравнений. Для этого вводим переменные u_{C1}, u_{C2}, i_L. Их называют переменными состояния

Уравнения состояния находим в виде одного матричного уравнения.

1) Введем вектор переменных состояния $\boldsymbol{X}$, и вектор источников $\boldsymbol{V}$

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} u_{C_1} \\ u_{C_2} \\ i_L \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} e \\ I \end{bmatrix}$$

2) Уравнение состояния

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{AX} + \boldsymbol{BV}$$

3) Вначале составим вспомогательное матричное уравнение для смежных переменных $\boldsymbol{Z}$

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} i_{C_1} \\ i_{C_2} \\ u_L \end{bmatrix}$$

4) Составляем матричное уравнение

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{MX} + \boldsymbol{NV}$$

5) Вспомогательные матрицы $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \\ N_{31} & N_{32} \end{bmatrix}$$

Таблица 1 – Коэффициенты матриц $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$

	u_{C_1}	u_{C_2}	i_L	e	I
i_{c_1}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	N_{11}	N_{12}
i_{c_2}	M_{21}	M_{22}	M_{23}	N_{21}	N_{22}
u_L	M_{31}	M_{32}	M_{33}	N_{31}	N_{32}

Для нахождения коэффициентов матриц $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ применяем метод наложения.

Метод наложения

Рассмотрим 5 схем. Замещаем напряжения u_{C_1}, u_{C_2} на ЭДС, а i_L – на источник тока. Итого 5 источников. Поочередно активируем один источник, а остальные обнуляем.

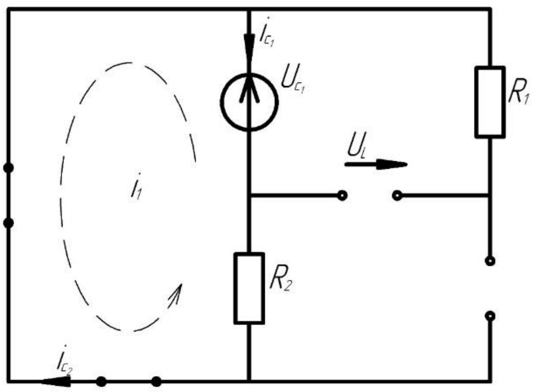

Рисунок 2. Схема 1

$$i_1 = \frac{u_{C_1}}{R_2}$$

$$i_{C_1} = -i_1 = -\frac{1}{R_2} u_{C_1} = M_{11} u_{C_1}$$

$$i_{C_2} = -i_1 = -\frac{1}{R_2} u_{C_1} = M_{21} u_{C_1}$$

$$u_L + 0 = -u_{C_1}$$

$$u_L = -u_{C_1} = M_{31} u_{C_1}$$

Заносим M_{11}, M_{21}, M_{31} в таблицу 1.

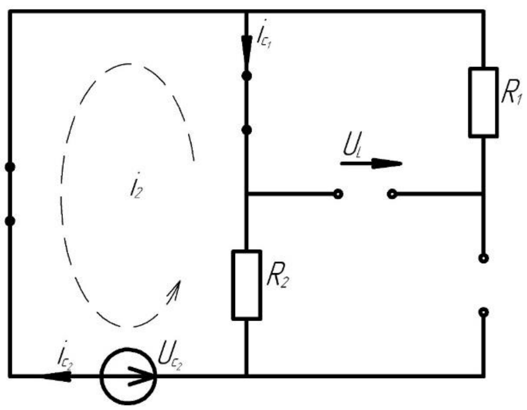

Рисунок 3. Схема 2

$$i_2 = \frac{u_{C_2}}{R_2}$$

$$i_{C_1} = -i_2 = -\frac{1}{R_2} u_{C_2} = M_{12} u_{C_2}$$

$$i_{C_2} = -i_2 = -\frac{1}{R_2} u_{C_2} = M_{22} u_{C_2}$$

$u_{\mathrm{L}} = 0$

Заносим $\mathrm{M}_{12}, \mathrm{M}_{22}, \mathrm{M}_{32}$ в таблицу 1.

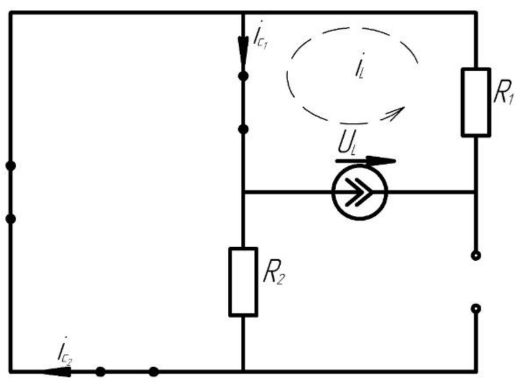

Рисунок 4. Схема 3

$$i_{C_1} = 1 \cdot i_L = M_{13} i_L$$

$$i_{C_2} = 0 \cdot i_L = M_{23} i_L$$

$$u_L = -R_1 i_L = M_{33} i_L$$

Заносим $\mathrm{M}_{13}, \mathrm{M}_{23}, \mathrm{M}_{33}$ в таблицу 1.

