УДК 621.3

ЭФФЕКТИВНОСТЬ МЕТОДА ЭКВИВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА ПРИ СОСТАВЛЕНИИ ОДУ ДЛЯ СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Федькин В.А., Мытник Д.О.

Научный руководитель – к.ф-м.н., доцент Горошко В.И.

Для построения ОДУ разработано несколько способов: операторный, классический, метод эквивалентного генератора (МЭГ). Продемонстрируем эффективность МЭГ в сравнении с классическим.

Классический метод подразумевает построение системы уравнений для данной цепи по следующим этапам:

1. Найти независимые начальные условия, то есть, напряжения на ёмкостях и токи на индуктивностях в момент начала переходного процесса.

2. Далее необходимо составить систему уравнений на основе законов Кирхгофа, Ома, описывающих состояние цепи после коммутации, и исключением переменных получить одно дифференциальное уравнение, в общем случае неоднородное относительно искомого тока или напряжения. Для простых цепей получается дифференциальное уравнение первого или второго порядка, в котором в качестве искомой величины выбраны либо ток в индуктивном элементе, либо напряжение на емкостном элементе.

Сущность метода эквивалентного генератора заключается в следующем. Вся цепь относительно зажимов интересующего нас элемента представляется как активный двухполюсник, который заменяется эквивалентным генератором, к зажимам которого подключается интересующий нас элемент. В итоге получается простая неразветвленная цепь, ток в которой определяется по закону Ома.

ЭДС $E_Э$ эквивалентного генератора и его внутреннее сопротивление $R_Э$ находятся из режима холостого хода (рис. 1).

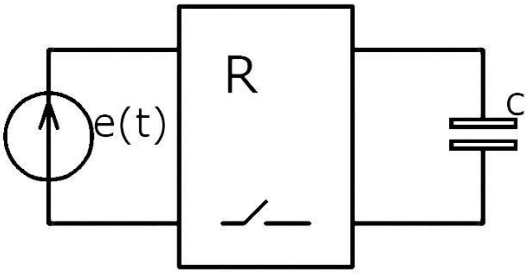

Рисунок 1. – Схема до применения МЭГ

У нас имеется электрическая цепь, состоящая из источника ЭДС $e(t)$, резистивного разветвленного участка и конденсатора С.

После применения МЭГ схема принимает следующий вид (рис. 2):

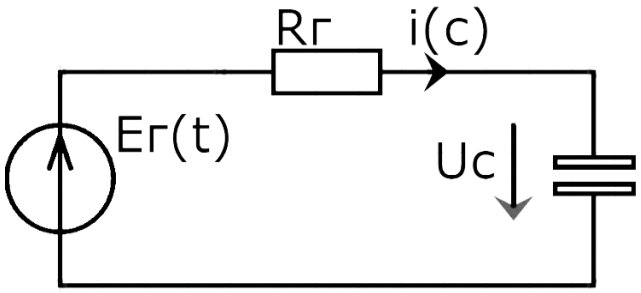

Рисунок 2. – Схема после применения МЭГ

По данной схеме составляем следующие уравнения:

$$R_г i_c + u_c = E_г(t) \quad (1)$$

где $R_г$ – сопротивление генератора;
i_c – ток цепи;
U_c – напряжение на конденсаторе.

$$i_c = Cu'_c \quad (2)$$

Из уравнений 1 и 2 можно составить дифференциальное уравнение:

$$R_г Cu'_c + u_c = e_г(t), \quad (3)$$

где u'_c – производная величины u_c.
Уравнение (3) в операторном виде:

$$R_г Cpu_c + u_c = e_г(t), \quad (4)$$

где величина $u_c(t)$ состоит из вынужденной и свободной составляющих:

$$u_c(t) = u_{c,вн} + u_{c,св}. \quad (5)$$

1. Для постоянного источника полагаем p = 0:

$$e(t) = E = \text{const} \rightarrow e_г(t) = E_г = \text{const} \rightarrow u_{c,вн} = \text{const и } u'_c = 0.$$

Из формулы (3) в результате получаем:

$$u_{c,вн} = E_г$$

2. Для синусоидального источника полагаем $p = j\omega$:

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e) \risingdotseq E_m e^{j\psi_e} \rightarrow \underline{E} = E_{гm} e^{j\psi_e},$$

откуда следует:

$$u_{c,вн}(t) = u_{cm} \sin(\omega t + \psi_c) \risingdotseq U_{cm} e^{j\psi_c} = \underline{U}_{cm}.$$

Тогда формула (3) примет вид:

$$j\omega R_г C\underline{U}_{cm} + \underline{U}_{cm} = \underline{E}_{гm};$$

$$\underline{U}_{cm} = \underline{E}_{гm}/(1 + j\omega CR_г) \risingdotseq U_{cm} \sin(\omega t + \psi_c).$$

3.Для экспоненциального источника полагаем $p = -\alpha$:

$$e(t) = Ee^{-\alpha t} \rightarrow e_г = E_г e^{-\alpha t},$$

откуда следует:

$$u_{c,\text{вн}} = U_c e^{-\alpha t}.$$

Формула (3) примет вид:
$R_\text{г} C(-\alpha) U_{c,\text{вн}} + u_{c,\text{вн}} = e_\text{г}(t)$

$$u_{c,\text{вн}}(t) = e_\text{г}(t)/(1 - \alpha R_\text{г} C).$$

Продемонстрируем эффективность МЭГ на конкретном примере. Для этого рассмотрим произвольную электрическую цепь (рис. 3).

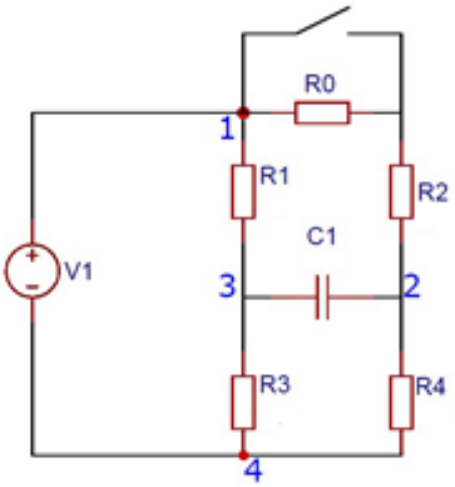

Рисунок 3. Разветвленная электрическая цепь

Для этой цепи, имеющей четыре узла, по классическому методу необходимо составить систему уравнений, содержащую шесть уравнений (три по ПЗК и три по ВЗК). Таким образом, классический метод в данном случае не эффективен.

Применим МЭГ:

Первым шагом следует определить напряжение холостого хода ($U_{\text{хх}}$) и сопротивление эквивалентного генератора ($R_\text{г}$).

1.Определение $u_{\text{хх}}$:

$$u_{\text{хх}} = E_\text{г} = -R_1 i_2 + R_2 i_3;$$

где $i_2 = e/(R_1 + R_3)$ и $i_3 = e/(R_2 + R_4)$

2. Определение $R_\text{г}$.

Для определения сопротивления эквивалентного генератора преобразуем схему и получаем окончательно:

$$R_\text{г} = \frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{(R_1+R_2)+(R_3+R_4)}.$$

В итоге получаем схему на рисунке 2.

Выводы.

На приведенном примере показана эффективность МЭГ при составлении ОДУ первого порядка для достаточно сложных электрических цепей.

Показана эффективность применения ОДУ для прямого расчета вынужденных составляющих для трех типов источников: постоянного, синусоидального и экспоненциального.