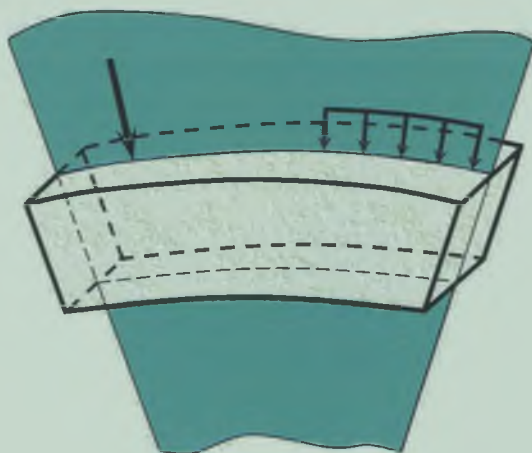


Ч. А. Якубовский  
А. Ч. Якубовский

# МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

*ПРАКТИКУМ*



Минск 2006

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

Ч. А. Якубовский  
А. Ч. Якубовский

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

*ПРАКТИКУМ*

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь  
в качестве учебного пособия для студентов  
машиностроительных специальностей учреждений,  
обеспечивающих получение высшего образования*

Минск 2006

УДК 620.1:539.3/4 (076)

ББК 30.121я7

Я 49

*Рецензенты:*

д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой  
«Сопротивление материалов и детали машин»  
Белорусского аграрного технического университета  
*А.Н. Орда;*

канд. техн. наук, профессор кафедры  
«Механика материалов и конструкций»  
Белорусского государственного технологического университета  
*С.С. Макаревич*

**Якубовский, Ч.А.**

Я 49 Механика материалов. Практикум: учебное пособие / Ч.А. Якубовский, А.Ч. Якубовский. – Мн.: БНТУ, 2006. – 168 с.

ISBN 985-479-500-4.

В учебном пособии приведены сведения из теории по основным разделам курса механики материалов. Рассмотрены примеры решения задач по каждому из этих разделов. Предложены варианты контрольных и расчетно-графических заданий.

Пособие может быть полезно студентам различных форм обучения при выполнении контрольных и расчетно-графических работ, а также преподавателям при проведении практических занятий по основным разделам курса механики материалов.

УДК 620.1:539.3/4 (076)  
ББК 30.121я7

ISBN 985-479-500-4

© Якубовский Ч.А.,  
Якубовский А.Ч., 2006  
© БНТУ, 2006

# 1. ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ–СЖАТИЕ

## 1.1. Основные понятия

*Осевым растяжением (сжатием)* называют такой вид деформации, при котором внутренние силы упругости, возникающие в поперечном сечении стержня, приводятся лишь к одному внутреннему силовому фактору – *продольной силе  $N$* . При известных внешних силах продольная сила определяется из уравнения равновесия, составленного для отсеченной части стержня. Метод определения внутренних силовых факторов по заданным внешним силам называется, как известно, *методом сечений*.

Деформации растяжения–сжатия подвергаются как отдельные стержни, так и стержневые системы (кронштейны, фермы и др.).

Если внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях стержней, определяются только на основе условий равновесия отсеченной части системы (или отдельного стержня), то такие системы называются *статически определенными*.

Однако на практике часто встречаются стержневые системы и отдельные стержни, внутренние силовые факторы в сечениях которых нельзя определить с помощью одних лишь уравнений равновесия. Такие системы называются *статически неопределимыми*.

Степень статической неопределимости равна числу лишних связей и определяется как разность между числом неизвестных усилий (внутренние силы и опорные реакции) и числом независимых уравнений статического равновесия, которые можно составить для данной системы в зависимости от ее конструкции и вида внешней нагрузки.

*Лишние связи* – это связи, удаление которых превращает систему в статически определенную, не нарушая ее геометрической неизменяемости. Геометрически неизменяемой называется система, изменение формы которой возможно лишь в связи с деформацией ее элементов.

Связи в стержневых системах делятся на внешние и внутренние. Под *внешними связями* понимаются препятствия, не допускающие абсолютных перемещений некоторых точек системы. Под *внутренними связями* понимаются ограничения, не допускающие изменения взаимного положения точек системы (взаимного смещения элементов).

## 1.2. Расчет статически неопределимых стержневых систем

Одним из основных методов расчета статически неопределимых стержневых систем является метод сил. Этот метод широко изучен в литературе и наиболее часто применяется на практике.

Порядок расчета статически неопределимых систем следующий.

1. Выбирают основную систему. Она получается путем удаления лишних связей из заданной статически неопределимой системы.

2. Заменяют действие отброшенных лишних связей неизвестными силами  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

3. Записывают канонические (написанные по определенному правилу) уравнения метода сил.

Для  $n$  раз статически неопределимой системы эти уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \dots + \delta_{1n} \cdot X_n + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \dots + \delta_{2n} \cdot X_n + \Delta_{2F} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \dots + \delta_{nn} \cdot X_n + \Delta_{nF} = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Каждое из этих уравнений выражает условие отсутствия перемещений по направлению соответствующей неизвестной силы (если отброшенные лишние связи – внешние) или условие отсутствия взаимных перемещений сечений (если отброшенные лишние связи – внутренние).

4. Вычисляют коэффициенты и свободные члены канонических уравнений (1.1) с помощью интеграла Максвелла – Мора:

$$\Delta_{iF} = \sum_0^l \int \frac{M_F \cdot \bar{M}_i}{EI} dz + \sum_0^l \int \frac{N_F \cdot \bar{N}_i}{EA} dz + \sum k_y \int_0^l \frac{Q_F \cdot \bar{Q}_i}{GA} dz. \quad (1.2)$$

В формуле (1.2) интегрирование производится по длине стержня (или его участка), а суммирование распространяется на все стержни (или на все участки).

В балках, рамах, арках, работающих на изгиб, влиянием деформации сдвига и растяжения–сжатия обычно пренебрегают. Тогда интеграл Максвелла–Мора принимает вид

$$\Delta_{iF} = \sum_0^l \int \frac{M_F \cdot \bar{M}_i}{EI} dz.$$

Если рассчитываются стержневые системы, которые работают в основном на растяжение–сжатие, то интеграл (1.1) имеет вид

$$\Delta_{iF} = \sum_0^l \int \frac{N_F \cdot \bar{N}_i}{EI} dz.$$

Коэффициенты при неизвестных (главные и побочные) и свободные члены уравнений (1.1) в этом случае определяются по формулам

$$\delta_{ii} = \sum \frac{\bar{N}_i^2 \cdot l}{EA}; \quad \delta_{ik} = \sum \frac{\bar{N}_i \cdot \bar{N}_k}{EA} \cdot l; \quad \Delta_{iF} = \sum \frac{N_F \cdot \bar{N}_i}{EA} \cdot l. \quad (1.3)$$

Для вычисления коэффициентов по формулам (1.3) основная система поочередно загружается силами  $\bar{X}_1 = 1, \bar{X}_2 = 1, \dots, \bar{X}_n = 1$  и отдельно заданной нагрузкой. От каждого нагружения в отдельности находятся продольные усилия во всех стержнях системы (или же строятся единичная и грузовая эпюры продольных сил).

5. Значения коэффициентов подставляют в канонические уравнения. Решая полученную систему, определяют неизвестные усилия  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

**Пример.** Система из трех стальных стержней одинакового сечения нагружена вертикальной силой  $F$  (рис. 1.1). Определить усилия в стержнях.

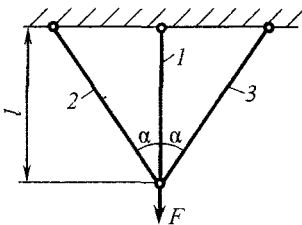


Рис. 1.1

### Решение

1. Определяем степень статической неопределимости системы:

$$\Pi = N_{\text{неизв.}} - N_{\text{ур.ст.}}$$

где  $N_{\text{неизв.}}$  – число неизвестных усилий (оно равно числу стержней:  $N_{\text{неизв.}} = 3$ );

$N_{\text{ур.ст.}}$  – число независимых уравнений статики, которые можно составить для заданной системы сил (имеем плоскую систему сходящихся сил, для которой  $N_{\text{ур.ст.}} = 2$ ).

Тогда  $\Pi = 3 - 2 = 1$ , т. е. система один раз статически неопределима.

2. Выбираем основную систему. Для этого разрезаем один из стержней системы. Целесообразно разрезать средний стержень (рис. 1.2).

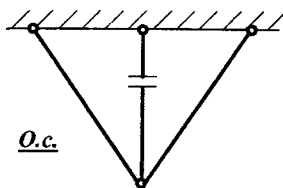


Рис. 1.2

Основная система, нагруженная заданными силами и искомым лишним неизвестным, должна быть эквивалентна исходной системе (см. рис. 1.1), поэтому ее называют *эквивалентной системой* (рис. 1.3).

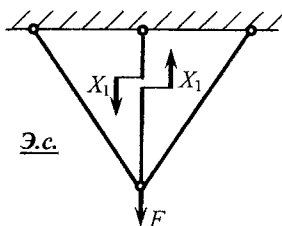


Рис. 1.3

3. Составляем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

4. Загружаем основную систему единичной продольной силой  $\bar{X}_1 = 1$  (рис. 1.4) и отдельно заданной внешней нагрузкой  $F$  (рис. 1.5). От каждой нагрузки в отдельности находим продольные усилия во всех стержнях системы:

$$\begin{aligned}\sum x = 0: \\ -\bar{N}_2 \cdot \sin \alpha + \bar{N}_3 \cdot \sin \alpha = 0; \\ \bar{N}_2 = \bar{N}_3;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum y = 0: \\ \bar{N}_2 \cdot \cos \alpha + \bar{N}_3 \cdot \cos \alpha + 1 = 0; \\ \bar{N}_3 = -\frac{1}{2 \cdot \cos \alpha}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{N}_1 = \bar{X}_1 = 1}; \quad \boxed{\bar{N}_2 = \bar{N}_3 = -\frac{1}{2 \cdot \cos \alpha}}.$$

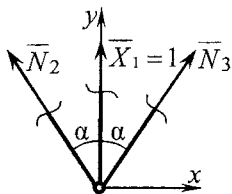
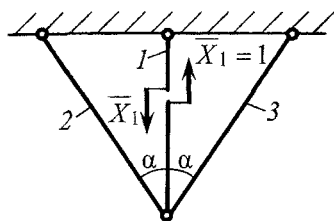


Рис. 1.4

$$\begin{aligned}\sum x = 0: \\ -N_{2F} \cdot \sin \alpha + N_{3F} \cdot \sin \alpha = 0; \\ N_{2F} = N_{3F};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum y = 0: \\ N_{2F} \cdot \cos \alpha + N_{3F} \cdot \cos \alpha - F = 0; \\ N_{3F} = \frac{F}{2 \cdot \cos \alpha}.\end{aligned}$$

$$\boxed{N_{1F} = 0}; \quad \boxed{N_{2F} = N_{3F} = \frac{F}{2 \cdot \cos \alpha}}.$$

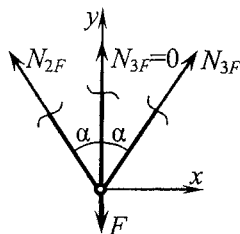
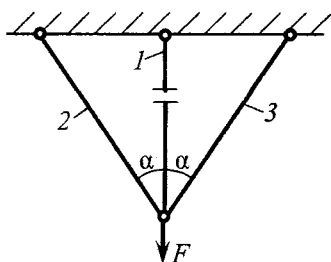


Рис. 1.5

5. Определяем коэффициенты канонического уравнения:

$$\begin{aligned}\delta_{11} = \sum \frac{\bar{N}_i^2}{EA} \cdot l_i = \frac{1}{EA} \times \\ \times \left[ 1^2 \cdot l + 2 \cdot \left( -\frac{1}{2 \cdot \cos \alpha} \right)^2 \cdot \frac{l}{\cos \alpha} \right] = \frac{l}{EA} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2 \cdot \cos^3 \alpha} \right);\end{aligned}$$



$$\Delta_{1F} = \sum \frac{N_{iF} \cdot \bar{N}_i}{EA} \cdot l_i = \frac{1}{EA} \times$$

$$\times \left[ 0 + 2 \cdot \frac{F}{2 \cdot \cos \alpha} \cdot \left( -\frac{1}{2 \cdot \cos \alpha} \right) \cdot \frac{l}{\cos \alpha} \right] = -\frac{l}{EA} \cdot \frac{F}{2 \cdot \cos^3 \alpha}.$$

6. Решая исходное каноническое уравнение, находим лишнее неизвестное:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{-\frac{F}{2 \cdot \cos^3 \alpha}}{1 + \frac{1}{2 \cdot \cos^3 \alpha}} = \frac{F}{1 + 2 \cdot \cos^3 \alpha}.$$

7. Находим усилия в других стержнях по формуле

$$N_i = N_{iF} + \bar{N}_i \cdot X_1.$$

Тогда

$$N_1 = N_{1F} + \bar{N}_1 \cdot X_1 = 0 + 1 \cdot X_1 = X_1 = \frac{F}{1 + 2 \cdot \cos^3 \alpha};$$

$$N_2 = N_3 = N_{2F} + \bar{N}_2 \cdot X_1 =$$

$$= \frac{F}{2 \cdot \cos \alpha} - \frac{1}{2 \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{F}{1 + 2 \cdot \cos^3 \alpha} = \frac{F \cdot \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cdot \cos^3 \alpha}.$$

Методом сил решаются также задачи на определение температурных и монтажных напряжений. Однако этот круг задач в данном пособии не рассматривается.

## Задача

Абсолютно жесткий брус закреплен горизонтально при помощи двух стальных стержней длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $A$  (рис. 1.6). Система нагружена внешней силой  $F$ . Требуется:

- 1) определить усилия и напряжения в стержнях при заданной нагрузке;
- 2) найти наибольшую допускаемую нагрузку, если  $[\sigma] = 160$  МПа;
- 3) определить коэффициенты запаса прочности стержней при найденной допускаемой нагрузке;
- 4) определить допускаемую нагрузку по несущей способности, если  $\sigma_T = 240$  МПа и коэффициент запаса прочности  $k = 1,5$ ;
- 5) сравнить найденные значения допускаемой нагрузки.

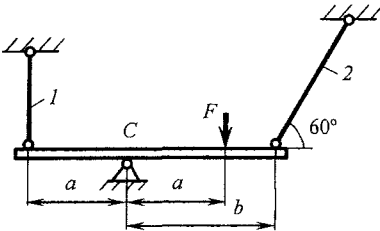


Рис. 1.6

Дано:

$$\begin{aligned} l_1 &= 2 \text{ м}; & l_2 &= 3 \text{ м}; \\ A_1 &= 4 \text{ см}^2; & A_2 &= 6 \text{ см}^2; \\ a &= 2 \text{ м}; & b &= 3 \text{ м}; \\ F &= 100 \text{ кН}. \end{aligned}$$

## Решение

1. Определяем усилия и напряжения в стержнях.

1.1. Вычисляем число лишних неизвестных. На данную систему наложены 4 связи – две внешние (опорные связи) и две внутренние (стержни 1 и 2); следовательно,  $N_{\text{неизв.}} = 4$ . Имеем плоскую систему произвольных сил, следовательно,  $N_{\text{ур.ст.}} = 3$ . Тогда  $L = N_{\text{неизв.}} - N_{\text{ур.ст.}} = 4 - 3 = 1$  – задача один раз статически неопределима.

1.2. Выбираем основную систему. Для этого разрезаем стержень 1, удаляя тем самым одну внутреннюю связь. Основная и эквивалентная системы показаны на рис. 1.7.

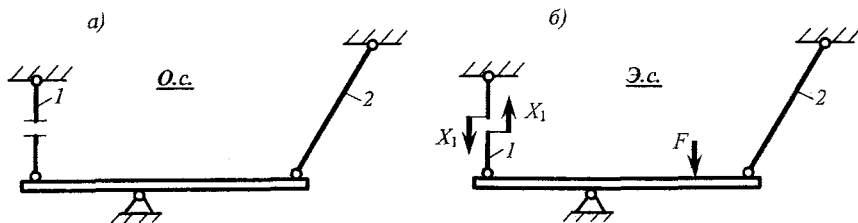


Рис. 1.7

1.3. Составляем каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

1.4. Загружаем поочередно основную систему силой  $\bar{X}_1 = 1$  (рис. 1.8) и внешней нагрузкой  $F$  (рис. 1.9) и находим усилия в стержнях системы:

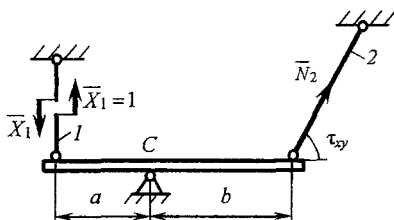


Рис. 1.8

$$\begin{aligned} \sum m_C &= 0; \\ -\bar{X}_1 \cdot a + \bar{N}_2 \cdot \sin 60^\circ \cdot b &= 0; \Rightarrow \\ \bar{N}_2 &= \frac{\bar{X}_1 \cdot a}{\sin 60^\circ \cdot b} = \frac{1 \cdot 2}{0,866 \cdot 3} = 0,77. \end{aligned}$$

$$\bar{N}_1 = \bar{X}_1 = 1; \quad \bar{N}_2 = 0,77.$$

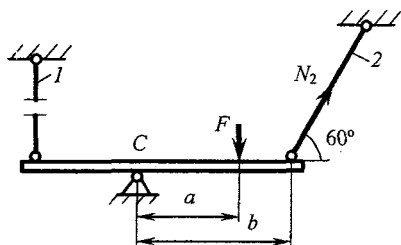


Рис. 1.9

$$\begin{aligned} \sum m_C &= 0; \\ -F \cdot a + N_{2F} \cdot \sin 60^\circ \cdot b &= 0; \Rightarrow \\ N_{2F} &= \frac{F \cdot a}{\sin 60^\circ \cdot b} = \frac{F \cdot 2}{0,866 \cdot 3} = 0,77 \cdot F. \end{aligned}$$

$$N_{1F} = 0; \quad N_{2F} = 0,77 \cdot F.$$

1.5. Находим коэффициент и свободный член канонического уравнения. Обозначим  $A_1 = A$ , тогда  $A_2 = 1,5 A$ .

$$\delta_{11} = \sum \frac{\bar{N}_i^2 \cdot l_i}{EA} = \frac{1}{EA} \cdot 1^2 \cdot 2 + \frac{1}{1,5 \cdot EA} \cdot 0,77^2 \cdot 3 = \frac{3,186}{EA};$$

$$\Delta_{1F} = \sum \frac{N_{iF} \cdot \bar{N}_i}{EA} \cdot l_i = \frac{1}{1,5 \cdot EA} \cdot 0,77 \cdot F \cdot 0,77 \cdot 3 = \frac{1,186 \cdot F}{EA}.$$

1.6. Вычисляем неизвестное усилие  $X_1$ :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{\frac{1,186 \cdot F}{EA}}{\frac{3,186}{EA}} = -0,372 \cdot F = -0,372 \cdot 100 = -37,2 \text{ кН}.$$

Тогда усилия в стержнях

$$N_1 = X_1 = -37,2 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} N_2 &= N_{2F} + \bar{N}_2 \cdot X_1 = \\ &= 0,77 \cdot F + 0,77 \cdot (-0,372 \cdot F) = 0,483 \cdot F = 48,3 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Знаки показывают, что стержень 1 сжат, а стержень 2 – растянут. Определяем напряжения в стержнях:

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-0,372 \cdot F}{4 \cdot 10^2} = -0,93 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^3 = -93 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,483 \cdot F}{6 \cdot 10^2} = 0,805 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^3 = 80,5 \text{ МПа}.$$

2. Находим наибольшую допускаемую нагрузку. Для этого записываем условие прочности для более нагруженного стержня:

$$\sigma_{\max} = \left| \sigma_{(1)} \right| = 0,93 \cdot 10^{-3} \cdot F \leq [\sigma].$$

Отсюда находим

$$[F] = \frac{[\sigma]}{0,93 \cdot 10^{-3}} = \frac{160}{0,93 \cdot 10^{-3}} = 172 \text{ кН.}$$

3. Определяем коэффициенты запаса прочности стержней при найденной допускаемой нагрузке по формуле

$$k = \frac{\sigma_T}{\sigma}$$

Находим напряжения в стержнях при  $F = [F]$ :

$$\sigma_{(1)} = -0,93 \cdot 10^{-3} \cdot F = -0,93 \cdot 10^{-3} \cdot 172 \cdot 10^3 = -160 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{(2)} = 0,805 \cdot 10^{-3} \cdot F = 0,805 \cdot 10^{-3} \cdot 172 \cdot 10^3 = 138,5 \text{ МПа.}$$

Тогда

$$k_1 = \frac{\sigma_T}{|\sigma_{(1)}|} = \frac{240}{160} = 1,5; \quad k_2 = \frac{\sigma_T}{|\sigma_{(2)}|} = \frac{240}{138,5} = 1,73.$$

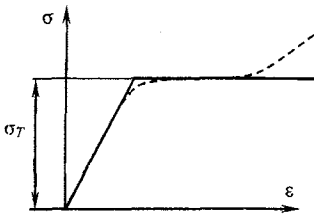


Рис. 1.10

4. Определяем допускаемую нагрузку по несущей способности. В этом случае считают, что деформация материала подчиняется закону Гука до предела текучести  $\sigma_T$ , а затем материал деформируется при постоянном напряжении  $\sigma = \sigma_T$  (без упрочнения). Такую диаграмму напряжений (рис. 1.10) называют идеальной диаграммой Прандтля, и она характерна для идеально пластичных материалов. Предельная, или разрушающая, нагрузка находится в момент, когда напряжения во всех стержнях системы достигают предела текучести.