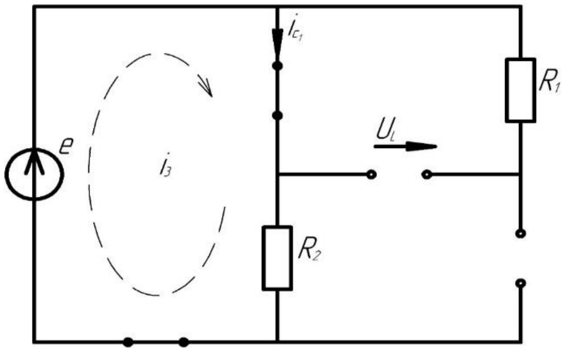

Рисунок 5. Схема 4

$$i_{C_1} = \frac{1}{R_2} e = N_{11} e$$

$$i_{C_2} = \frac{1}{R_2} e = N_{21} e$$

$$u_L = 0 \cdot e = N_{31} e$$

Заносим $N_{11}, \mathrm{N}_{21}, \mathrm{N}_{31}$ в таблицу 1.

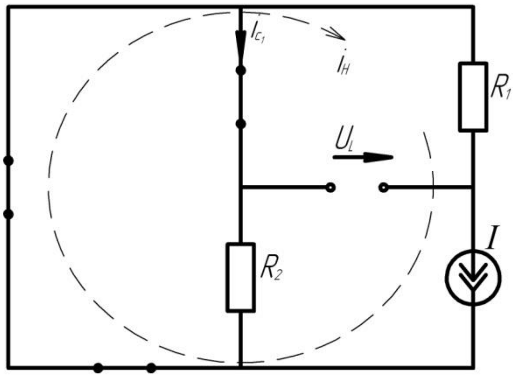

Рисунок 6. Схема 5

$$i_{C_1} = 0 \cdot I = N_{11} I$$

$$i_{C_2} = 1 \cdot I = N_{22} I$$

$$u_L - R_1 i_L = 0$$

$$u_L = R_1 I = N_{32} I$$

Заносим $N_{12}, \mathrm{N}_{22}, \mathrm{N}_{32}$ в таблицу 1.

Таблица 2 – Полученные коэффициенты матриц $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$

	u	u			
i	— - I	— - I		- I	
i	— - I	— - I		- I	
$\imath$	–		I		I

Получили коэффициенты матриц $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 1 \\ -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ -1 & 0 & R_1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \\ 0 & R_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_{C_1} \\ i_{C_2} \\ u_L \end{bmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{bmatrix} u_{C_1} \\ u_{C_2} \\ i_L \end{bmatrix} + \boldsymbol{N} \begin{bmatrix} e \\ I \end{bmatrix}$$

Поскольку $\qquad i_C = Cu'_C \qquad u_L = Li'_L,$

то получим

$$\begin{bmatrix} C_1 u'_{C_1} \\ C_2 u'_{C_2} \\ L i'_L \end{bmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{bmatrix} u_{C_1} \\ u_{C_2} \\ i_L \end{bmatrix} + \boldsymbol{N} \begin{bmatrix} e \\ I \end{bmatrix}$$

Делим первое уравнение на C_1, второе на C_2, третье на L.
Элементы матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ примут окончательный вид:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C_1} & -\frac{1}{R_2 C_1} & \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} & 0 \\ \frac{-1}{L} & 0 & \frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2 C_1} & 0 \\ \frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{R_1}{L} \end{bmatrix}$$

В развернутом виде система ОДУ первого порядка принимает форму:

$$u'_{C_1} = A_{11} u_{C_1} + A_{12} u_{C_2} + A_{13} i_L + B_{11} e + B_{12} I$$

$$u'_{C_2} = A_{21} u_{C_1} + A_{22} u_{C_2} + A_{23} i_L + B_{21} e + B_{22} I$$

$$i'_L = A_{31} u_{C_1} + A_{32} u_{C_2} + A_{33} i_L + B_{31} e + B_{32} I$$

Выводы.

Предлагаемая методика позволяет исключить этап записи уравнений по законам Кирхгофа и сводится к анализу простых активно-резистивных схем.