Определяем усилия в стержнях в момент наступления текучести:

$$N_1 = \sigma_T \cdot A_1 = 240 \cdot 4 \cdot 10^2 = 96 \cdot 10^3 \text{ Н} = 96 \text{ кН};$$

$$N_2 = \sigma_T \cdot A_2 = 240 \cdot 6 \cdot 10^2 = 144 \cdot 10^3 \text{ Н} = 144 \text{ кН}.$$

Записываем уравнение равновесия исходной стержневой системы (см. рис. 1.6), предполагая, что стержень 1 сжат, а стержень 2 растянут:

$$\sum m_C = 0; \quad N_1 \cdot a + N_2 \cdot \sin 60^\circ \cdot b - F \cdot a = 0.$$

Отсюда находим предельную нагрузку:

$$F_{\text{пред}} = \frac{N_1 \cdot a + N_2 \cdot \sin 60^\circ \cdot b}{a} = \frac{96 \cdot 2 + 144 \cdot 0,866 \cdot 3}{2} = 283 \text{ кН}.$$

Допускаемая нагрузка определяется как предельная, деленная на коэффициент запаса прочности:

$$[F] = \frac{F_{\text{пред}}}{k} = \frac{283}{1,5} = 188,7 \text{ кН}.$$

5. Сравниваем значения допускаемой нагрузки, найденные в п.2 и п.4:

$$\delta = \frac{[F]_4 - [F]_2}{[F]_2} \cdot 100 \% = \frac{188,7 - 172}{172} \cdot 100 \% = 9,7 \%.$$

Следовательно, при расчете по несущей способности допускаемую нагрузку можно увеличить на 9,7 % по сравнению с расчетом по допускаемым напряжениям. Это показывает, что расчет по допускаемым напряжениям не исчерпывает несущей способности сооружения.

## 2. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ

### 2.1. Основные понятия

Совокупность напряжений, действующих на всевозможных площадках, проходящих через рассматриваемую точку тела, называется *напряженным состоянием в точке*.

Напряженное состояние вполне определяется *нормальными и касательными напряжениями*, действующими по трем взаимно перпендикулярным площадкам. Известно, что площадки, на которых касательные напряжения отсутствуют, называются *главными площадками*. Нормальные напряжения, действующие на главных площадках, называются *главными напряжениями*.

В теории упругости доказывается, что через любую точку напряженного тела можно провести три взаимно перпендикулярные главные площадки. На этих площадках действуют главные напряжения, которые обозначаются  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . При этом в общем случае считается, что  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  (в алгебраическом смысле). Если все три главных напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  отличны от нуля, то напряженное состояние называется *объемным* или трехосным. Если одно из главных напряжений (любое) равно нулю, то напряженное состояние называется *плоским* или двухосным. Если же только одно главное напряжение отлично от нуля, то напряженное состояние называется *линейным* или одноосным.

Линейное напряженное состояние возникает, например, в любой точке прямого бруса, испытывающего прямое растяжение ( $\sigma_1 \neq 0$ ) или сжатие ( $\sigma_3 \neq 0$ ).

Простейший случай плоского напряженного состояния представляет собой прямоугольная пластина постоянной толщины, которая в направлении ее сторон подвергается равномерному растяжению (или сжатию). В таком состоянии находится элемент, выделенный из стенки цилиндрического парового котла. Плоское напряженное состояние возникает также в бруске, испытывающем совместное действие кручения и изгиба.

Объемное напряженное состояние в задачах механики материалов встречается значительно реже, чем плоское или линейное.

Удобной формой для анализа напряженного состояния является выделение элементарного объема в окрестности исследуемой точки

в виде прямоугольного параллелепипеда с гранями, параллельными координатным осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ . На гранях такого элемента в общем случае будут действовать нормальные и касательные напряжения.

## 2.2. Общий случай плоского напряженного состояния

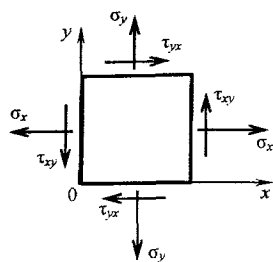


Рис. 2.1

Плоское напряженное состояние наиболее часто встречается на практике и поэтому представляет наибольший интерес.

Общий случай плоского напряженного состояния имеет место тогда, когда все плоскости элементарного объема, параллельные некоторой плоскости, свободны от напряжений. Одну из этих плоскостей принимают за плоскость  $xOy$ . Выделенный элемент изображается в виде проекции прямоугольного параллелепипеда на эту плоскость (рис. 2.1).

Нормальное напряжение  $\sigma$  содержит один индекс, соответствующий обозначению координатной оси, параллельной данному напряжению.

Касательное напряжение  $\tau$  имеет два индекса – первый индекс соответствует обозначению оси, параллельной нормали к площадке, а второй – оси, параллельной направлению касательного напряжения.

## 2.3. Правило знаков для нормальных и касательных напряжений

Нормальное напряжение считается положительным, если оно растягивающее. В этом случае нормальное напряжение на площадке с положительным приращением координаты совпадает с направлением координатной оси (см. рис. 2.1). Такое правило знаков для  $\sigma$  установлено в любой литературе по сопротивлению материалов.

Что касается правила знаков для касательных напряжений, то следует заметить, что оно трактуется неоднозначно. В настоящее время в литературе по сопротивлению материалов имеют место три варианта формулировки правила знаков для касательных напряжений.

1. Касательное напряжение считается положительным, если внешнюю нормаль к площадке надо повернуть для совпадения с направлением касательного напряжения по ходу часовой стрелки (рис. 2.2).





Рис. 2.2

Или, что то же самое, касательное напряжение считается положительным, если оно стремится повернуть рассматриваемый элемент (или площадку) по отношению к точке, расположенной внутри элемента, по ходу часовой стрелки.

Такое правило знаков для  $\tau$  является некорректным, поскольку, во-первых, оно оторвано от правила знаков для нормальных напряжений, а во-вторых, не связано с координатными осями, тогда как исследование напряженного состояния в точке, а также изучение некоторых свойств напряженного состояния связано с конкретно выбранной системой координат и ее преобразованием (поворотом). Преобразование компонент напряжений на трех взаимно перпендикулярных площадках (компоненты тензора напряжений) в отрыве от координатных осей часто приводит к ошибкам. Этот вопрос подробно рассмотрен в литературе.

2. Знак касательного напряжения не устанавливается – в этом случае направление касательных напряжений на гранях элемента выбирается исходя из удовлетворения условий равновесия элемента.

Такой подход также может иметь место, если преобразования связаны лишь с компонентами напряжений, действующими на гранях элемента. Здесь они являются векторными величинами, а вектор, как известно, характеризуется величиной и направлением, но не знаком. Знак «минус», появляющийся в преобразованиях, в данном случае указывает лишь на одно – необходимость изменения направления соответствующего вектора на противоположное.

Если же напряженное состояние в точке записывается в тензорной форме (в виде симметричной матрицы  $3 \times 3$ ) с целью выполнения определенных операций над тензорами, то в данном случае должно быть установлено правило знаков как для нормальных, так и для касательных напряжений, так как компоненты тензора напряжений являются величинами скалярными и характеризуются величиной и знаком.

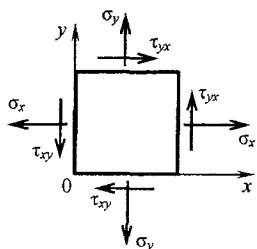
3. Касательное напряжение считается положительным, если на площадке с положительным приращением координаты оно совпадает с направлением соответствующей оси. На площадках, совмещенных с координатными плоскостями, положительные касательные напряжения направлены в сторону отрицательной координатной оси.

Такое правило для  $\tau$  устанавливается в учебных пособиях по теории упругости и лишь в некоторых учебных пособиях по сопротивлению материалов. Оно согласуется с правилом для нормальных напряжений, установленным выше, и может быть объединено с ним в одно общее правило (см. п. 3, опуская слово «касательное»). Такое правило знаков для нормальных и касательных напряжений неразрывно связано с координатными осями и является наиболее универсальным. Все нижеследующие расчеты будут выполняться с применением этого правила знаков для  $\tau$  и  $\sigma$ .

### Задача

Бесконечно малый элемент, выделенный в опасной точке нагруженного тела, находится в плоском напряженном состоянии (рис. 2.3). Требуется выполнить необходимые расчеты (см. условие к задаче 2 контрольных заданий).

Дано:



$$\sigma_x = 80 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y = 40 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy} = 20 \text{ МПа};$$

материал – сталь малоуглеродистая.

Рис. 2.3

### Решение

1. Определяем главные напряжения и направление главных площадок.

#### Аналитическое решение

Величины главных напряжений при плоском напряжённом состоянии находятся по формуле

$$\sigma_{\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}. \quad (2.1)$$

Индексы у главных напряжений устанавливаются после вычисления корней с соблюдением условия  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . При этом следует учитывать, что при плоском напряжённом состоянии одно из главных напряжений равно нулю.

Вычисляем

$$\sigma_{\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}} = \frac{80 + 40}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(80 - 40)^2 + 4 \cdot 20^2} = 60 \pm 28,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max} = 60 + 28,3 = 88,3 \text{ МПа}; \quad \sigma_{\min} = 60 - 28,3 = 31,7 \text{ МПа}.$$

Тогда главные напряжения

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = 88,3 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = \sigma_{\min} = 31,7 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = 0.$$

Определяем направление главных площадок по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

Вычисляем

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 \cdot 20}{80 - 40} = 1; \quad 2\alpha_0 = 45^\circ; \quad \alpha_0 = 22,5^\circ.$$

При этом нужно пользоваться следующим правилом:

1) если  $\alpha_0 > 0$ , то его значение откладывается от направления  $\sigma_x$  против часовой стрелки, и наоборот;

2) если  $\sigma_x > \sigma_y$ , то полученное направление является направлением  $\sigma_{\max}$ ; если  $\sigma_x < \sigma_y$ , то это направление будет направлением  $\sigma_{\min}$ .

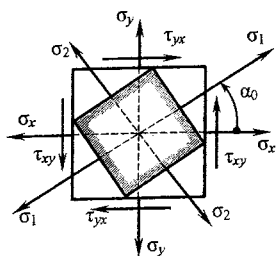


Рис. 2.4

Направления главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  взаимоперпендикулярны. Площадки, перпендикулярные направлениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , — главные площадки (рис. 2.4).

Следует отметить, что среди нормальных напряжений на всевозможных площадках, проходящих через рассматриваемую точку и параллельных оси  $z$  (ось, перпендикулярная чертежу), главное напряжение  $\sigma_1$  является наибольшим, а  $\sigma_2$  — наименьшим.

### Графическое решение

Известным уравнениям, связывающим главные напряжения с нормальными и касательными напряжениями на наклонных площадках, можно дать простое геометрическое толкование — эти зависимости могут быть представлены графически с помощью *круговой диаграммы Мора*. Впервые такое решение предложил в 1882 году немецкий ученый Отто Мор (1835–1918 гг.), автор многих работ по сопротивлению материалов и теории сооружений.

Известно, что при плоском напряжённом состоянии каждой площадке из семейства площадок, параллельных оси  $z$  (ось  $z$  является главной), на окружности диаграммы Мора соответствует точка, координаты которой равны нормальным и касательным напряжениям на этой площадке. При этом угол между двумя произвольными площадками элемента на круговой диаграмме удваивается. Поэтому на круговой диаграмме двум взаимно перпендикулярным площадкам элемента должны соответствовать две диаметрально противоположные точки. Однако принятое выше правило знаков для касательных напряжений не позволяет выполнить данное требование, что, впрочем, не сказывается на форме круговой диаграммы.

Рассмотрим порядок построения круговой диаграммы Мора (рис. 2.5).

Проводим координатные оси  $\sigma$ – $\tau$ . По известным напряжениям, действующим на вертикальной и горизонтальной площадках элемента (см. рис. 2.3), на круговой диаграмме находим две соответствующие этим площадкам точки. Другими словами, в системе координат  $\sigma$ – $\tau$  в выбранном масштабе находим две точки с координатами  $D_x(\sigma_x; \tau_{xy})$  и  $D_y(\sigma_y; \tau_{yx})$ . Так как угол между двумя произвольными

площадками элемента на круговой диаграмме удваивается, то эти точки должны располагаться на противоположных концах одного диаметра. Однако, учитывая то, что знак  $\tau$  на обеих площадках положительный, ординаты обеих точек откладываем вверх. Кроме того, на других произвольных площадках элемента знак  $\tau$  также останется положительным, изменяться будет лишь его величина. Поэтому при построении круговой диаграммы Мора можно ограничиться только верхней половиной круга, однако для наглядности строится весь круг Мора. При этом предполагается, что нижняя половина круга является комплексно-сопряжённой частью верхней половины.

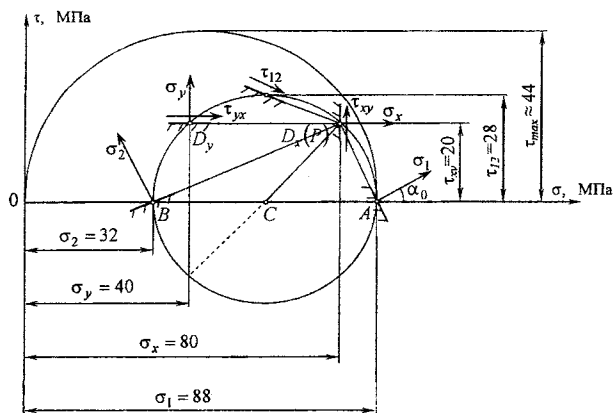


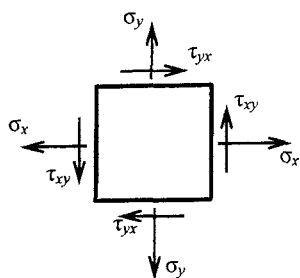
Рис. 2.5

Далее отрезок на оси  $\sigma$ , равный разности напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , делим пополам. Середину отрезка, точку  $C$ , соединяем с точкой  $D_x$ . Радиусом  $R = CD_x$  из центра в точке  $C$  проводим окружность. Круговая диаграмма Мора построена (см. рис. 2.5).

Отрезки  $OA$  и  $OB$  изображают в масштабе построения величины главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно.

Для нахождения положения главных площадок и направлений главных осей определяем полюс на круговой диаграмме. При принятом правиле знаков для касательных напряжений полюсом будет точка  $P$ , совпадающая с точкой  $D_x$  с координатами  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$ . Соединив полюс с точками  $A$  и  $B$ , находим положение главных площадок. Направление главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  будет перпендикулярно соответствующим главным площадкам (см. рис. 2.5).

Учитывая то, что правило знаков касательных напряжений, связанное с поворотом внешней нормали, довольно часто встречается в учебной литературе, в том числе и новейшей, построим круговую диаграмму Мора с учетом и этого правила знаков (рис. 2.6). Специальных пояснений при этом не приводим.



Дано:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 80 \text{ МПа;} \\ \sigma_y &= 40 \text{ МПа;} \\ \tau_{yx} &= \tau_{xy} = 20 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

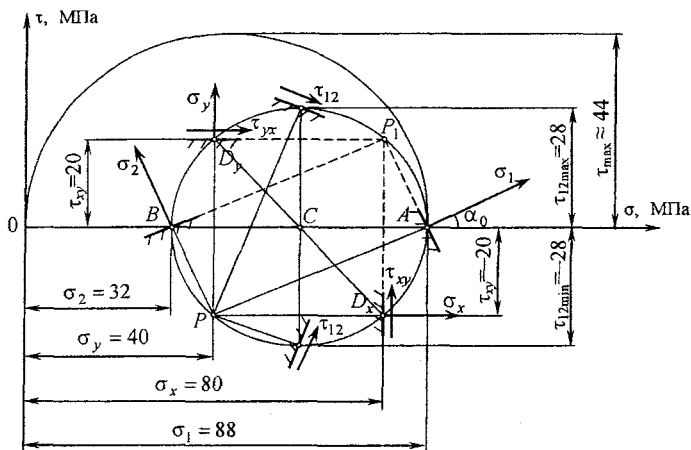


Рис. 2.6

2. Вычисляем максимальные касательные напряжения по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Следует иметь в виду, что если оба корня уравнения (2.1) положительные или оба отрицательные, то площадка, на которой действует  $\tau_{\max}$ , не параллельна оси  $z$ , а след этой площадки не лежит в плоскости чертежа.

В этом случае точка, соответствующая площадке, на которой действует  $\tau_{\max}$ , на круговой диаграмме отсутствует. Эта точка находится на дополнительном (большом) круге, построенном на отрезке  $OA$  как на диаметре, и является наиболее удаленной от оси  $\sigma$  точкой этого круга:

$$\tau_{\max} = \frac{88,3 - 0}{2} = 44,15 \text{ МПа.}$$

3. Определяем относительные деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  из аналитических выражений обобщенного закона Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z) \right];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_y - \mu \cdot (\sigma_z + \sigma_x) \right];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot \left[ \sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \right],$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона;

$E$  – модуль продольной упругости.

Принимая для стали  $\mu = 0,3$  и  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, вычисляем

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [80 - 0,3 \cdot (40 + 0)] = 3,4 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \mu \cdot (\sigma_z + \sigma_x)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [40 - 0,3 \cdot (0 + 80)] = 0,8 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [0 - 0,3 \cdot (80 + 40)] = -1,8 \cdot 10^{-4}.$$

Определяем относительную объемную деформацию по формуле

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\cdot\mu}{E} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (2.2)$$

Формулу (2.2) можно переписать в виде

$$\varepsilon_V = \frac{P}{K},$$

где

$$P = \frac{1}{3} \cdot I_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \sigma_{\text{окт}}.$$

Здесь  $\sigma_{\text{окт}}$  (нормальное октаэдрическое напряжение) – нормальное напряжение на октаэдрической (равнонаклоненной к трем главным осям) площадке. По-другому  $\sigma_{\text{окт}}$  называют *гидростатическим напряжением*. Величина

$$K = \frac{E}{3 \cdot (1-2\cdot\mu)}$$

называется *модулем объемной деформации*.

Вычисляем

$$\sigma_{\text{окт}} = P = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{80 + 40 + 0}{3} = 40 \text{ МПа};$$

$$K = \frac{2 \cdot 10^5}{3 \cdot (1-2 \cdot 0,3)} = 1,67 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Тогда

$$\varepsilon_V = \frac{40}{1,67 \cdot 10^5} = 2,4 \cdot 10^{-4}.$$



В качестве проверки вычислений служит равенство  $\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ :

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (3,4 + 0,8 - 1,8) \cdot 10^{-4} = 2,4 \cdot 10^{-4} = \varepsilon_V.$$

4. Находим удельную потенциальную энергию деформации. Потенциальная энергия, накапливающаяся в единице объема тела в результате его деформации (удельная потенциальная энергия) при объемном напряженном состоянии, определяется по формуле

$$u = \frac{\sigma_1 \cdot \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \cdot \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \cdot \varepsilon_3}{2} = \\ = \frac{1}{2 \cdot E} \cdot \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \cdot \mu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1) \right].$$

В нашем случае  $\sigma_3 = 0$ .

Вычисляем

$$u = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot \left[ 88,3^2 + 31,7^2 - 2 \cdot 0,3 \cdot (88,3 \cdot 31,7) \right] = \\ = 3561 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{мм/мм}^3 = 35610 \text{ Дж/м}^3.$$

5. Проверяем прочность материала в рассматриваемой точке. Так как малоуглеродистая сталь на растяжение и сжатие работает одинаково, то применяем третью теорию прочности – теорию наибольших касательных напряжений. Условие прочности по этой теории записывается в следующем виде:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Проверяем выполнение этого условия:

$$88,3 - 0 = 88,3 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Следовательно, прочность материала обеспечивается.

### 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

#### 3.1. Общие положения

В курсе сопротивления материалов при решении задач, связанных с расчетом элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость, приходится иметь дело с некоторыми *геометрическими характеристиками* поперечных (плоских) сечений элементов. К таким характеристикам относятся площадь, статические моменты, моменты инерции, моменты сопротивления, радиусы инерции.

#### 3.2. Статические моменты сечения

*Статическими моментами* плоского сечения относительно координатных осей  $x$  и  $y$  (рис. 3.1) называются интегралы произведений площадей элементарных участков на их координаты относительно соответствующих осей:

$$S_x = \int_A y \cdot dA; \quad S_y = \int_A x \cdot dA,$$

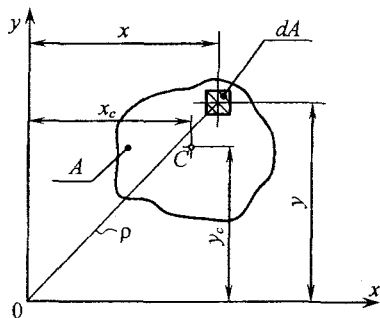


Рис. 3.1

Отождествляя площадку  $dA$  с силой, на основании известной из теоретической механики теоремы о моменте равнодействующей можно записать

$$S_x = \int_A y \cdot dA = A \cdot y_c; \quad S_y = \int_A x \cdot dA = A \cdot x_c, \quad (3.1)$$

где  $A$  – площадь всего сечения (равнодействующая);

$x_c, y_c$  – координаты центра тяжести сечения в заданной системе координат.

Из выражений (3.1) можно получить формулы для определения координат центра тяжести плоского сечения:

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (3.2)$$

Если имеем сечение сложной конфигурации, то его всегда можно представить в виде отдельных простых фигур, для которых площади и положение центров тяжести известны. В этом случае статический момент всего сечения равен сумме статических моментов простых фигур. Это следует из свойств определенного интеграла. Для таких сечений формулы (3.2) принимают вид

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i}; \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i}. \quad (3.4)$$

Следует отметить, что *статический момент сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения (центральная ось), равен нулю.*

### 3.3. Моменты инерции сечения

*Осевыми (экваториальными) моментами инерции сечения называются интегралы произведений площадей элементарных участков на квадраты их расстояний до соответствующих осей (см. рис. 3.1):*

$$J_x = \int_A y^2 \cdot dA; \quad J_y = \int_A x^2 \cdot dA. \quad (3.3)$$

*Центрбежным моментом инерции сечения называется интеграл произведений площадей элементарных участков на их координаты в системе заданных осей (см. рис. 3.1):*

$$J_{xy} = \int_A x \cdot y \cdot dA.$$

*Полярным моментом инерции* сечения относительно заданной точки (полюса) называется интеграл произведений площадей элементарных участков на квадрат их расстояний до полюса (см. рис. 3.1):

$$J_p = \int_A \rho^2 \cdot dA.$$

Полярный момент инерции является следствием линейной комбинации осевых моментов инерции. Действительно, из двух осевых моментов инерции  $J_x$  и  $J_y$  можно получить полярный момент инерции:

$$J_p = \int_A \rho^2 \cdot dA = \int_A (x^2 + y^2) \cdot dA = J_x + J_y.$$

### 3.4. Моменты инерции при параллельном переносе осей

При параллельном переносе координатных осей, проходящих через центр тяжести сечения, моменты инерции вычисляются по формулам (рис. 3.2)

$$J_{x_1} = J_x + a^2 \cdot A;$$

$$J_{y_1} = J_y + b^2 \cdot A;$$

$$J_{x_1 y_1} = J_{xy} + a \cdot b \cdot A.$$

При параллельном переносе координатных осей, проходящих через центр тяжести сечения, осевые моменты инерции изменяются на величину, равную произведению площади сечения на квадрат расстояния между осями, а центробежный момент – на величину, равную произведению площади на координаты центра тяжести сечения в новой системе координат.

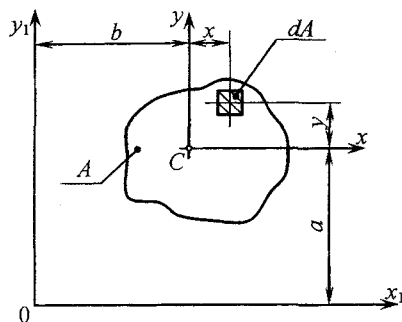


Рис. 3.2

### 3.5. Моменты инерции при повороте координатных осей

Если известны моменты инерции сечения  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_{xy}$  относительно первоначальных осей  $0x$  и  $0y$ , то моменты инерции относительно осей  $0x_1$  и  $0y_1$ , повернутых на угол  $\alpha$ , находятся по следующим формулам (рис. 3.3)

$$J_{x_1} = J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \sin^2 \alpha - J_{xy} \cdot \sin 2\alpha ; \quad (3.4)$$

$$J_{y_1} = J_x \cdot \sin^2 \alpha + J_y \cdot \cos^2 \alpha + J_{xy} \cdot \sin 2\alpha ; \quad (3.5)$$

$$J_{x_1 y_1} = \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + J_{xy} \cdot \cos 2\alpha . \quad (3.6)$$

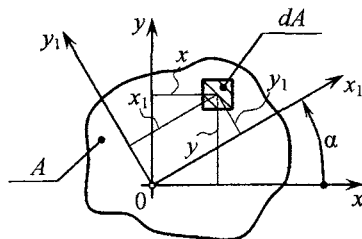


Рис. 3.3

Формулы (3.4) – (3.5) получены из интегральных выражений моментов инерции (3.3) с учетом зависимостей между координатами элементарной площадки  $dA$  в первоначальных и повернутых осях. Эти зависимости могут быть установлены по рис. 3.3 и имеют следующий вид:

$$x_1 = x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha; \quad y_1 = y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha.$$

### 3.6. Главные оси инерции и главные моменты инерции

Координатные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными осями инерции*.

Осевые моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*.

Положение главных осей определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}, \quad (3.7)$$

полученной из выражения (3.6), правая часть которого приравнивается к нулю (согласно определению главных осей). Положительное значение угла  $\alpha_0$  откладывается от оси  $x$  против часовой стрелки.

Главные моменты инерции вычисляются по формулам (3.4) и (3.5), в которые вместо угла  $\alpha$  подставляется его значение, найденное из равенства (3.7). После преобразований получаем окончательную формулу для определения главных моментов инерции:

$$J_{\begin{cases} \max \\ \min \end{cases}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 \cdot J_{xy}^2}.$$

В этой формуле знак «плюс» соответствует максимальному значению момента инерции, а «минус» – минимальному.

Будем обозначать главные оси инерции, по аналогии с главными осями в теории напряженного состояния, цифрами 1 и 2. При этом ось, относительно которой момент инерции является максимальным, обозначаем цифрой 1, а другую главную ось – цифрой 2. Таким образом получаем

$$J_1 = J_{\max}; \quad J_2 = J_{\min}.$$

Чтобы безошибочно установить, какая из главных осей является осью 1, а какая — осью 2, нужно пользоваться следующим правилом:

а) если  $J_x > J_y$ , то, откладывая от оси  $x$  найденный по формуле (3.7) угол  $\alpha_0$  (с учетом его знака), получаем направление оси 1;

б) если  $J_x < J_y$ , то угол  $\alpha_0$  дает направление оси 2.

Правильность выбора направления оси 1 можно проверить по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = - \frac{J_{xy}}{J_x - J_2} = - \frac{J_1 - J_x}{J_{xy}},$$

где  $\alpha_1$  — угол между осями  $x$  и 1.

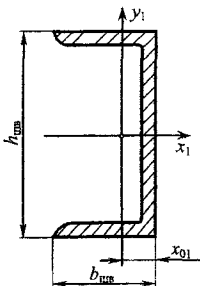
Кроме того, следует помнить, что ось 1 всегда тяготеет к той оси, относительно которой момент инерции больше, а ось 2 тяготеет к сечению, т. е. стремится пересечь наибольшую часть площади сечения.

### Задача

Для заданного поперечного сечения (рис. 3.4), состоящего из прокатных профилей (швеллера №24 и уголка 160×100×10 мм) и соединительной пластины прямоугольного сечения 25×2 см, требуется выполнить необходимые расчеты (см. условие к задаче 3 контрольных заданий).

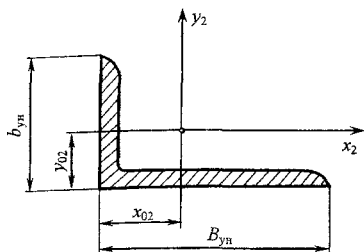
### Решение

Выписываем из таблицы сортамента, а также вычисляем некоторые геометрические характеристики отдельных сечений.



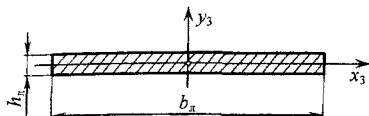
1. Швеллер №24  
(ГОСТ 8239-89):

$$\begin{aligned} b_{\text{шв}} &= 9 \text{ см}; & h_{\text{шв}} &= 24 \text{ см}; \\ A_1 &= 30,6 \text{ см}^2; \\ x_{01} &= 2,42 \text{ см}; \\ J_{x_1} &= 2900 \text{ см}^4; & J_{y_1} &= 208 \text{ см}^4. \end{aligned}$$



2. Уголок 160×100×10 мм  
(ГОСТ 8510–86):

$$\begin{aligned}
 B_{yn} &= 16 \text{ см}; & b_{yn} &= 10 \text{ см}; \\
 A_2 &= 25,3 \text{ см}^2; \\
 x_{02} &= 5,23 \text{ см}; & y_{02} &= 2,28 \text{ см}; \\
 J_{x_2} &= 204 \text{ см}^4; & J_{y_2} &= 667 \text{ см}^4; \\
 J_{\min} &= 121 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$



3. Лист (прямоугольник) 25×2 см:

$$\begin{aligned}
 b_{\text{л}} &= 25 \text{ см}; & h_{\text{л}} &= 2 \text{ см}; \\
 A_3 &= 25 \cdot 2 = 50 \text{ см}^2 \\
 J_{x_3} &= \frac{b_{\text{л}} \cdot h_{\text{л}}^3}{12} = \frac{25 \cdot 2^3}{12} = 16,7 \text{ см}^4; \\
 J_{y_3} &= \frac{h_{\text{л}} \cdot b_{\text{л}}^3}{12} = \frac{2 \cdot 25^3}{12} = 2604,17 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

1. Определяем положение центра тяжести сечения.

1.1. Вычерчиваем заданное сечение в масштабе 1:2 и проводим вспомогательные оси  $x_0$  и  $y_0$  (рис. 3.4).

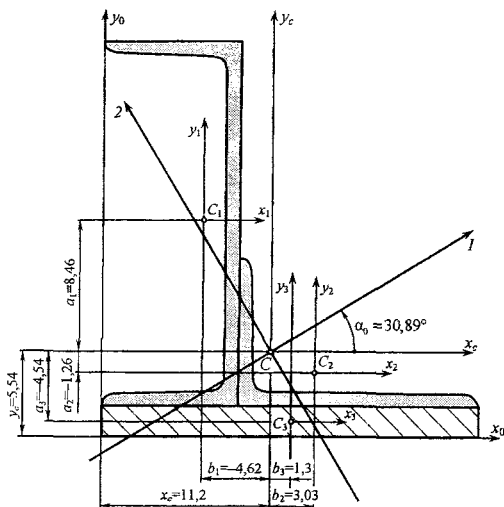


Рис. 3.4



1.2. Определяем координаты центра тяжести в системе вспомогательных осей по формулам

$$x_c = \frac{S_{y_0}}{A} = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3}{A_1 + A_2 + A_3};$$

$$y_c = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_2 + A_3},$$

где

$$x_1 = b_{\text{шв}} - x_{01} = 9 - 2,42 = 6,58 \text{ см};$$

$$y_1 = h_{\text{л}} + \frac{h_{\text{шв}}}{2} = 2 + \frac{24}{2} = 14 \text{ см};$$

$$x_2 = b_{\text{шв}} + x_{02} = 9 + 5,23 = 14,23 \text{ см};$$

$$y_2 = h_{\text{л}} + y_{02} = 2 + 2,28 = 4,28 \text{ см};$$

$$x_3 = \frac{b_{\text{л}}}{2} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ см};$$

$$y_3 = \frac{h_{\text{л}}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ см};$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 30,6 + 25,3 + 50 = 105,9 \text{ см}^2.$$

Вычисляем

$$x_c = \frac{30,6 \cdot 6,58 + 25,3 \cdot 14,23 + 50 \cdot 12,5}{105,9} = 11,20 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{30,6 \cdot 14 + 25,3 \cdot 4,28 + 50 \cdot 1}{105,9} = 5,54 \text{ см}.$$

Наносим на чертеж положение центра тяжести сечения (точку  $C$ ) и проводим центральные оси  $x_c$  и  $y_c$  (см. рис. 3.4).

2. Находим направление главных центральных осей.

2.1. Вычисляем осевые и центробежный моменты инерции в системе центральных осей по формулам

$$J_{x_c} = \sum (J_{x_i} + A_i \cdot a_i^2) = \\ = (J_{x_1} + A_1 \cdot a_1^2) + (J_{x_2} + A_2 \cdot a_2^2) + (J_{x_3} + A_3 \cdot a_3^2);$$

$$J_{y_c} = \sum (J_{y_i} + A_i \cdot b_i^2) = \\ = (J_{y_1} + A_1 \cdot b_1^2) + (J_{y_2} + A_2 \cdot b_2^2) + (J_{y_3} + A_3 \cdot b_3^2);$$

$$J_{x_c y_c} = \sum (J_{x_i y_i} + A_i \cdot a_i \cdot b_i) = \\ = (J_{x_1 y_1} + A_1 \cdot a_1 \cdot b_1) + (J_{x_2 y_2} + A_2 \cdot a_2 \cdot b_2) + (J_{x_3 y_3} + A_3 \cdot a_3 \cdot b_3).$$

Находим расстояния  $a_i$  и  $b_i$  между центральными осями  $x_i$  и  $y_i$  составных частей сечения и центральными осями  $x_c$  и  $y_c$  всего сечения в целом соответственно:

$$\begin{aligned} a_i &= y_i - y_c; & b_i &= x_i - x_c; \\ a_1 &= 14 - 5,54 = 8,46 \text{ см}; & b_1 &= 6,58 - 11,2 = -4,62 \text{ см}; \\ a_2 &= 4,28 - 5,54 = -1,26 \text{ см}; & b_2 &= 14,23 - 11,2 = 3,03 \text{ см}; \\ a_3 &= 1 - 5,54 = -4,54 \text{ см}; & b_3 &= 12,5 - 11,2 = 1,3 \text{ см}. \end{aligned}$$

Центробежные моменты инерции составных частей  $J_{x_1 y_1} = 0$  и  $J_{x_3 y_3} = 0$ , т. к. швеллер и лист имеют оси симметрии. Центробежный момент инерции неравнополочного уголка определяется по формуле

$$J_{xy} = \pm \sqrt{(J_x - J_{\min}) \cdot (J_y - J_{\min})}.$$

Знак центробежного момента инерции выбирается в зависимости от положения уголка в сечении (рис. 3.5).

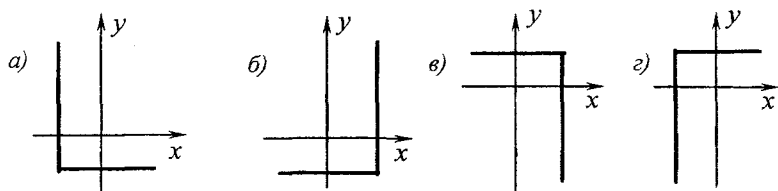


Рис. 3.5

Согласно правилу знаков (в случаях *а* и *в*  $J_{xy} < 0$ ; в случаях *б* и *г*  $J_{xy} > 0$ ) в нашем случае имеем

$$J_{x_2y_2} = -\sqrt{(667 - 121) \cdot (204 - 121)} = -213 \text{ см}^4.$$

Вычисляем

$$J_{x_c} = [2900 + 30,6 \cdot 8,46^2] + [204 + 25,3 \cdot (-1,26)^2] + [16,7 + 50 \cdot (-4,54)^2] = 6381,5 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c} = [208 + 30,6 \cdot (-4,62)^2] + [667 + 25,3 \cdot 3,03^2] + [2604,17 + 50 \cdot 1,3^2] = 4448,9 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_c y_c} = [0 + 30,6 \cdot 8,46 \cdot (-4,62)] + [-213 + 25,3 \cdot (-1,26) \cdot 3,03] + [0 + 50 \cdot (-4,54) \cdot 1,3] = -1800,7 \text{ см}^4.$$

2.2. Находим положение главных центральных осей по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2 \cdot J_{x_c y_c}}{J_{x_c} - J_{y_c}} = -\frac{2 \cdot (-1800,7)}{6381,5 - 4448,9} = 1,8635.$$

Тогда  $2\alpha_0 = 61,78^\circ$ , откуда  $\alpha_0 = 30,89^\circ$ .

Откладываем угол  $\alpha_0$  от оси  $x_c$  против часовой стрелки (см. рис. 3.4). Это направление главной оси 1, т. к.  $J_{x_c} > J_{y_c}$ . Главная ось 2 перпендикулярна оси 1.

3. Вычисляем моменты инерции сечения относительно главных центральных осей 1 и 2:

$$\begin{aligned} J_{1;2} &= \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(J_{x_c} - J_{y_c})^2 + 4 \cdot J_{x_c y_c}^2} = \\ &= \frac{6381,5 + 4448,9}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(6381,5 - 4448,9)^2 + 4 \cdot (-1800,7)^2} = \\ &= 5415,2 \pm 2043,6 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Здесь

$$J_1 = 5415,2 + 2043,6 = 7458,8 \text{ см}^4;$$

$$J_2 = 5415,2 - 2043,6 = 3371,6 \text{ см}^4.$$

В качестве проверки расчетов применяем то обстоятельство, что центробежный момент инерции сечения относительно главных осей равен нулю.

Проверяем:

$$\begin{aligned} J_{12} &= \frac{J_{x_c} - J_{y_c}}{2} \cdot \sin 2\alpha_0 + J_{x_c y_c} \cdot \cos 2\alpha_0 = \\ &= \frac{6381,5 - 4448,9}{2} \cdot \sin(61,78^\circ) - 1800,7 \cdot \cos(61,78^\circ) = \\ &= 851,444 - 851,476 = -0,032 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Погрешность вычислений составляет

$$\frac{0,032}{851,444} \cdot 100 \% = 0,004 \% < 1 \% .$$

## 4. ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

### 4.1. Общие положения

Часто на практике стержни подвергаются действию поперечной нагрузки, расположенной в плоскости, проходящей через ось стержня. Такой вид нагружения называется *изгибом*. При изгибе ось стержня искривляется. Стержни, подвергающиеся изгибу, называются *балками*.

Если в поперечном сечении балки действует лишь изгибающий момент, а остальные внутренние силовые факторы отсутствуют, то такой изгиб называется *чистым*. Однако чаще всего в поперечных сечениях балки наряду с изгибающими моментами возникают и поперечные силы. Такой изгиб называется *поперечным*. Если плоскость действия внешних сил (силовая плоскость) проходит через одну из главных центральных осей инерции сечения стержня, то изгиб называется *плоским*, в противном случае – *косым*.

### 4.2. Внутренние силовые факторы при изгибе

Внутренние силовые факторы при изгибе (изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$ ) в произвольном сечении балки определяются с использованием метода сечений, основанного на рассмотрении условий равновесия отсеченной части балки. При этом:

а) поперечная сила в рассматриваемом сечении балки определяется как сумма проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на ось, перпендикулярную оси балки;

б) изгибающий момент в сечении балки определяется как сумма моментов всех внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно центра тяжести сечения.

### 4.3. Правило знаков для поперечных сил и изгибающих моментов

При построении эпюр  $Q$  и  $M$  используют следующее правило знаков:

а) поперечная сила в сечении считается положительной, если внешняя сила, действующая на отсеченную часть балки, стремится повернуть ее по часовой стрелке;

б) изгибающий момент в сечении считается положительным, если балка в рассматриваемом сечении изгибается выпуклостью вниз.

### 4.4. Дифференциальные зависимости при изгибе

Для контроля правильности построения эпюр  $Q$  и  $M$  используются дифференциальные зависимости между интенсивностью распределенной нагрузки  $q$ , поперечной силой  $Q$  и изгибающим моментом  $M$ :

$$\frac{dQ}{dz} = q; \quad \frac{dM}{dz} = Q.$$

На основании этих зависимостей можно сформулировать следующие правила для построения эпюр  $Q$  и  $M$ :

– на участках балки, свободных от распределенной нагрузки, поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону;

– на участке балки с равномерно распределенной нагрузкой поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент – по закону квадратной параболы;

– если на участке балки (при рассмотрении ее слева направо):

а) поперечная сила положительна, то изгибающий момент возрастает;

б) поперечная сила отрицательна, то изгибающий момент убывает;

в) поперечная сила, переходя через ноль, меняет знак с «+» на «-», то  $M = M_{\max}$ ;

г) поперечная сила, переходя через ноль, меняет знак с «-» на «+», то  $M = M_{\min}$ ;

– если на участке балки поперечная сила отсутствует, то момент постоянный (чистый изгиб);

– на концевой шарнирной опоре поперечная сила равна реакции этой опоры, а изгибающий момент равен нулю, если на опоре не приложен внешний сосредоточенный момент;

– в защемленной опоре балки поперечная сила равна реакции опоры, а изгибающей момент – опорному реактивному моменту.

#### 4.5. Напряжения при изгибе

При плоском поперечном изгибе от действия изгибающего момента и поперечной силы в сечениях балки возникают нормальные и касательные напряжения.

*Нормальные напряжения* при изгибе определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{J_x},$$

где  $M$  – изгибающий момент в рассматриваемом сечении балки;

$J_x$  – момент инерции сечения относительно оси  $x$  (нейтральная ось);

$y$  – расстояние от нейтральной оси до рассматриваемой точки.

*Касательные напряжения* при изгибе определяются по формуле Д.И. Журавского:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{b \cdot J_x}, \quad (4.1)$$

где  $Q$  – поперечная сила в рассматриваемом сечении;

$S_x^{\text{отс}}$  – статический момент площади отсеченной части сечения относительно нейтральной оси;

$b$  – ширина слоя, в котором находится рассматриваемая точка;

$J_x$  – момент инерции сечения относительно нейтральной оси.

#### 4.6. Расчеты на прочность при изгибе

При изгибе расчеты на прочность в большинстве случаев производятся только по нормальным напряжениям и лишь иногда производится проверка прочности балки по касательным напряжениям.

Условие прочности по нормальным напряжениям имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

где  $M_{\max}$  – наибольшее значение изгибающего момента в балке;

$W_x$  – осевой момент сопротивления сечения;

$[\sigma]$  – допускаемое напряжение при изгибе.

Момент сопротивления является геометрической характеристикой поперечного сечения балки, определяющей ее прочность при изгибе. Для сечений, симметричных относительно нейтральной оси, момент сопротивления определяется по формуле

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}},$$

где  $J_x$  – момент инерции сечения относительно нейтральной оси;

$y_{\max}$  – ордината наиболее удаленной от нейтральной оси точки.

Если материал балки неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию (например, чугун), то обычно применяют несимметричные относительно нейтральной оси сечения (рис. 4.1). В этом случае расчет ведется отдельно для растянутых и сжатых волокон.

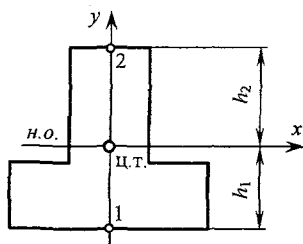


Рис. 4.1

Будем считать, что сверху от нейтральной оси находятся сжатые волокна, а снизу – растянутые. Тогда условия прочности для растянутой и сжатой зон принимают вид



$$\sigma_{\max}^p = \left| \frac{M_{\max}}{J_x} \cdot h_1 \right| \leq [\sigma_p];$$

$$\sigma_{\max}^{\text{сж}} = \left| \frac{M_{\max}}{J_x} \cdot h_2 \right| \leq [\sigma_{\text{сж}}].$$

Наивыгоднейшей формой несимметричных сечений будет такая, при которой запас прочности по растягивающим и сжимающим напряжениям будет одинаков. Для этого нужно, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_{\text{сж}}]}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям записывается в следующем виде:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x^{\text{отс}}}{b \cdot J_x} \leq [\tau].$$

#### 4.7. Перемещения при изгибе

Перемещения балки при изгибе характеризуются двумя параметрами: прогибом  $y$  и углом поворота поперечного сечения  $\theta$ . Эти два параметра связаны между собой дифференциальной зависимостью

$$\frac{dy}{dz} = \theta.$$

Для определения параметров перемещения  $y$  и  $\theta$  может быть использовано приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$EJ_{xy}'' = M(z), \quad (4.2)$$

где  $J_x$  – момент инерции сечения относительно нейтральной оси;  
 $E$  – модуль продольной упругости материала балки;  
 $M(z)$  – изгибающий момент в рассматриваемом сечении балки;  
 $y$  – прогиб в этом же сечении.

Путем интегрирования уравнения (4.2) получают выражение для определения углов поворота и прогибов сечений балки. Постоянные интегрирования определяются при этом из условий закрепления балки.

Более универсальным методом определения перемещений при изгибе является метод начальных параметров. Согласно этому методу расчетные уравнения для определения углов поворота сечений и прогибов, полученные из уравнения (4.2) с применением специальных приёмов интегрирования, имеют следующий вид:

$$EJ\theta = EJ\theta_0 + \sum m \cdot (z-a) + \sum \frac{F \cdot (z-b)^2}{2} + \sum \frac{q \cdot (z-c)^3}{6};$$

$$EJy = EJy_0 + EJ\theta_0 \cdot z +$$

$$+ \sum \frac{m \cdot (z-a)^2}{2} + \sum \frac{F \cdot (z-b)^3}{6} + \sum \frac{q \cdot (z-c)^4}{24}, \quad (4.3)$$

где  $\theta_0$  и  $y_0$  – угол поворота сечения и прогиб балки в начале координат (*начальные параметры*, которые находятся из условий закрепления балки);

$z$  – координата рассматриваемого сечения;

$a, b, c$  – расстояния от начала координат до точек приложения момента, сосредоточенной силы и начала действия распределенной нагрузки соответственно.

Следует отметить, что если распределенная нагрузка заканчивается, не доходя до рассматриваемого сечения, то ее продолжают до данного сечения, одновременно добавляя нагрузку, равную по величине, но обратного направления.

#### Задача 4.1. а

Для заданной схемы балки (рис. 4.2, а) требуется выполнить необходимые расчеты (см. условие к задаче 4 контрольных заданий).

Решение

1. Построение эпюр внутренних силовых факторов  $Q$  и  $M$ .

1.1. Вычисляем опорные реакции:

$$\sum m_A = 0; \quad R_B \cdot 6 - F \cdot 7 - q \cdot 3 \cdot 4,5 + m = 0;$$

$$R_B = \frac{10 \cdot 7 + 20 \cdot 3 \cdot 4,5 - 25}{6} = 30 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = 0; \quad -R_A \cdot 6 - F \cdot 1 + q \cdot 3 \cdot 1,5 + m = 0;$$

$$R_A = \frac{25 - 10 \cdot 1 + 10 \cdot 3 \cdot 1,5}{6} = 10 \text{ кН}.$$

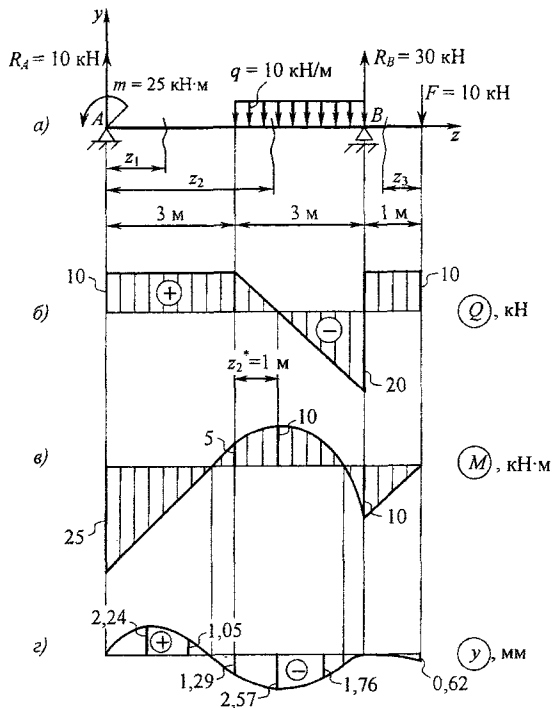


Рис. 4.2

Проверка:

$$\sum y = 0; \quad R_A + R_B - q \cdot 3 - F = 0;$$

$$10 + 30 - 10 \cdot 3 - 10 = 0; \quad 40 - 40 = 0.$$

1.2. Находим значения внутренних силовых факторов на участках балки.

Участок 1 ( $0 \leq z_1 \leq 3$  м):

$$Q_1 = R_A = 10 \text{ кН} = \text{const}; \quad M_1 = R_A \cdot z_1 - m;$$

при  $z_1 = 0$   $M_1 = -25 \text{ кН}\cdot\text{м};$

при  $z_1 = 3$  м  $M_1 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Участок 2 ( $3 \text{ м} \leq z_2 \leq 6 \text{ м}$ ):

$$Q_2 = R_A - q \cdot (z_2 - 3); \quad M_2 = -m + R_A \cdot z_2 - q \cdot (z_2 - 3)^2 / 2;$$

при  $z_2 = 3$  м  $Q_2 = 10 \text{ кН}, \quad M_2 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м};$

при  $z_2 = 6$  м  $Q_2 = -20 \text{ кН}, \quad M_2 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м};$

находим  $z_2^* = \frac{Q_{\text{лев}}}{q} = \frac{10}{10} = 1 \text{ м},$  откуда

$$M_{2\text{max}} = M_{2(\text{лев})} + \frac{1}{2} \cdot Q_{\text{лев}} \cdot z_2^* = 5 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 1 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 3 ( $0 \leq z_3 \leq 1$  м):

$$Q_3 = F = 10 \text{ кН} = \text{const}; \quad M_3 = -F \cdot z_3;$$

при  $z_3 = 0$   $M_3 = 0;$

при  $z_3 = 1$  м  $M_3 = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

По результатам вычислений строим эпюры поперечных сил  $Q$  (рис. 4.2, б) и изгибающих моментов  $M$  (рис. 4.2, в).

2. Подбираем необходимые размеры поперечного сечения балки.

Материал балки – дерево (допускаемое нормальное напряжение при изгибе  $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ ); форма сечения – прямоугольная (отношение высоты сечения к ширине  $h/b = 2$ ).

Из условия прочности при изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

находим требуемый момент сопротивления сечения:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{25 \cdot 10^6}{10} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ мм}^3 = 2500 \text{ см}^3.$$

С другой стороны, для прямоугольного сечения (рис. 4.3) при  $h = 2 \cdot b$

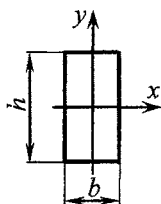


Рис. 4.3

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2 \cdot b)^2}{6} = \frac{2}{3} \cdot b^3.$$

Отсюда находим

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot W_x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2500}{2}} = 15,54 \text{ см.}$$

Принимаем  $b = 16$  см. Тогда  $h = 32$  см;

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{16 \cdot 32^3}{12} = 43691 \text{ см}^4.$$

3. Проверяем прочность балки по касательным напряжениям.

Записываем условие прочности по касательным напряжениям  $\tau_{\max} \leq [\tau]$ . Принимаем  $[\tau] = 2$  МПа. Преобразуя формулу Журавского для определения касательных напряжений при изгибе (4.1), получим для прямоугольного сечения

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{\max}}{A}.$$

Здесь  $Q_{\max} = 20$  кН (из эшюры  $Q$ ),  $A = b \cdot h = 16 \cdot 32 = 512$  см<sup>2</sup>.  
Вычисляем

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{20 \cdot 10^3}{512 \cdot 10^2} = 0,6 \text{ МПа} < [\tau] = 2 \text{ МПа.}$$

Следовательно, прочность балки по касательным напряжениям обеспечивается.

#### 4. Выполняем построение эшюры прогибов.

Проводим координатные оси  $zy$ , помещая начало координат в крайнем левом сечении балки – сечении  $A$  (рис. 4.2,  $a$ ).

Находим начальные параметры  $y_0$  и  $\theta_0$  из условий закрепления балки:

$$\text{при } z = 0 \quad y_A = y_0 = 0; \quad \Rightarrow \quad EJy_0 = 0;$$

$$\text{при } z = 6 \text{ м} \quad y_B = \theta.$$

Тогда, записав уравнение (4.3) для сечения  $B$  ( $z_B = 6$  м)

$$\begin{aligned} EJy_B &= 0 + EJ\theta_0 \cdot z_B - \frac{m \cdot (z_B - 0)^2}{2} + \frac{R_A \cdot (z_B - 0)^3}{6} - \\ &- \frac{q \cdot (z_B - 3)^4}{24} = EJ\theta_0 \cdot 6 - \frac{25 \cdot 6^2}{2} + \frac{10 \cdot 6^3}{6} - \frac{10 \cdot 3^4}{24} = \\ &= 6 \cdot EJ\theta_0 - 450 + 360 - 33,75 = 0, \end{aligned}$$

получим

$$EJ\theta_0 = \frac{123,75}{6} = 20,625 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Записываем уравнение (4.3) для первого участка балки ( $0 \leq z_1 \leq 3$  м):

$$EJy_1 = EJ\theta_0 \cdot z_1 - \frac{m \cdot z_1^2}{2} + \frac{R_A \cdot z_1^3}{6}$$

и, подставляя в него известные числовые значения

$$EJy = 20,625 \cdot z_1 - \frac{25 \cdot z_1^2}{2} + \frac{10 \cdot z_1^3}{6} =$$

$$= 1,667 \cdot z_1^3 - 12,5 \cdot z_1^2 + 20,625 \cdot z_1,$$

вычисляем прогибы при различных значениях  $z_1$ :

$$z_1 = 1 \text{ м},$$

$$EJy_1 = 1,667 \cdot 1^3 - 12,5 \cdot 1^2 + 20,625 \cdot 1 = 9,792 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$y_1 = \frac{9,792 \cdot 10^{12}}{10^4 \cdot 43691 \cdot 10^4} = 2,24 \text{ мм};$$

$$z_1 = 2 \text{ м},$$

$$EJy_2 = 1,667 \cdot 2^3 - 12,5 \cdot 2^2 + 20,625 \cdot 2 = 4,583 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$y_2 = \frac{4,583 \cdot 10^{12}}{10^4 \cdot 43691 \cdot 10^4} = 1,05 \text{ мм};$$

$$z_1 = 3 \text{ м},$$

$$EJy_3 = 1,667 \cdot 3^3 - 12,5 \cdot 3^2 + 20,625 \cdot 3 = -5,625 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$y_3 = \frac{-5,625 \cdot 10^{12}}{10^4 \cdot 43691 \cdot 10^4} = -1,29 \text{ мм}.$$

Записав уравнение (4.3) для второго участка балки ( $3 \text{ м} \leq z_2 \leq 6 \text{ м}$ )

$$EJy = EJ\theta_0 \cdot z_2 - \frac{m \cdot z_2^2}{2} + \frac{R_A \cdot z_2^3}{6} - \frac{q \cdot (z_2 - 3)^4}{24}$$

и подставив в него известные числовые значения

$$EJy = 20,625 \cdot z_2 - \frac{25 \cdot z_2^2}{2} + \frac{10 \cdot z_2^3}{6} - \frac{10 \cdot (z_2 - 3)^4}{24} =$$

$$= -0,417 \cdot (z_2 - 3)^4 + 1,667 \cdot z_2^3 - 12,5 \cdot z_2^2 + 20,625 \cdot z_2,$$

вычисляем прогибы при различных значениях  $z_2$ :

$$z_2 = 4 \text{ м,}$$

$$EJy_4 = -0,417 \cdot 1^4 + 1,667 \cdot 4^3 - 12,5 \cdot 4^2 + 20,625 \cdot 4 = -11,23 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$y_4 = \frac{-11,23 \cdot 10^{12}}{10^4 \cdot 43691 \cdot 10^4} = -2,57 \text{ мм;}$$

$$z_2 = 5 \text{ м,}$$

$$EJy_5 = -0,417 \cdot 2^4 + 1,667 \cdot 5^3 - 12,5 \cdot 5^2 + 20,625 \cdot 5 = -7,672 \text{ кН} \cdot \text{м}^3;$$

$$y_5 = \frac{-7,672 \cdot 10^{12}}{10^4 \cdot 43691 \cdot 10^4} = -1,76 \text{ мм;}$$

$$z_2 = 6 \text{ м,}$$

$$EJy_6 = -0,417 \cdot 3^4 + 1,667 \cdot 6^3 - 12,5 \cdot 6^2 + 20,625 \cdot 6 =$$

$$= -483,777 + 483,822 = 0,045 \approx 0.$$

Погрешность вычислений составила:

$$\frac{0,045}{483,777} \cdot 100 \% = 0,01 \% < 1 \% .$$

Вычисляем прогиб балки на конце консоли ( $z_7 = 7 \text{ м}$ ):



$$\begin{aligned}
 EJy_7 &= EJ\theta_0 \cdot z_7 - \frac{m \cdot z_7^2}{2} + \frac{R_A \cdot z_7^3}{6} + \frac{R_B \cdot (z_7 - 6)^3}{6} - \\
 &- \frac{q \cdot (z_7 - 3)^4}{24} + \frac{q \cdot (z_7 - 6)^4}{24} = 20,625 \cdot 7 - \frac{25 \cdot 7^2}{2} + \\
 &+ \frac{10 \cdot 7^3}{6} + \frac{30 \cdot 1^3}{6} - \frac{10 \cdot 4^4}{24} + \frac{10 \cdot 1^4}{24} = 2,292 \text{ кН} \cdot \text{м}^3; \\
 y_7 &= \frac{2,292 \cdot 10^{12}}{10^4 \cdot 43691 \cdot 10^4} = 0,52 \text{ мм.}
 \end{aligned}$$

По результатам вычислений строим эпюру прогибов (изогнутую ось балки) (рис. 4.2, з). Следует отметить, что сечения, в которых изгибающий момент равен нулю, являются точками перегиба для изогнутой оси балки.

#### Задача 4.1. б

Для заданной схемы рамы (рис. 4.4) требуется выполнить необходимые расчеты (см. условие к задаче 4 контрольных заданий).

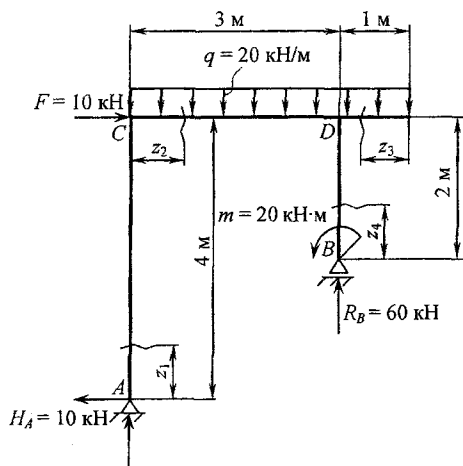


Рис. 4.4

Решение

1. Определяем опорные реакции:

$$\sum x = 0; \quad F - H_A = 0 \quad \Rightarrow \quad H_A = F = 10 \text{ кН};$$

$$\sum m_A = 0; \quad R_B \cdot 3 + m - q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \\ R_B = \frac{-20 + 20 \cdot 8 + 10 \cdot 4}{3} = 60 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = 0; \quad -R_A \cdot 3 - H_A \cdot 2 - F \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 1 + m = 0 \quad \Rightarrow \\ R_A = \frac{-10 \cdot 2 - 10 \cdot 1 + 20 \cdot 4 + 20}{3} = 20 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum y = 0; \quad R_A + R_B - q \cdot 4 = 0; \\ 20 + 60 - 20 \cdot 4 = 0; \quad 80 - 80 = 0.$$

2. Вычисляем значения внутренних силовых факторов на участках рамы.

Участок 1 ( $0 \leq z_1 \leq 4$  м):

$$Q_1 = H_A = 10 \text{ кН} = \text{const}; \quad M_1 = H_A \cdot z_1; \quad N_1 = -R_A = -20 \text{ кН} = \text{const};$$

$$\begin{array}{ll} \text{при } z_1 = 0 & M_1 = 0; \\ \text{при } z_1 = 4 \text{ м} & M_1 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{array}$$

Участок 2 ( $0 \leq z_2 \leq 3$  м):

$$Q_2 = R_A - q \cdot z_2; \quad M_2 = R_A \cdot z_2 - q \cdot (z_2)^2 / 2 + H_A \cdot 4; \quad N_2 = 0;$$

$$\begin{array}{ll} \text{при } z_2 = 0 & Q_2 = 20 \text{ кН}; \quad M_2 = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ \text{при } z_2 = 3 \text{ м} & Q_2 = -40 \text{ кН}; \quad M_2 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}; \end{array}$$

$$\text{находим } z_2^* = \frac{Q_{\text{лев}}}{q} = \frac{20}{20} = 1 \text{ м, откуда}$$

$$M_{2\max} = M_{2(\text{лев})} + \frac{1}{2} \cdot Q_{\text{лев}} \cdot z_2^* = 40 + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 1 = 50 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок 3 ( $0 \leq z_3 \leq 1 \text{ м}$ ):

$$Q_3 = q \cdot z_3; \quad M_3 = -q \cdot (z_3)^2 / 2; \quad N_3 = 0;$$

при  $z_3 = 0$        $Q_3 = 0;$        $M_3 = 0;$   
 при  $z_3 = 1 \text{ м}$        $Q_3 = 20 \text{ кН};$        $M_3 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

Участок 4 ( $0 \leq z_4 \leq 2 \text{ м}$ ):

$$Q_4 = 0; \quad M_4 = m = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad N_4 = -R_B = -60 \text{ кН} = \text{const.}$$

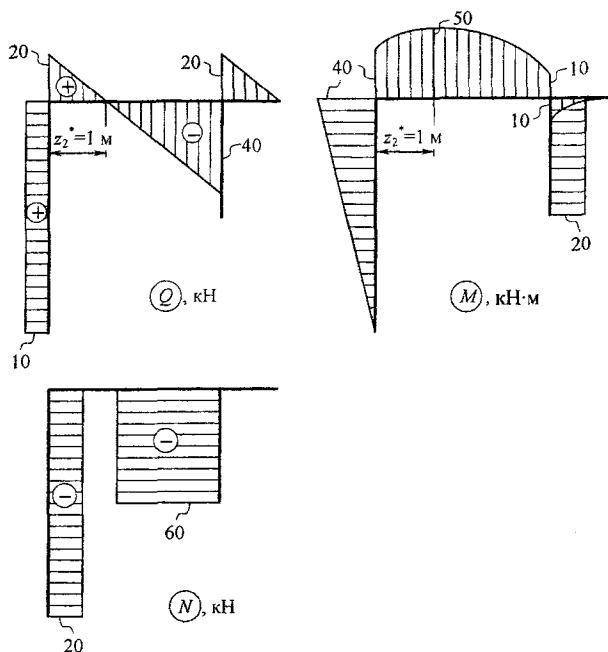


Рис. 4.5

3. Строим эпюры  $Q$ ,  $M$  и  $N$  (рис. 4.5).

При этом следует помнить, что эпюру изгибающих моментов строят со стороны сжатых волокон.

4. Проверяем правильность построения эпюр.

Для этого вырезаем узлы рамы, прикладываем к стержням узлов внутренние силовые факторы, взятые из построенных эпюр с учётом их знаков, и рассматриваем равновесие узлов (рис. 4.6).

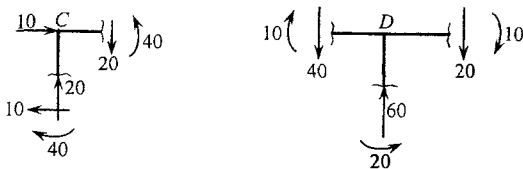


Рис. 4.6

Узел  $C$ :

$$\sum x = 0; \quad 10 - 10 = 0;$$

$$\sum y = 0; \quad 20 - 20 = 0;$$

$$\sum m_C = 0; \quad 40 - 40 = 0.$$

Узел  $D$ :

$$\sum y = 0; \quad 60 - 40 - 20 = 0;$$

$$\sum m_D = 0; \quad 20 - 10 - 10 = 0.$$

### Задача 4.2

Для заданной схемы нагружения балки (рис. 4.7, а) с заданной формой и размерами (см) поперечного сечения (рис. 4.7, б) требуется выполнить необходимые расчеты (см. условие к задаче 5 контрольных заданий).

Дано:

$$l = 3 \text{ м}; \quad F = 50 \text{ кН}; \quad [\sigma_p] = 40 \text{ МПа}; \quad [\sigma_{сж}] = 120 \text{ МПа}.$$

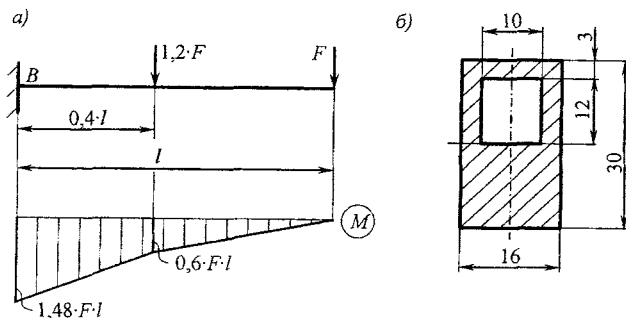


Рис. 4.7

### Решение

Вычерчиваем отдельно сечение балки в удобном масштабе (рис. 4.8, а) и проводим через точку 0 вспомогательные оси  $x_0$  и  $y_0$ . Определяем координаты центра тяжести сечения:

$$x_c = 0; \quad y_c = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2}{A_1 - A_2},$$

где  $A_1 = 16 \cdot 30 = 480 \text{ см}^2$ ;  $A_2 = 10 \cdot 12 = 120 \text{ см}^2$ ;  $y_1 = 15 \text{ см}$ ;  
 $y_2 = 21 \text{ см}$ .

Вычисляем

$$y_c = \frac{480 \cdot 15 - 120 \cdot 21}{480 - 120} = 13 \text{ см}.$$

Через центр тяжести (точку С) проводим главные центральные оси инерции сечения  $x_c$  и  $y_c$ .

Определяем момент инерции относительно главной оси  $x_c$ :

$$J_{x_c} = (J_{x_1} + A_1 \cdot a_1^2) - (J_{x_2} + A_2 \cdot a_2^2),$$

где

$$J_{x_1} = \frac{16 \cdot 30^3}{12} = 36000 \text{ см}^4; \quad J_{x_2} = \frac{10 \cdot 12^3}{12} = 1440 \text{ см}^4;$$

$$a_1 = y_1 - y_c = 15 - 13 = 2 \text{ см}; \quad a_2 = y_2 - y_c = 21 - 13 = 8 \text{ см}.$$

Вычисляем

$$J_{x_c} = (36000 + 480 \cdot 2^2) - (1440 + 120 \cdot 8^2) = 28800 \text{ см}^4.$$

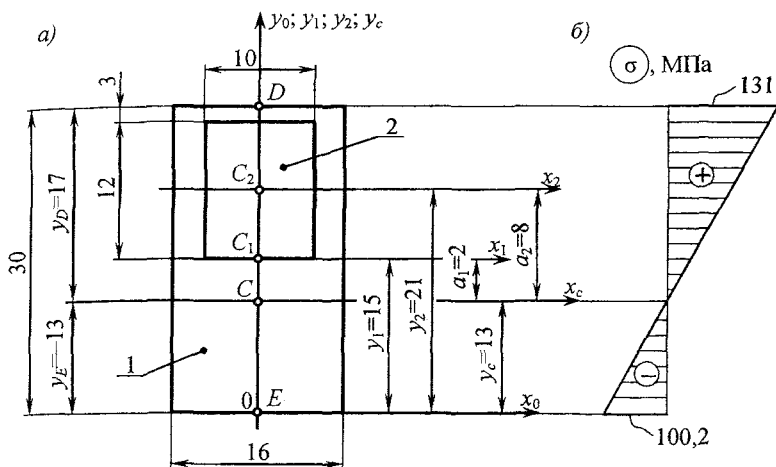


Рис. 4.8

Определяем изгибающий момент в опасном сечении балки (точка  $B$  на рис. 4.7, а):

$$M_{\max} = |M_B| = |-F \cdot l - 1,2 \cdot F \cdot 0,4 \cdot l| = 1,48 \cdot F \cdot l.$$

1. Определяем величины наибольших растягивающих (в точке  $D$  на рис. 4.8, а) и сжимающих (в точке  $E$ ) напряжений в опасном сечении балки:

– наибольшее растягивающее напряжение

$$\begin{aligned} \sigma_{\max(p)} &= \sigma_{(D)} = \frac{M_{\max}}{J_{x_c}} \cdot y_D = \\ &= \frac{1,48 \cdot F \cdot 3 \cdot 10^3}{28800 \cdot 10^4} \cdot 170 = 2,62 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 10^3 = 131 \text{ МПа;} \end{aligned}$$

– наибольшее сжимающее напряжение

$$\sigma_{\max(\text{сж})} = \sigma_{(E)} = \frac{M_{\max}}{J_{x_c}} \cdot y_E =$$

$$= \frac{1,48 \cdot F \cdot 3 \cdot 10^3}{28800 \cdot 10^4} \cdot (-130) = -2,004 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 10^3 = -100,2 \text{ МПа.}$$

2. Строим эпюру нормальных напряжений по высоте сечения (рис. 4.8, б).

3. Определяем величину допускаемой нагрузки:

а) из условия прочности на растяжение

$$\sigma_{\max(p)} = 2,62 \cdot 10^{-3} \cdot F \leq [\sigma_p] \Rightarrow$$

$$F \leq \frac{[\sigma_p]}{2,62 \cdot 10^{-3}} = \frac{40}{2,62 \cdot 10^{-3}} = 15,3 \cdot 10^3 \text{ кН,}$$

б) из условия прочности на сжатие

$$|\sigma_{\max(\text{сж})}| = 2,004 \cdot 10^{-3} \cdot F \leq [\sigma_{\text{сж}}] \Rightarrow$$

$$F \leq \frac{[\sigma_{\text{сж}}]}{2,62 \cdot 10^{-3}} = \frac{120}{2,004 \cdot 10^{-3}} = 59,9 \cdot 10^3 \text{ кН.}$$

Принимаем  $[F] = 15,3 \text{ кН}$ .

4. Определяем допускаемую нагрузку при повороте поперечного сечения на  $180^\circ$ . В этом случае точка  $D$  окажется наиболее удалённой точкой сжатой зоны, а точка  $E$  – растянутой зоны.

Условие прочности на растяжение принимает вид

$$\sigma_{\max(p)} = \sigma_{(E)} = \left| \frac{M_{\max}}{J_{x_c}} \cdot y_E \right| = \frac{1,48 \cdot F \cdot l}{J_{x_c}} \cdot y_E \leq [\sigma_p] \Rightarrow$$

$$F \leq \frac{J_{x_c} \cdot [\sigma_p]}{1,48 \cdot l \cdot y_E} = \frac{28800 \cdot 10^4 \cdot 120}{1,48 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 130} = 20 \cdot 10^3 \text{ кН.}$$

Условие прочности на сжатие

$$\sigma_{\max(\text{сж})} = \sigma_{(D)} = \left| \frac{M_{\max}}{J_{x_c}} \cdot y_D \right| = \frac{1,48 \cdot F \cdot l}{J_{x_c}} \cdot y_D \leq [\sigma_{\text{сж}}] \Rightarrow$$

$$F \leq \frac{J_{x_c} \cdot [\sigma_{\text{сж}}]}{1,48 \cdot l \cdot y_D} = \frac{28800 \cdot 10^4 \cdot 120}{1,48 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 170} = 45,8 \cdot 10^3 \text{ кН.}$$

Принимаем  $[F] = 20$  кН.

5. Сравниваем найденные значения допускаемой нагрузки:

$$\frac{20 - 15,3}{15,3} \cdot 100 \% = 30,7 \%$$

**Вывод:** при повороте поперечного сечения балки на  $180^\circ$  нагрузку на балку можно увеличить на  $30,7\%$ .

## 5. КРУЧЕНИЕ

**Кручением** называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент.

В произвольном поперечном сечении бруса крутящий момент численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Крутящий момент в сечении будем считать положительным, если внешний момент стремится повернуть рассматриваемую часть бруса по часовой стрелке при взгляде на сечение со стороны его внешней нормали.

Условие прочности при кручении бруса круглого поперечного сечения имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{к}(\max)}}{W_{\text{р}}} \leq [\tau], \quad (5.1)$$



где  $M_{\kappa(\max)}$  – крутящий момент в опасном сечении бруса;  
 $[\tau]$  – допускаемое напряжение при кручении;  
 $W_p$  – полярный момент сопротивления сечения.  
 При этом для круглого сплошного сечения

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16};$$

для кольцевого сечения

$$W_p = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \cdot (1 - c^4),$$

где  $c = \frac{d_0}{D}$ ;

$d_0$  – внутренний диаметр кольца;

$D$  – внешний диаметр кольца;

$d$  – диаметр сплошного круглого сечения.

Подставляя значения  $W_p$  в условие прочности (5.1), получим следующие формулы для определения диаметра вала сплошного и кольцевого сечений:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\kappa(\max)}}{\pi \cdot [\tau]}}; \quad D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{\kappa(\max)}}{\pi \cdot [\tau] \cdot (1 - c^4)}}.$$

Условие жесткости при кручении имеет вид

$$\theta_{\max} = \frac{M_{\kappa(\max)}}{GJ_p} \leq [\theta], \quad (5.2)$$

где  $[\theta]$  – допускаемый относительный угол закручивания в радианах на единицу длины вала;

$G$  – модуль сдвига;

$J_p$  – полярный момент инерции сечения.

При этом для круглого сплошного сечения

$$J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32};$$

для кольцевого сечения

$$J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} \cdot (1 - c^4).$$

Подставляя значения  $J_p$  в выражение (5.2), получим формулы для определения диаметра вала из условия жесткости:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{к(\max)}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}}; \quad D \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{к(\max)}}{\pi \cdot G \cdot [\theta] \cdot (1 - c^4)}}.$$

Угол закручивания при кручении определяется по формуле

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{GJ_p} = \theta \cdot l,$$

где  $\theta$  – относительный угол закручивания;

$l$  – длина вала.

Величина угла закручивания вала влияет на точность работы машины. Поэтому для каждого вида машин устанавливают его пределы. Так, для валов, вращающихся с малой и средней скоростью, угол закручивания на длине 1 м обычно находится в пределах от 0,25 до 1°; для быстроходных валов (валы турбин) величина  $[\theta]$  не превышает  $\theta, 1$  ‰.

### Задача

К стальному валу приложены три известных момента и один неизвестный момент  $X$  (рис. 5.1, а). Требуется выполнить необходимые расчеты (см. условие к задаче 6 контрольных заданий).

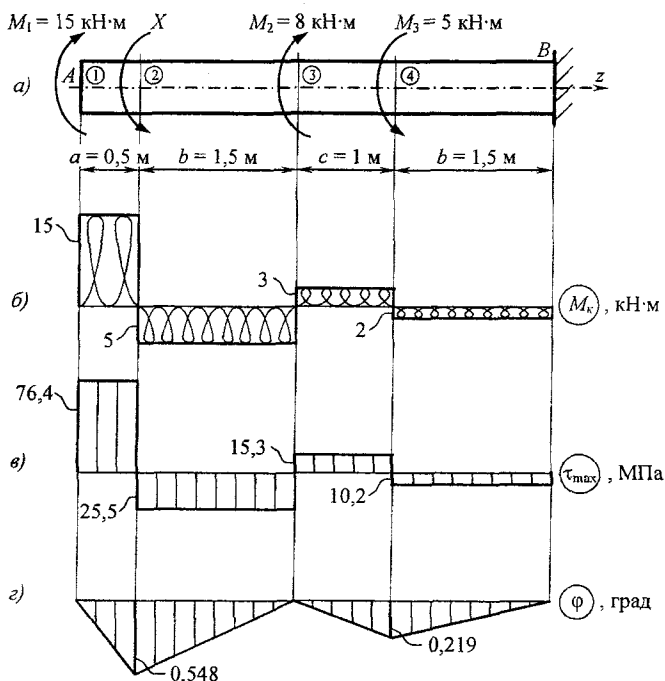


Рис. 5.1

Решение

1. Находим значение момента  $X$ , при котором угол поворота концевое сечения вала равен нулю. Составляем уравнение угла закручивания сечения  $A$ :

$$\varphi_A = \frac{M_1 \cdot (a + 2 \cdot b + c)}{GJ_p} - \frac{X \cdot (2 \cdot b + c)}{GJ_p} + \frac{M_2 \cdot (b + c)}{GJ_p} - \frac{M_3 \cdot b}{GJ_p} = 0 \Rightarrow$$

$$X = \frac{M_1 \cdot (a + 2 \cdot b + c) + M_2 \cdot (b + c) - M_3 \cdot b}{2 \cdot b + c} =$$

$$= \frac{15 \cdot 4,5 + 8 \cdot 2,5 - 6 \cdot 1,5}{4} = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

2. Строим эпюру крутящих моментов. Используя метод сечений, вычисляем внутренние крутящие моменты на характерных участках вала.

$$\text{Участок 1} \quad (0 \leq z_1 \leq 0,5 \text{ м}): \quad M_{k1} = M_1 = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Участок 2} \quad (0,5 \text{ м} \leq z_2 \leq 2 \text{ м}): \quad M_{k2} = M_1 - X = \\ = 15 - 20 = -5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Участок 3} \quad (2 \text{ м} \leq z_3 \leq 3 \text{ м}): \quad M_{k3} = M_1 - X + M_2 = \\ = 15 - 20 + 8 = 3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Участок 4} \quad (3 \text{ м} \leq z_4 \leq 4,5 \text{ м}): \quad M_{k4} = M_1 - X + M_2 - M_3 = \\ = 15 - 20 + 8 - 5 = -2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Из эпюры  $M_k$  (рис. 5.1, б) видно, что  $M_{k(\max)} = M_1 = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

3. Определяем диаметр вала:

а) из условия прочности

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{k(\max)}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 15 \cdot 10^6}{\pi \cdot 80}} = 98,5 \text{ мм} \approx 100 \text{ мм};$$

б) из условия жесткости

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{k(\max)}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 15 \cdot 10^6}{\pi \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0,035 \cdot 10^{-3}}} = 86 \text{ мм} \approx 90 \text{ мм},$$

где  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$  – модуль сдвига для стали;

$$[\theta] = 2 \text{ град/м} = 0,035 \cdot 10^{-3} \text{ рад/мм}.$$

Окончательно принимаем  $d = 100 \text{ мм}$ . Тогда

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{\pi \cdot 10^3}{16} = 196,25 \text{ см}^3;$$

$$J_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 10^4}{32} = 981,25 \text{ см}^4.$$

4. Вычисляем максимальные касательные напряжения на участках вала:

$$\tau_1 = \frac{M_{k1}}{W_p} = \frac{15 \cdot 10^6}{196,25 \cdot 10^3} = 76,4 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{M_{к2}}{W_p} = \frac{-5 \cdot 10^6}{196,25 \cdot 10^3} = -25,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 = \frac{M_{к3}}{W_p} = \frac{3 \cdot 10^6}{196,25 \cdot 10^3} = 15,3 \text{ МПа};$$

$$\tau_4 = \frac{M_{к4}}{W_p} = \frac{-2 \cdot 10^6}{196,25 \cdot 10^3} = -10,2 \text{ МПа}.$$

По этим расчетам строим эпюру  $\tau_{\max}$  (рис. 5.1, в).

5. Находим углы закручивания сечений на каждом участке вала:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{M_{к1} \cdot l_1}{GJ_p} = \frac{15 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{7850 \cdot 10^8} = 0,0096 \text{ рад} = \\ &= 0,0096 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 0,548^\circ, \end{aligned}$$

где  $GJ_p = 8 \cdot 10^4 \cdot 981,25 \cdot 10^4 = 7850 \cdot 10^8 \text{ Н} \cdot \text{мм}^2$ ;

$$\varphi_2 = \frac{M_{к2} \cdot l_2}{GJ_p} = \frac{-5 \cdot 10^6 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{7850 \cdot 10^8} = -0,0096 \text{ рад} = -0,548^\circ;$$

$$\varphi_3 = \frac{M_{к3} \cdot l_3}{GJ_p} = \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3}{7850 \cdot 10^8} = 0,0038 \text{ рад} = 0,219^\circ;$$

$$\varphi_4 = \frac{M_{к4} \cdot l_4}{GJ_p} = \frac{-2 \cdot 10^6 \cdot 1,5 \cdot 10^3}{7850 \cdot 10^8} = -0,0038 \text{ рад} = -0,219^\circ.$$

Вычисляем углы закручивания граничных сечений участков от носительно неподвижного сечения  $B$ :

$$\varphi_{4B} = \varphi_4 = -0,219^\circ;$$

$$\varphi_{3B} = \varphi_{4B} + \varphi_3 = -0,219^\circ + 0,219^\circ = 0;$$

$$\varphi_{2B} = \varphi_{3B} + \varphi_2 = 0 + (-0,548^\circ) = -0,548^\circ;$$

$$\varphi_{1B} = \varphi_{2B} + \varphi_1 = -0,548^\circ + 0,548^\circ = 0.$$

Строим эпюру углов закручивания поперечных сечений вала (рис. 5.1, г).

6. Находим наибольший относительный угол закручивания. При любом количестве участков вала независимо от их линейных размеров величина  $\theta_{\max}$  находится по формуле

$$\theta_{\max} = \frac{|M_{K(\max)}|}{GJ_p} = \frac{15 \cdot 10^6}{7850 \cdot 10^8} = 0,0191 \cdot 10^{-3} \text{ рад/мм} = 1,095 \text{ град/м.}$$

## 6. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ–СЖАТИЕ

### 6.1. Общие положения

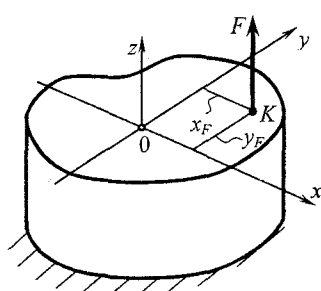


Рис 6.1

При *внецентренном растяжении–сжатии* равнодействующая внешних сил  $F$  не совпадает с осью бруса  $z$ , а проходит через точку (точку  $K$ ), называемую *полюсом*, параллельно оси бруса (рис. 6.1). При таком виде деформации в поперечном сечении бруса действуют одновременно три внутренних силовых фактора – продольная сила  $N$  и изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ :

$$N = F;$$

$$M_x = F \cdot y_F; \tag{6.1}$$

$$M_y = F \cdot x_F,$$

где  $y_F$  и  $x_F$  – координаты полюса  $K$ .

## 6.2. Нормальные напряжения

Нормальные напряжения в произвольной точке сечения находятся по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} \cdot y + \frac{M_y}{J_y} \cdot x,$$

где  $x$  и  $y$  – координаты рассматриваемой точки;

$A$  – площадь поперечного сечения бруса.

Или с учетом соотношений (6.1)

$$\sigma = \frac{N}{A} \cdot \left( 1 + \frac{x_F}{i_y^2} \cdot x + \frac{y_F}{i_x^2} \cdot y \right),$$

где  $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}$ ;  $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$  – радиусы инерции сечения относительно осей  $x$  и  $y$ .

## 6.3. Положение нейтральной линии

Для определения опасной точки произвольного профиля сечения нужно построить *нейтральную линию* (*н.л.*). Опасной будет точка сечения, наиболее удаленная от *н.л.*

Уравнение *н.л.* имеет вид

$$1 + \frac{x_F}{i_y^2} \cdot x + \frac{y_F}{i_x^2} \cdot y = 0.$$

Его можно представить в виде уравнения прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a_x} + \frac{y}{a_y} = 1,$$

где  $a_x$  и  $a_y$  – отрезки, отсекаемые нейтральной линией на координатных осях  $x$  и  $y$  соответственно:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F}; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_F}. \quad (6.2)$$

#### 6.4. Ядро сечения

**Ядром сечения** называется область вокруг центра тяжести сечения, характерная тем, что всякая внецентренно приложенная сила, расположенная внутри этой области или на ее контуре, вызывает во всех точках поперечного сечения напряжение одного знака.

Для построения ядра сечения задаются различными положениями н.л., касательной к контуру сечения, и по формулам (6.2) вычисляют координаты точек приложения силы  $F$ :

$$x_F = -\frac{i_y^2}{a_x}; \quad y_F = -\frac{i_x^2}{a_y}.$$

Соединяя эти точки, получают ядро сечения.

#### Задача

Короткий стержень заданного поперечного сечения сжимается продольной силой  $F$ , приложенной в точке  $A$  (рис. 6.2). Требуется выполнить необходимые расчёты (см. условие к задаче 7 контрольных заданий).

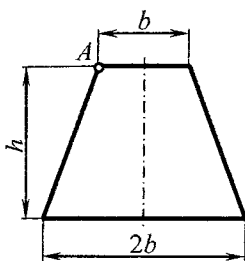


Рис. 6.2

Дано:

$$b = 8 \text{ см}; \quad [\sigma_{\text{сж}}] = 120 \text{ МПа};$$

$$h = 18 \text{ см}; \quad [\sigma_{\text{р}}] = 30 \text{ МПа};$$

$$F = 200 \text{ кН}.$$

Решение

1. Определяем положение нейтральной линии в поперечном сечении данного стержня.



Вычерчиваем сечение в масштабе 1:2 (рис. 6.3). Проводим вспомогательные оси  $x_0$  и  $y_0$  и определяем положение центра тяжести сечения:

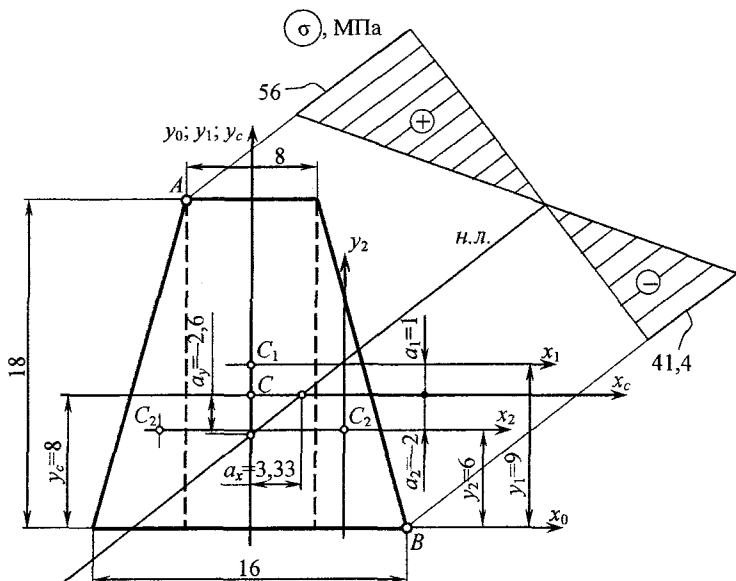


Рис. 6.3

$$x_c = 0; \quad y_c = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{A_1 \cdot y_1 + 2 \cdot A_2 \cdot y_2}{A},$$

где

$$A_1 = 8 \cdot 18 = 144 \text{ см}^2; \quad A_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 18 = 36 \text{ см}^2;$$

$$A = A_1 + 2 \cdot A_2 = 144 + 2 \cdot 36 = 216 \text{ см}^2;$$

$$y_1 = \frac{18}{2} = 9 \text{ см}; \quad y_2 = \frac{18}{3} = 6 \text{ см}.$$

Вычисляем

$$y_c = \frac{144 \cdot 9 + 2 \cdot 36 \cdot 6}{216} = 8 \text{ см.}$$

Через центр тяжести (точку  $C$ ) проводим главные центральные оси сечения  $x_c y_c$  (см. рис. 6.3).

Определяем моменты инерции сечения относительно осей  $x_c$  и  $y_c$ :

$$J_{x_c} = (J_{x_1} + A_1 \cdot a_1^2) + 2 \cdot (J_{x_2} + A_2 \cdot a_2^2);$$

$$J_{y_c} = J_{y_1} + 2 \cdot (J_{y_2} + A_2 \cdot b_2^2),$$

где

$$J_{x_1} = \frac{8 \cdot 18^3}{12} = 3888 \text{ см}^4; \quad J_{x_2} = \frac{4 \cdot 18^3}{36} = 648 \text{ см}^4;$$

$$a_1 = y_1 - y_c = 9 - 8 = 1 \text{ см}; \quad a_2 = -(y_c - y_2) = -(8 - 6) = -2 \text{ см};$$

$$J_{y_1} = \frac{18 \cdot 8^3}{12} = 768 \text{ см}^4; \quad J_{y_2} = \frac{18 \cdot 4^3}{36} = 32 \text{ см}^4;$$

$$b_2 = 4 + \frac{1}{3} \cdot 4 = 5,33 \text{ см.}$$

Вычисляем

$$J_{x_c} = 3888 + 144 \cdot 1^2 + 2 \cdot (648 + 36 \cdot (-2)^2) = 5616 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c} = 768 + 2 \cdot (32 + 36 \cdot 5,33^2) = 3880 \text{ см}^4.$$

Находим квадраты радиусов инерции:

$$i_{x_c}^2 = \frac{J_{x_c}}{A} = \frac{5616}{216} = 26 \text{ см}^2; \quad i_{y_c}^2 = \frac{J_{y_c}}{A} = \frac{2880}{216} = 13,33 \text{ см}^2.$$

Вычисляем отрезки, отсекаемые нейтральной линией на главных центральных осях  $x_c$  и  $y_c$ :

$$a_x = -\frac{i_{y_c}^2}{x_F} = -\frac{13,33}{4} = 3,33 \text{ см}; \quad a_y = -\frac{i_{x_c}^2}{y_F} = -\frac{26}{10} = -2,6 \text{ см},$$

где  $x_F = -4$  см,  $y_F = 10$  см – координаты полюса.

Наносим на чертеж нейтральную линию (см. рис.6.3).

2. Вычисляем наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения в сечении стержня. Они возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии (точках  $A$  и  $B$ ):

$$\sigma_A = \sigma_{\min} = \frac{N}{A} \cdot \left( 1 + \frac{x_F}{i_{y_c}^2} \cdot x_A + \frac{y_F}{i_{x_c}^2} \cdot y_A \right) = \frac{-F}{216 \cdot 10^2} \times$$

$$\times \left( 1 + \frac{(-40) \cdot (-40)}{13,33 \cdot 10^2} + \frac{100 \cdot 100}{26 \cdot 10^2} \right) = -0,28 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 10^3 = -56 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = \sigma_{\max} = \frac{N}{A} \cdot \left( 1 + \frac{x_F}{i_{y_c}^2} \cdot x_A + \frac{y_F}{i_{x_c}^2} \cdot y_A \right) = \frac{-F}{216 \cdot 10^2} \times$$

$$\times \left( 1 + \frac{(-40) \cdot 80}{13,33 \cdot 10^2} + \frac{100 \cdot (-80)}{26 \cdot 10^2} \right) = 0,207 \cdot 10^{-3} \cdot 200 \cdot 10^3 = 41,4 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру напряжений (см. рис. 6.3).

3. Находим допускаемую нагрузку при заданных размерах сечения:

а) из условия прочности на растяжение

$$\sigma_{\max(\text{раст})} = \sigma_{(B)} = 0,207 \cdot 10^{-3} \cdot F \leq [\sigma_p] \quad \Rightarrow$$

$$F \leq \frac{[\sigma_p]}{0,207 \cdot 10^{-3}} = \frac{30}{0,207 \cdot 10^{-3}} = 144,9 \cdot 10^3 \text{ Н} = 144,9 \text{ кН};$$

б) из условия прочности на сжатие

$$\sigma_{\max(\text{сж})} = |\sigma_{(A)}| = 0,28 \cdot 10^{-3} \cdot F \leq [\sigma_{\text{сж}}] \Rightarrow$$

$$F \leq \frac{[\sigma_{\text{с}}]}{0,28 \cdot 10^{-3}} = \frac{120}{0,28 \cdot 10^{-3}} = 428,6 \cdot 10^3 \text{ Н} = 428,6 \text{ кН.}$$

Принимаем  $[F] = 144,9 \text{ кН}$ .

4. Строим ядро сечения.

Для этого задаемся различными положениями нейтральной линии, касательной к контуру сечения (рис. 6.4). Для каждого положения *н.л.* вычисляем координаты полюса.

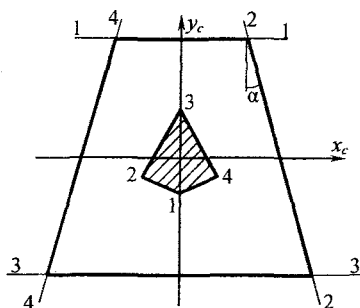


Рис. 6.4

Положение 1-1

Отрезки, отсекаемые *н.л.* на осях  $x_c$  и  $y_c$ :

$$a_{x_c} = \infty; \quad a_{y_c} = 10 \text{ см,}$$

тогда координаты полюса

$$x_{F1} = -\frac{i_{y_c}^2}{a_{x_c}} = 0; \quad y_{F1} = -\frac{i_{x_c}^2}{a_{y_c}} = -\frac{26}{10} = -2,6 \text{ см.}$$

### Положение 2-2

$$a_{x_c} = 4 + 10 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 4 + 10 \cdot \frac{2}{9} = 6,22 \text{ см};$$

$$a_{y_c} = 10 + \frac{4}{\operatorname{tg} \alpha} = 10 + 4 \cdot \frac{9}{2} = 28 \text{ см}; \quad \Rightarrow$$

$$x_{F2} = -\frac{13,33}{6,22} = -2,14 \text{ см}; \quad y_{F2} = -\frac{26}{28} = -0,93 \text{ см}.$$

### Положение 3-3

$$a_{x_c} = \infty; \quad a_{y_c} = -8 \text{ см} \quad \Rightarrow \quad x_{F3} = -\frac{13,33}{\infty} = 0;$$

$$y_{F3} = -\frac{26}{-8} = 3,25 \text{ см}.$$

### Положение 4-4

$$a_{x_c} = -6,22 \text{ см}; \quad a_{y_c} = 28 \text{ см} \quad \Rightarrow \quad x_{F4} = -\frac{13,33}{-6,22} = 2,14 \text{ см};$$

$$y_{F4} = -\frac{26}{28} = -0,93 \text{ см}.$$

По вычисленным координатам наносим точки приложения внешней силы, соединяя которые, получим очертание ядра сечения (см. рис. 6.4).

## 7. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ СЛОЖНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

В общем случае действия внешних сил на стержень в его поперечных сечениях возникает шесть внутренних силовых факторов (рис. 7.1):

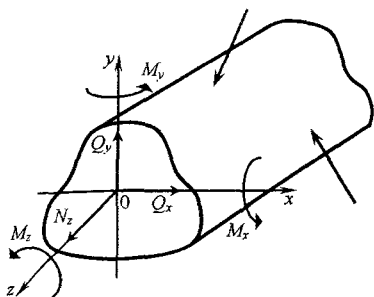


Рис. 7.1

$Q_x$  и  $Q_y$  – поперечные силы;  
 $N_z$  – продольная сила;  
 $M_x$  и  $M_y$  – изгибающие моменты;  
 $M_z$  – крутящий момент.

Для нахождения опасного сечения строят эпюры внутренних силовых факторов.

Для определения опасной точки сечения строят эпюры нормальных и касательных напряжений, возникающих в результате действия

внутренних силовых факторов. Влиянием поперечных сил в большинстве случаев пренебрегают. Опасной является точка, в которой эквивалентное напряжение наибольшее.

Опасные точки сечения удобно находить путем построения нейтральной линии и отыскания точек, наиболее удаленных от нее. Записав формулу нормальных напряжений для заданного случая сложного сопротивления и приравняв ее к нулю, получают уравнение нейтральной линии.

Проверку прочности стержней производят путем сравнения эквивалентного (расчетного) напряжения в опасной точке наиболее нагруженного сечения с допусаемым напряжением.

### Задача

Для заданной пространственной системы стержней одинаковой длины  $l$ , нагруженной силами  $F$  и  $q$  (рис. 7.2), требуется выполнить необходимые расчеты (см. условие к задаче 8 контрольных заданий).

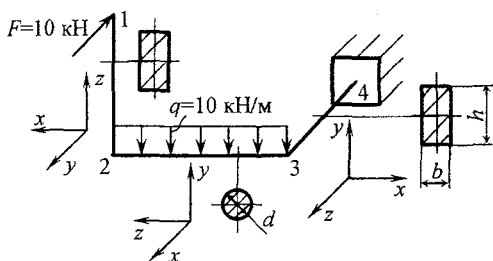


Рис. 7.2

Дано:

$l = 0,2$  м;  
 $d = 8$  см;  
 $h = 8$  см;  
 $h/b = 2$ ;  
 $F = 10$  кН;  
 $q = 10$  кН/м;  
 $[\sigma] = 160$  МПа;  
 $[\tau] = 80$  МПа.

### Решение

1. Строим в аксонометрии эпюры внутренних силовых факторов. Пользуясь скользящей системой координат, направляя ось  $z$  вдоль оси стержня (см. рис. 7.2), вычисляем внутренние силовые факторы в сечениях каждого стержня.

*Стержень 1–2*

$$Q_{y_{12}} = F = 10 \text{ кН}; \quad Q_{x_{12}} = 0; \quad N_{12} = 0;$$

$$M_{x_1} = 0; \quad M_{x_2} = F \cdot l = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_y = 0; \quad M_z = 0.$$

*Стержень 2–3*

$$Q_{x_{23}} = 10 \text{ кН}; \quad Q_{y_2} = 0; \quad Q_{y_3} = -q \cdot l = -2 \text{ кН}; \quad N_{23} = 0;$$

$$M_{x_2} = 0; \quad M_{x_3} = \frac{-q \cdot l^2}{2} = -0,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{y_2} = 0; \quad M_{y_3} = F \cdot l = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{z_{23}} = F \cdot l = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

*Стержень 3–4*

$$Q_{y_{34}} = -q \cdot l = -2 \text{ кН}; \quad Q_{x_{34}} = 0; \quad N_{34} = -F = -10 \text{ кН};$$

$$M_{x_3} = F \cdot l = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{x_4} = F \cdot l - q \cdot l^2 = 2 - 0,4 = 1,6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{y_{34}} = F \cdot l = 2 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_z = \frac{q \cdot l^2}{2} = 0,2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По выполненным расчетам строим эпюры продольных и поперечных сил и изгибающих и крутящих моментов (рис. 7.3). Ординаты эпюр изгибающих моментов откладываем со стороны сжатых волокон.

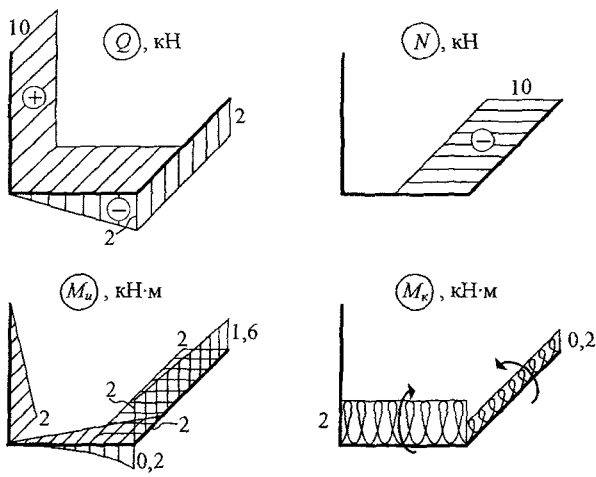


Рис. 7.3

Проверяем правильность построения эпюр по условиям равновесия узлов: вырезаем узел и прикладываем к нему все внутренние усилия, взятые из соответствующих эпюр.

Узел 2 (рис. 7.4):  
 $\sum y = 10 - 10 = 0;$   
 $\sum M_x = 2 - 2 = 0.$

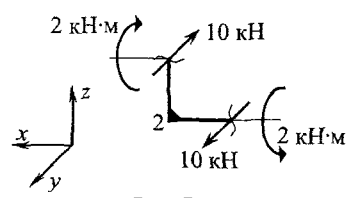


Рис. 7.4

Узел 3 (рис. 7.5):  
 $\sum y = 2 - 2 = 0;$   
 $\sum z = 10 - 10 = 0;$   
 $\sum M_x = 2 - 2 = 0;$   
 $\sum M_y = 2 - 2 = 0;$   
 $\sum M_z = 0,2 - 0,2 = 0.$

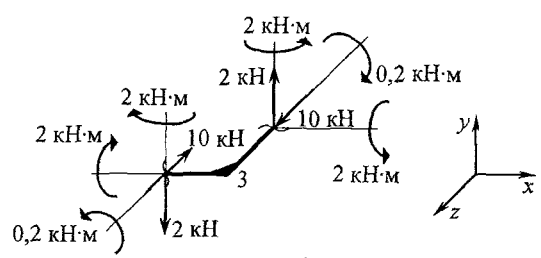


Рис. 7.5

Условия равновесия узлов выполняются.



2. Рассмотрим каждый стержень в отдельности.

*Стержень 1-2*

Стержень испытывает плоский поперечный изгиб.

Опасным сечением является сечение 2. Изображаем его в рабочем положении в аксонометрии, показывая внутренние силовые факторы, действующие в этом сечении (рис. 7.6).

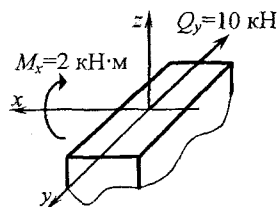


Рис. 7.6

Находим положение нейтральной линии в опасном сечении стержня. При плоском изгибе ею является центральная ось  $x$ .

Вычисляем наибольшие нормальные и касательные напряжения в опасном сечении:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}; \quad \tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{A},$$

где

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{4 \cdot 8^2}{6} = 42,67 \text{ см}^3; \quad A = b \cdot h = 4 \cdot 8 = 32 \text{ см}^2.$$

Тогда

$$\sigma_{\max} = \frac{2 \cdot 10^6}{42,67 \cdot 10^3} = 46,9 \text{ МПа}; \quad \tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{10 \cdot 10^3}{32 \cdot 10^2} = 4,7 \text{ МПа}.$$

Строим эпюры  $\sigma$  и  $\tau$  (рис. 7.7).

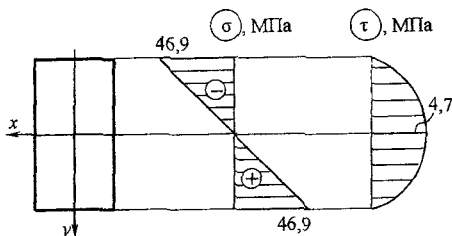


Рис. 7.7

Проверяем прочность стержня. Касательными напряжениями от действия поперечной силы  $Q_y$  пренебрегаем. Поэтому из условия прочности

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

имеем  $\sigma_{\max} = 46,9 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Следовательно, прочность стержня обеспечивается.

### Стержень 2–3

Стержень испытывает поперечный изгиб в двух плоскостях и кручение.

Опасным сечением является сечение 3. Изображаем его в рабочем положении, показывая действующие в этом сечении внутренние силовые факторы (рис. 7.8).

Находим положение нейтральной линии. Для этого записываем формулу нормальных напряжений в произвольной точке сечения с положительными координатами  $x$  и  $y$  и приравняем это выражение к нулю:

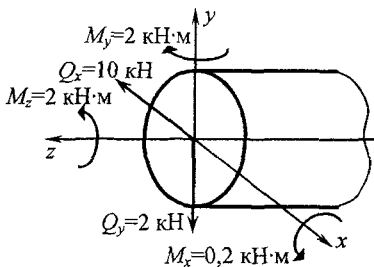


Рис. 7.8

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_0 + \frac{M_y}{J_y} \cdot x_0 = 0.$$

Поскольку для круглого сечения  $J_x = J_y$ , то

$$y_0 = -\frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} \cdot x_0 = -\frac{M_y}{M_x} \cdot x_0$$

или

$$y_0 = k \cdot x_0,$$

где  $k$  – угловой коэффициент *н.л.*

Этот коэффициент равен

$$k = \operatorname{tg} \beta = \frac{-M_y}{M_x} = -\frac{2}{0,2} = -10,$$

откуда имеем  $\beta = -84,289^\circ$ .

Так как угол  $\beta$  отрицательный, то откладываем его от положительного направления оси  $x$  в сторону отрицательной полуоси  $y$  (рис. 7.9).

Вычисляем в опасном сечении наибольшие нормальные напряжения от изгиба и наибольшие касательные напряжения от кручения стержня:

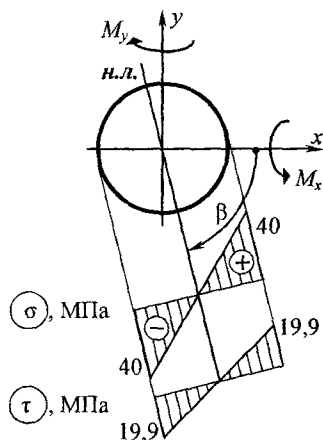


Рис. 7.9

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\text{и}}}{W_x} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = \frac{32 \cdot \sqrt{2^2 + 0,2^2} \cdot 10^6}{\pi \cdot 80^3} = 40,0 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 16}{\pi \cdot 80^3} = 19,9 \text{ МПа}.$$

Строим эпюры  $\sigma$  и  $\tau$  (см. рис. 7.9).

Проверим прочность стержня, например, по третьей теории прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} = \sqrt{40^2 + 4 \cdot 19,9^2} = 56,4 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Следовательно, прочность стержня обеспечена.

*Стержень 3-4*

Стержень испытывает поперечный изгиб в плоскости  $xz$ , чистый изгиб в плоскости  $yz$ , кручение и сжатие.

Опасным сечением является сечение 3. Изображаем его в аксонометрии и показываем внутренние силовые факторы (рис. 7.10).

Вычисляем необходимые геометрические характеристики сечения:

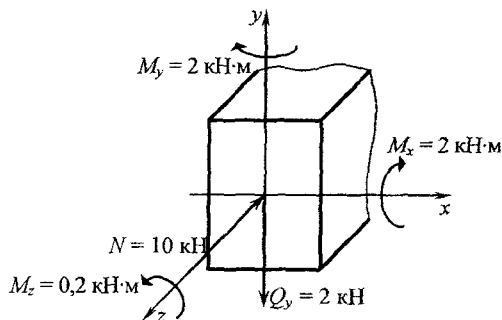


Рис. 7.10

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{4 \cdot 8^2}{6} = 42,67 \text{ см}^3; \quad W_y = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{8 \cdot 4^2}{6} = 21,33 \text{ см}^3;$$

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{4 \cdot 8^3}{12} = 170,67 \text{ см}^4; \quad J_y = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{8 \cdot 4^3}{12} = 42,67 \text{ см}^4;$$

$$A = b \cdot h = 4 \cdot 8 = 32 \text{ см}^2.$$

Находим положение нейтральной линии в опасном сечении стержня. Для этого записываем формулу нормальных напряжений в произвольной точке сечения с положительными координатами и приравниваем ее к нулю:

$$\sigma = -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} \cdot y_0 + \frac{M_y}{J_y} \cdot x_0 = 0.$$

Уравнение можно представить в виде уравнения прямой в отрезках:

$$\frac{x_0}{a_x} + \frac{y_0}{a_0} = 1,$$

где  $a_x, a_y$  – отрезки, отсекаемые н.л. на осях  $x$  и  $y$  соответственно:

$$a_x = \frac{J_y}{A} \cdot \frac{N}{M_y} = \frac{i_y^2 \cdot N}{M_y}; \quad a_y = -\frac{J_x}{A} \cdot \frac{N}{M_x} = -\frac{i_x^2 \cdot N}{M_x};$$

$$i_x^2 = \frac{J_x}{A}; \quad i_y^2 = \frac{J_y}{A}.$$

Находим величины этих отрезков:

$$a_x = \frac{J_y}{A} \cdot \frac{N}{M_y} = \frac{42,67 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 10^3}{32 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^6} = 0,7 \text{ мм};$$

$$a_y = -\frac{J_x}{A} \cdot \frac{N}{M_x} = -\frac{170,67 \cdot 10^4 \cdot 10 \cdot 10^3}{32 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^6} = -2,7 \text{ мм}.$$

Отложив эти отрезки вдоль осей  $x$  и  $y$ , проводим *н.л.* (рис. 7.11).

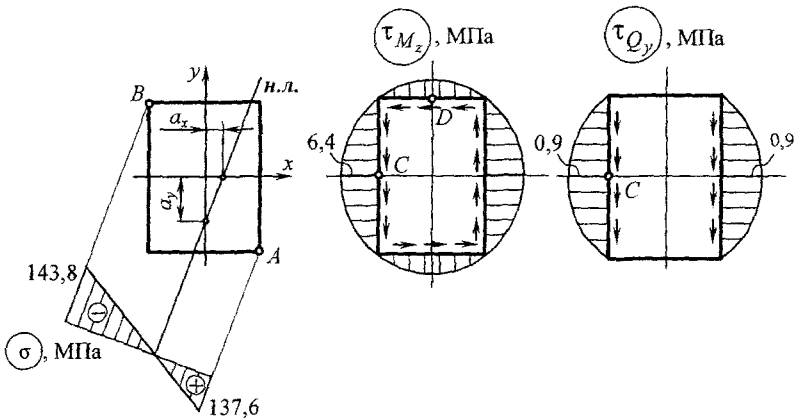


Рис. 7.11

Строим эпюры нормальных и касательных напряжений в опасном сечении. Для этого вычисляем:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} = \sigma_A &= -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = -\frac{10 \cdot 10^3}{32 \cdot 10^2} + \frac{2 \cdot 10^6}{42,67 \cdot 10^3} + \frac{2 \cdot 10^6}{21,33 \cdot 10^3} = \\ &= -3,1 + 46,9 + 93,8 = 137,6 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_B = -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} = -3,1 - 46,9 - 93,8 = -143,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max(Q_y)} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 10^3}{32 \cdot 10^2} = 0,9 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max(M_z)} = \tau_C = \frac{M_z}{M_K} = \frac{0,2 \cdot 10^6}{0,246 \cdot 8 \cdot 4^2 \cdot 10^3} = 6,4 \text{ МПа},$$

где  $W_K = \alpha \cdot h \cdot b^2$  – момент сопротивления кручению;

$\alpha$  – коэффициент, зависящий от соотношения сторон  $h$  и  $b$  (при  $h/b = 2$ , согласно таблице коэффициентов,  $\alpha = 0,246$ ).

По результатам вычислений строим эпюры  $\sigma$  и  $\tau$  (см. рис. 7.11).

Проверяем прочность стержня. Проверку производим для точек  $B$  и  $C$  (см. рис. 7.11).

*Точка B*

$$|\sigma_B| = 143,8 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}; \quad \tau_B = 0.$$

*Точка C*

$$|\sigma_C| = \left| \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y} \right| = \left| \frac{-10 \cdot 10^2}{32 \cdot 10^3} - \frac{2 \cdot 10^6}{21,33 \cdot 10^3} \right| = |-3,1 - 93,8| = 96,9 \text{ МПа};$$

$$\tau_C = \tau_{\max(Q_y)} + \tau_{\max(M_z)} = 0,9 + 6,4 = 7,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\sigma_C^2 + 4 \cdot \tau_C^2} = \sqrt{96,9^2 + 4 \cdot 7,3^2} = 98 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Следовательно, прочность стержня обеспечивается.

## 8. КРУЧЕНИЕ С ИЗГИБОМ

При *совместном действии* кручения и изгиба в поперечных сечениях стержня возникают крутящий момент  $M_z$  и изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ . Действием поперечных сил  $Q_x$  и  $Q_y$ , возникающих при изгибе, пренебрегают. Примером деталей, работающих на совместное действие кручения и изгиба, являются валы различных машин и механизмов.

Для отыскания опасного сечения вала строят эпюры внутренних силовых факторов. Наиболее нагруженными точками опасного сечения являются точки пересечения силовой линии с контуром этого сечения.

В опасных точках сечения при кручении с изгибом имеет место так называемое упрощенное плоское напряженное состояние, характерное тем, что одно из исходных нормальных напряжений равно нулю, а главные напряжения распределяются следующим образом:  $\sigma_1 > 0$ ;  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 < 0$ .

Эквивалентное напряжение вычисляется в зависимости от принятой теории прочности.

По *теории наибольших касательных напряжений* (в учебной литературе ее называют третьей теорией прочности)  $\sigma_{\text{эКВ}}$  вычисляется по формуле

$$\sigma_{\text{эКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}.$$

По *теории удельной потенциальной энергии изменения формы* (энергетическая или четвертая теория прочности) эта формула имеет вид

$$\sigma_{\text{эКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}.$$

Здесь  $\sigma$  – нормальное напряжение в опасной точке поперечного сечения;

$\tau$  – касательное напряжение в этой точке.

Обе эти формулы применяются на практике при расчете валов, изготовленных из пластичных материалов (конструкционные стали).

Условие прочности при кручении с изгибом имеет вид

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{W} \leq [\sigma],$$

где

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{И}}^2 + M_{\text{К}}^2} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2};$$

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{И}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{К}}^2} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75 \cdot M_z^2}.$$

Здесь момент сопротивления изгибу соответственно сплошного сечения вала и кольцевого сечения

$$W = \frac{\pi \cdot d^3}{32}; \quad W = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - c^4),$$

где  $c = \frac{d_0}{D};$

$d_0$  и  $D$  – внутренний и наружный диаметры сечения.  
Требуемый диаметр вала находится по формулам

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{ЭКВ}}}{\pi \cdot [\sigma]}}; \quad D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{ЭКВ}}}{\pi \cdot [\sigma] \cdot (1 - c^4)}}.$$

### Задача

Стальной вал (рис. 8.1, а) диаметром  $d$ , вращающийся со скоростью  $n = 500$  об/мин, через шкив 1 ременной передачи диаметром  $D_1 = 600$  мм развивает мощность  $P_1 = 60$  кВт, которая затем передается шестерням 2 и 3 в отношении  $P_2/P_3 = 2$ . Делительные диаметры шестерен  $D_2 = 200$  мм,  $D_3 = 250$  мм. Выполнить необходимые расчеты (см. условие задачи 9 контрольных заданий).



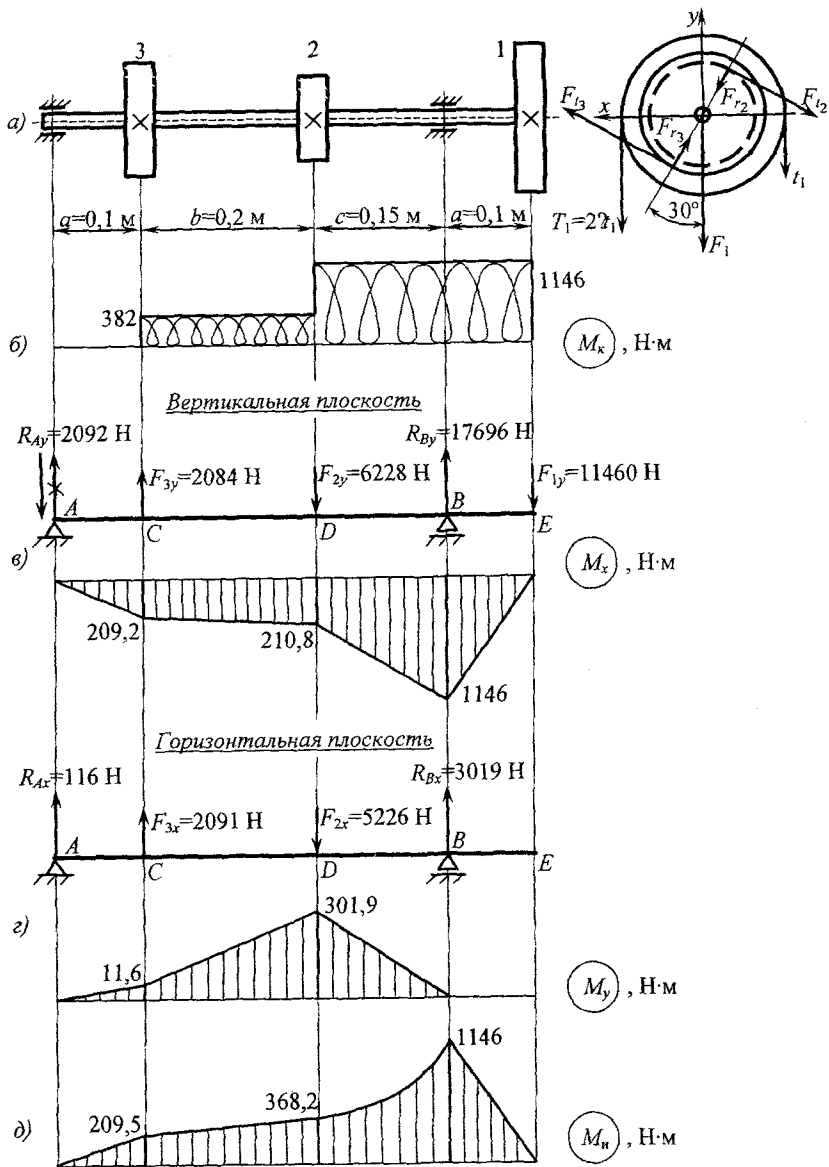


Рис. 8.1

### Решение

1. Определяем крутящие моменты, приложенные к шкиву и шестерням.

Момент, приложенный к шкиву

$$M_1 = \frac{P_1}{\omega} = \frac{30 \cdot P_1}{\pi \cdot n} = 9,55 \cdot \frac{P_1}{n}, \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Здесь  $\omega$  – угловая скорость вращения вала;  $P_1$  – в Вт;  $n$  – в об/мин. Тогда

$$M_1 = 9,55 \cdot \frac{60 \cdot 10^3}{500} = 1146 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Записываем уравнение равновесия вала:

$$\sum M_z = 0; \quad M_1 - M_2 - M_3 = 0.$$

При этом  $\frac{M_2}{M_3} = \frac{P_2}{P_3} = 2 \Rightarrow M_2 = 2 \cdot M_3$ . Тогда  $M_1 - 3 \cdot M_3 = 0$ .

Отсюда находим моменты, приложенные к шестерням:

$$M_3 = \frac{M_1}{3} = \frac{1146}{3} = 382 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad M_2 = 2 \cdot 382 = 764 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

2. Строим эпюру крутящих моментов (рис. 8.1, б).

3. Определяем нагрузки, действующие на вал.

Выражаем момент на шкиве через силы натяжения ветвей ремня:

$$M_1 = (T_1 - t_1) \cdot \frac{D_1}{2} = \frac{t_1 \cdot D_1}{2},$$

откуда  $t_1 = \frac{2 \cdot M_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 1146 \cdot 10^3}{600} = 3820 \text{ Н}; \quad T_1 = 2 \cdot t_1 = 2 \cdot 3820 = 7640 \text{ Н}.$

Тогда сила давления ременной передачи на вал

$$F_1 = T_1 + t_1 = 3 \cdot t_1 = 3 \cdot 3820 = 11460 \text{ Н.}$$

Находим усилия, действующие в зубчатых зацеплениях:

– окружные:

$$M_2 = F_{t_2} \cdot \frac{D_2}{2} \Rightarrow F_{t_2} = \frac{2 \cdot M_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 764 \cdot 10^3}{200} = 7640 \text{ Н;}$$

$$M_3 = F_{t_3} \cdot \frac{D_3}{2} \Rightarrow F_{t_3} = \frac{2 \cdot M_3}{D_3} = \frac{2 \cdot 382 \cdot 10^3}{250} = 3056 \text{ Н;}$$

– радиальные:

$$F_{r_2} = F_{t_2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 7640 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ = 2781 \text{ Н;}$$

$$F_{r_3} = F_{t_3} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 3056 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ = 1112 \text{ Н,}$$

где  $\alpha = 20^\circ$  – угол зацепления.

4. Определяем нагрузки, действующие на вал.

Действующие на вал силы раскладываем на горизонтальные и вертикальные составляющие:

$$F_{1x} = 0;$$

$$F_{t_2x} = -F_{t_2} \cdot \cos 30^\circ = -7640 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -6616 \text{ Н;}$$

$$F_{t_3x} = F_{t_3} \cdot \cos 30^\circ = 3056 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2647 \text{ Н;}$$

$$F_{r_2x} = F_{r_2} \cdot \cos 60^\circ = 2781 \cdot 0,5 = 1390 \text{ Н;}$$

$$F_{r_3x} = -F_{r_3} \cdot \cos 60^\circ = -1112 \cdot 0,5 = -556 \text{ Н;}$$

$$\begin{aligned}
 F_{1y} &= -F_1 = -11460 \text{ Н}; \\
 F_{t_{2y}} &= -F_{t_2} \cdot \cos 60^\circ = -7640 \cdot 0,5 = -3820 \text{ Н}; \\
 F_{t_{3y}} &= F_{t_3} \cdot \cos 60^\circ = 3056 \cdot 0,5 = 1528 \text{ Н}; \\
 F_{r_{2y}} &= -F_{r_2} \cdot \cos 30^\circ = -2781 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -2408 \text{ Н}; \\
 F_{r_{3y}} &= F_{r_3} \cdot \cos 30^\circ = 556 \text{ Н}.
 \end{aligned}$$

Силы, изгибающие вал в вертикальной и горизонтальной плоскостях

$$\begin{aligned}
 F_{1y} &= -11460 \text{ Н}; \\
 F_{2y} &= F_{t_{2y}} + F_{r_{2y}} = -3820 - 2408 = -6228 \text{ Н}; \\
 F_{3y} &= F_{t_{3y}} + F_{r_{3y}} = 1528 + 556 = 2084 \text{ Н}; \\
 F_{1x} &= 0; \\
 F_{2x} &= F_{t_{2x}} + F_{r_{2x}} = -6616 + 1390 = -5226 \text{ Н}; \\
 F_{3x} &= F_{t_{3x}} + F_{r_{3x}} = 2647 - 556 = 2091 \text{ Н}.
 \end{aligned}$$

5. Строим эпюры изгибающих моментов отдельно в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

*Вертикальная плоскость*

Изображаем вал в виде балки на двух опорах и прикладываем к ней все силы, действующие в вертикальной плоскости. При этом силы со знаком «+» направляем вверх, а силы со знаком «-» – вниз (рис. 8.1, в) и дальше их учитываем по абсолютной величине.

Определяем опорные реакции:

$$\begin{aligned}
 \sum m_A = 0; \quad R_{By} \cdot 0,45 - F_{1y} \cdot 0,55 - F_{2y} \cdot 0,3 + F_{3y} \cdot 0,1 = 0; \\
 R_{By} = 17696 \text{ Н};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum m_B = 0; \quad -R_{Ay} \cdot 0,45 - F_{3y} \cdot 0,35 + F_{2y} \cdot 0,15 + F_{1y} \cdot 0,1 = 0; \\
 R_{Ay} = -2092 \text{ Н}.
 \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned}\sum y = 0; \quad R_{Ay} + R_{By} + F_{3y} - F_{1y} - F_{2y} &= 0; \\ -2092 + 17696 + 2084 - 11460 - 6228 &= 0; \\ -19780 + 19780 &= 0.\end{aligned}$$

Вычисляем изгибающие моменты в характерных сечениях:

$$M_{x(A)} = 0; \quad M_{x(E)} = 0;$$

$$M_{x(C)} = -2092 \cdot 0,1 = -209,2 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{x(D)} = -2092 \cdot 0,3 + 2084 \cdot 0,2 = -210,8 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{x(B)} = -11460 \cdot 0,1 = -1146 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

По результатам расчетов строим эпюру  $M_x$  (см. рис. 8.1, в).

*Горизонтальная плоскость*

Изображаем вал в виде балки на двух опорах и прикладываем к ней все силы, действующие в горизонтальной плоскости (рис. 8.1, г).

Определяем опорные реакции:

$$\begin{aligned}\sum m_A = 0; \quad R_{Bx} \cdot 0,45 - F_{2x} \cdot 0,3 + F_{3x} \cdot 0,1 &= 0; \\ R_{Bx} &= 3019 \text{ Н};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum m_B = 0; \quad -R_{Ax} \cdot 0,45 - F_{3x} \cdot 0,35 + F_{2x} \cdot 0,15 &= 0; \\ R_{Ax} &= 116 \text{ Н}.\end{aligned}$$

Проверка:  $\sum x = 0; \quad R_{Ax} + R_{Bx} + F_{3x} - F_{2x} = 0;$   
 $116 + 3019 + 2091 - 5226 = 0; \quad 5226 - 5226 = 0.$

Вычисляем изгибающие моменты в характерных сечениях:

$$M_{y(A)} = 0; \quad M_{y(C)} = 116 \cdot 0,1 = 11,6 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{y(B)} = 0; \quad M_{y(D)} = 3019 \cdot 0,1 = 301,9 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

По результатам расчетов строим эпюру  $M_y$  (см. рис. 8.1, г).

6. Строим суммарную эпюру изгибающих моментов.

По формуле  $M_{и} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$  вычисляем суммарные моменты в характерных сечениях (рис. 8.1, д):

$$M_{и(A)} = 0; \quad M_{и(E)} = 0; \quad M_{и(B)} = 1146 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{и(C)} = \sqrt{209,2^2 + 11,6^2} = 209,5 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{и(D)} = \sqrt{210,8^2 + 301,9^2} = 368,2 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

При этом суммарная эпюра будет прямолинейной на тех участках, где изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  одновременно возрастают или убывают. В противном случае эпюра будет криволинейно-вогнутой.

7. Для наиболее опасного сечения вала (сечения  $B$ ) вычисляем величину эквивалентного момента по III теории прочности:

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{и}^2 + M_{к}^2} = \sqrt{1146^2 + 1146^2} = 1620,7 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

8. Определяем диаметр вала, приняв  $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$ :

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{ЭКВ}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1620,7 \cdot 10^3}{\pi \cdot 100}} = 54,87 \text{ мм}.$$

Принимаем  $d = 55 \text{ мм}$ .

## 9. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ И НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

### 9.1. Общие положения

Как указывалось ранее, одним из основных методов расчета *статически неопределимых систем* (стержневых, рамных, балочных и др.) является *метод сил*. Этот метод подробно рассмотрен в разделе 1. Особенностью расчета плоских, статически неопределимых рам и неразрезных балок является то обстоятельство, что элементы этих систем работают в основном на изгиб. Поэтому коэффициенты при неизвестных и свободные члены канонических уравнений метода сил (1.1), определяемые с помощью интеграла Максвелла–Мора, вычисляются по более простым формулам:

$$\delta_{ii} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i^2}{EJ} \cdot dz; \quad \delta_{ik} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_k}{EJ} \cdot dz;$$

$$\Delta_{iF} = \sum_0^l \int \frac{\bar{M}_i \cdot M_F}{EJ} \cdot dz.$$

На практике эти интегралы в случае прямолинейных стержней с постоянной по длине жесткостью вычисляют по правилу А.Н. Верещагина. Это правило формулируется следующим образом: *определенный интеграл от произведения двух функций (эпюр), одна из которых прямолинейна, равен произведению площади криволинейной эпюры  $\omega_F$  на ординату  $y_C$ , взятую из прямолинейной эпюры под центром тяжести криволинейной.*

То есть

$$\int_0^l f_1(z) \cdot f_2(z) \cdot dz = \omega_1 \cdot f_2(z_{ц.т.}) \quad \text{или} \quad \int_0^l \bar{M}_i \cdot M_F \cdot dz = \omega_F \cdot y_C.$$

В случае если обе функции (эпюры) линейные, то операция перемножения обладает свойством *коммутативности*. В этом случае можно брать площадь любой эпюры, умножая ее на ординату другой.

## 9.2. Использование симметрии при расчете рам

На практике часто встречаются рамы, обладающие геометрической и упругой симметрией относительно оси (упругая симметрия имеет место в том случае, когда жесткости симметрично расположенных элементов рамы равны друг другу).

Рассмотрим основные методы расчета симметричных систем.

1. На симметричное сооружение действуют только симметричные или только кососимметричные нагрузки. В этом случае нужно придерживаться следующего правила:

*при действии на симметричную систему симметричной внешней нагрузки в ней возникают одни лишь симметричные неизвестные; при действии на симметричную систему кососимметричной внешней нагрузки в ней возникают одни лишь кососимметричные неизвестные.*

Это правило является следствием того, что все перемещения (главные, побочные и грузовые), при определении которых симметричные эпюры умножаются на кососимметричные, равны нулю.

2. На симметричное сооружение действует несимметричная нагрузка. В этом случае возможны два способа использования симметрии.

*Способ преобразования нагрузки*, связанный с разложением любой несимметричной нагрузки на симметричную и кососимметричную составляющие. При этом расчет на каждую составляющую нагрузки производится отдельно. В этом случае согласно правилу, изложенному в п. 1, получим две независимые системы уравнений, одна из которых содержит только симметричные неизвестные, а другая – только кососимметричные.

*Способ группирования неизвестных*, связанный с разложением лишних неизвестных на симметричные и кососимметричные группы; нагрузка же преобразованию не подвергается. В этом случае полная система канонических уравнений распадается на две более простые системы за счет обращения в ноль отдельных перемещений, получаемых путем перемножения по способу Верещагина симметричных эпюр с кососимметричными. Этот способ основан на известной из курса алгебры теореме, согласно которой две неизвестные величины  $z_1$  и  $z_2$  можно заменить суммой и разностью двух других величин  $x_1$  и  $x_2$ , а именно:



$$z_1 = x_1 + x_2 \quad \text{и} \quad z_2 = x_1 - x_2.$$

При этом новые неизвестные определяются по формулам

$$x_1 = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{z_2 - z_1}{2}.$$

Применение этих способов расчета симметричных систем часто позволяет уменьшить объем вычислений в несколько раз. К сожалению, расчет статически неопределимых рам с использованием симметрии в данном пособии не рассматривается.

### Задача 9.1

Статически неопределимая рама находится под действием заданных внешних сил (рис. 9.1). Требуется выполнить необходимые расчеты и построить эпюры (см. условие к задаче 10 контрольных заданий).

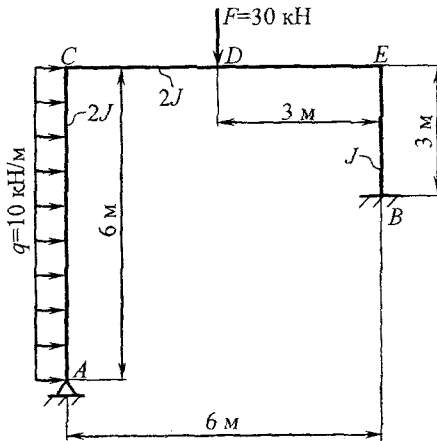


Рис. 9.1

### Решение

1. Устанавливаем степень статической неопределимости рамы:

$$L = C_0 + C_B - 3 \cdot D,$$

где  $C_0$  – число опорных связей:  $C_0 = 5$ ;

$C_v$  – число внутренних связей:  $C_v = 2 \cdot 3 = 6$ ;

$D$  – число стержней:  $D = 3$ .

Тогда  $L = 5 + 6 - 3 \cdot 3 = 2$ , т. е. система дважды статически неопределима.

Выбираем основную систему (рис. 9.2, а). Эквивалентная система с неизвестными  $X_1$  и  $X_2$  представлена на рис 9.2, б.

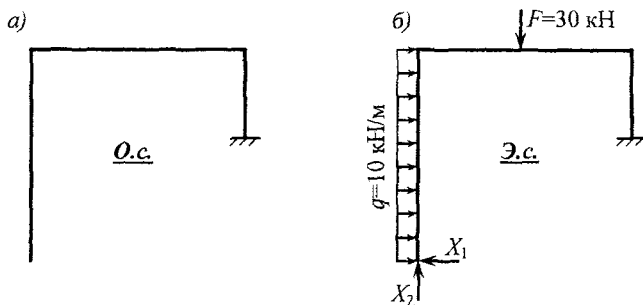


Рис. 9.2

## 2. Составляем канонические уравнения метода сил.

Вывод этих уравнений базируется на том, что основная система (см. рис. 9.2, а) под действием внешней нагрузки и лишних неизвестных – эквивалентная система (см. рис. 9.2, б) – деформируется так же, как и заданная статически неопределимая рама (см. рис. 9.1). Для дважды статически неопределимой рамы записываем

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2F} = 0.$$

3. Строим эпюры изгибающих моментов от единичных сил и от заданной нагрузки (рис. 9.3).

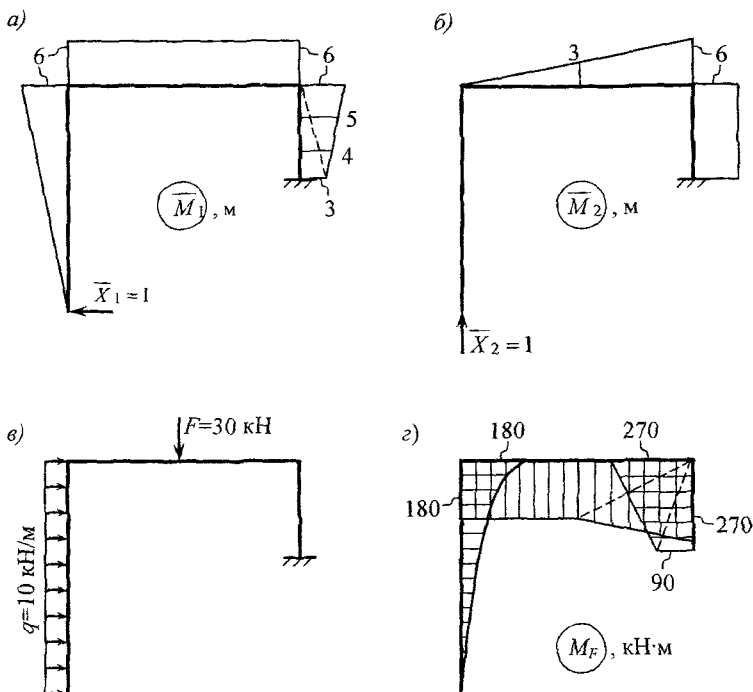


Рис. 9.3

4. Находим коэффициенты и свободные члены канонических уравнений путем «перемножения» по правилу Верещагина соответствующих эпюр:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2}{EJ} \cdot dz = \frac{1}{2 \cdot EJ} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + 6 \cdot 6 \cdot 6 \right) + \frac{1}{EJ} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \right) = \frac{207}{EJ};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2}{EJ} \cdot dz = \frac{1}{2 \cdot EJ} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 + \frac{1}{EJ} \cdot 3 \cdot \frac{6+3}{2} \cdot 6 = \frac{135}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2^2}{EJ} \cdot dz =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EJ} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6 = \frac{144}{EJ};$$

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{M_F \cdot \bar{M}_1}{EJ} \cdot dz =$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot EJ} \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 180 \cdot 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot 6 + 180 \cdot 3 \cdot 6 + \frac{270+180}{2} \cdot 3 \cdot 6 \right) -$$

$$-\frac{1}{EJ} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 270 \cdot 3 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 3 \cdot 4 \right) = -\frac{7020}{EJ};$$

$$\Delta_{2F} = \sum \int \frac{M_F \cdot \bar{M}_2}{EJ} \cdot dz =$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot EJ} \cdot \left( 180 \cdot 3 \cdot 1,5 + \frac{1}{2} \cdot 180 \cdot 3 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 270 \cdot 3 \cdot 5 \right) -$$

$$-\frac{1}{EJ} \cdot \frac{270+90}{2} \cdot 3 \cdot 6 = -\frac{5197,5}{EJ}.$$

Для проверки вычисленных коэффициентов и свободных членов канонических уравнений построим суммарную единичную эпюру от совместного действия сил  $\bar{X}_1 = 1$  и  $\bar{X}_2 = 1$  (рис. 9.4). Проверка коэффициентов при неизвестных состоит в выполнении следующего равенства:

$$\delta_{SS} = \delta_{11} + \delta_{22} + 2 \cdot \delta_{12}.$$

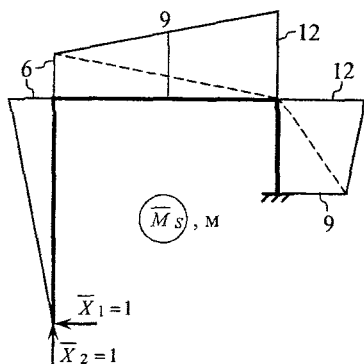


Рис. 9.4

Левая часть этого равенства находится путем перемножения эпюры  $\bar{M}_S$  сама на себя:

$$\begin{aligned} \delta_{SS} &= \sum \int \frac{\bar{M}_S^2}{EJ} \cdot dz = \\ &= \frac{1}{2 \cdot EJ} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 \cdot 10 \right) + \\ &\quad + \frac{1}{EJ} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3 \cdot 11 \right) = \frac{621}{EJ}. \end{aligned}$$

Находим правую часть:

$$\delta_{11} + \delta_{22} + 2 \cdot \delta_{12} = \frac{1}{EJ} \cdot (207 + 144 + 2 \cdot 135) = \frac{621}{EJ}.$$

Проверка свободных членов канонических уравнений заключается в выполнении равенства

$$\Delta_{SF} = \Delta_{1F} + \Delta_{2F}.$$

Находим

$$\begin{aligned} \Delta_{SF} &= \sum \int \frac{M_F \cdot \bar{M}_S}{EJ} \cdot dz = \\ &= -\frac{1}{2 \cdot EJ} \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 180 \cdot 6 \cdot \frac{3}{4} \cdot 6 + 180 \cdot 3 \cdot 7,5 + \frac{1}{2} \cdot 180 \cdot 3 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 270 \cdot 3 \cdot 11 \right) - \\ &\quad - \frac{1}{EJ} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 270 \cdot 3 \cdot 11 + \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 3 \cdot 10 \right) = -\frac{12217,5}{EJ}; \\ \Delta_{1F} + \Delta_{2F} &= \frac{1}{EJ} (-7020 - 5197,5) = -\frac{12217,5}{EJ}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов и свободных членов в канонические уравнения и сокращая их на  $EJ$ , получим

$$207 \cdot X_1 + 135 \cdot X_2 - 7020 = 0;$$

$$135 \cdot X_1 + 144 \cdot X_2 - 5197,5 = 0.$$

Решая данную систему уравнений, находим  $X_1 = 26,7$  кН;  
 $X_2 = 11,1$  кН.

5. Строим окончательные эпюры внутренних силовых факторов.

*Способ 1*

Он заключается в построении эпюр без нахождения опорных реакций (для любых типов рам).

Эпюру изгибающих моментов строим согласно выражению

$$M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + M_F.$$

Вычисляем изгибающие моменты в характерных сечениях рамы, используя данное равенство.

*Стержень AC*

$$M_A = 0; \quad M_{C(AC)} = M_{C(CE)} = 6 \cdot 26,7 - 180 = -19,8 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{z=3\text{ м}} = \frac{M_A + M_C}{2} + \frac{ql^2}{8} = -\frac{19,8}{2} + \frac{10 \cdot 6^2}{8} = 35,1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

*Стержень CE*

$$M_D = 6 \cdot 26,7 + 3 \cdot 11,1 - 180 = 13,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{E(CE)} = 6 \cdot 26,7 + 6 \cdot 11,1 - 270 = -43,2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

*Стержень BE*

$$M_B = 3 \cdot 26,7 + 6 \cdot 11,1 - 90 = 56,7 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{E(BE)} = M_{E(CE)} = -43,2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Строим эпюру  $M$  (рис. 9.5).

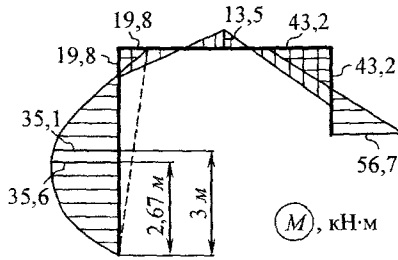


Рис. 9.5

Эпюру поперечных сил строим, используя дифференциальную зависимость Журавского

$$Q = \frac{dM}{dz},$$

а также формулу для определения поперечной силы в пролете, нагруженном распределенной нагрузкой:

$$Q = Q_0 + \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{l},$$

где  $Q_0$  – поперечная сила в рассматриваемом сечении от внешней нагрузки.

Знак поперечной силы устанавливается по следующему правилу: поперечная сила на участке считается положительной, если прямолинейная эпюра изгибающих моментов (или касательная к криволинейной эпюре) повернута по отношению к оси стержня против часовой стрелки, в противном случае поперечная сила будет отрицательной.

Рассмотрим каждый стержень в отдельности.

Стержень  $AC$

$$\begin{aligned} Q_A &= \frac{q \cdot l}{2} + \frac{M_C - M_A}{l_{AC}} = \frac{10 \cdot 6}{2} + \frac{-19,8 - 0}{6} = \\ &= 30 - 3,3 = 26,7 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$Q_C = -\frac{q \cdot l}{2} + \frac{M_C - M_A}{l_{AC}} = -\frac{10 \cdot 6}{2} - \frac{19,8}{6} = -30 - 3,3 = -33,3 \text{ кН.}$$

Стержень CE

$$Q_{CD} = \frac{M_D - M_C}{l_{CD}} = \frac{13,5 - (-19,8)}{6} = 11,1 \text{ кН;}$$

$$Q_{DE} = \frac{M_E - M_D}{l_{DE}} = \frac{-43,2 - 13,5}{3} = -18,9 \text{ кН.}$$

Стержень BE

$$Q_{BE} = \frac{M_B - M_E}{l_{BE}} = \frac{56,7 - (-43,2)}{3} = 33,3 \text{ кН.}$$

Строим эпюру  $Q$  (рис. 9.6).

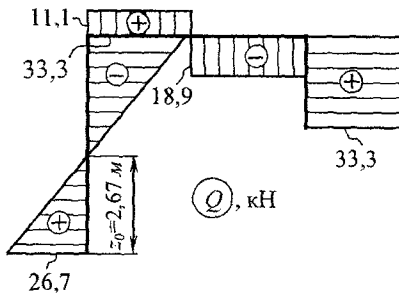


Рис. 9.6

Находим максимальный изгибающий момент в пролете левой стойки. Для этого используем обе дифференциальные зависимости при изгибе:

$$q = \frac{dQ}{dz} \Rightarrow dz = \frac{dQ}{q};$$



$$Q = \frac{dM}{dz} \Rightarrow dM = Q \cdot dz.$$

Здесь  $dM = M_2 - M_1 = \omega Q_{12}$ ,

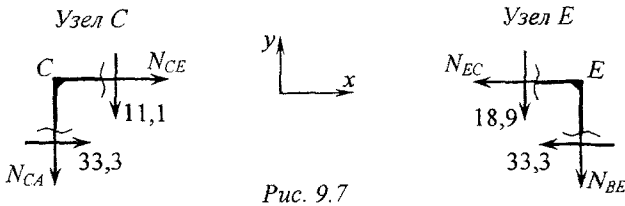
где  $\omega Q_{12}$  – площадь эпюры поперечных сил на участке 1–2.

Вычисляем

$$z_0 = \frac{Q_{\max}}{q} = \frac{26,7}{10} = 2,67 \text{ м};$$

$$M_{\max} = \frac{1}{2} \cdot Q_{\max} \cdot z_0 + M_A = \frac{1}{2} \cdot 26,7 \cdot 2,67 + 0 = 35,6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Для построения эпюры продольных сил вырезаем узлы *C* и *E* рамы и прикладываем к ним известные поперечные силы и неизвестные продольные силы, которые находим из уравнений равновесия узлов (рис. 9.7). Положительные поперечные силы направляем так, чтобы они вращали узел по часовой стрелке.



$$\sum x = 0; \quad N_{CE} + 33,3 = 0; \quad N_{CE} = -33,3 \text{ кН};$$

$$\sum x = 0; \quad -N_{EC} - 33,3 = 0; \quad N_{EC} = -33,3 \text{ кН};$$

$$\sum y = 0; \quad -11,1 - N_{CA} = 0; \quad N_{CA} = -11,1 \text{ кН};$$

$$\sum y = 0; \quad -18,9 - N_{BE} = 0; \quad N_{BE} = -18,9 \text{ кН}.$$

Строим эпюру *N* (рис. 9.8).

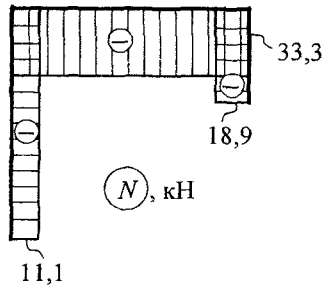


Рис. 9.8

### Способ 2

Он заключается в том, что к основной системе прикладывается внешняя нагрузка, а также найденные лишние неизвестные  $X_1$  и  $X_2$  (рис. 9.9). Эпюры внутренних силовых факторов строятся так же, как для статически определимых рам.

Вычисляем внутренние силовые факторы в характерных сечениях:

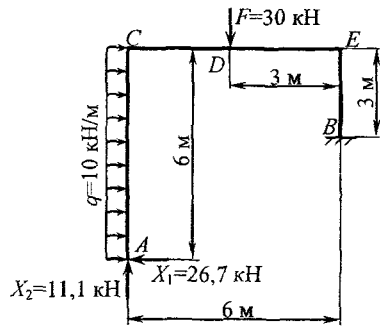


Рис. 9.9

$$Q_A = X_1 = 26,7 \text{ кН}; \quad Q_{C(AC)} = X_1 - q \cdot 6 = 26,7 - 10 \cdot 6 = -33,3 \text{ кН};$$

$$Q_{CD} = X_2 = 11,1 \text{ кН}; \quad Q_{DE} = X_1 - F = 11,1 - 30 = -18,9 \text{ кН};$$

$$Q_{BE} = q \cdot 6 - X_1 = 10 \cdot 6 - 26,7 = 33,3 \text{ кН};$$

$$M_A = 0; \quad M_C = X_1 \cdot 6 - \frac{q \cdot 6^2}{2} = 26,7 \cdot 6 - \frac{10 \cdot 6^2}{2} = -19,8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D = X_2 \cdot 3 + X_1 \cdot 6 - \frac{q \cdot 6^2}{2} = 11,1 \cdot 3 + 26,7 \cdot 6 - \frac{10 \cdot 6^2}{2} = 13,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_E = 11,1 \cdot 6 + 26,7 \cdot 6 - \frac{10 \cdot 6^2}{2} - 30 \cdot 3 = -43,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_B = 11,1 \cdot 6 - 26,7 \cdot 3 - 30 \cdot 3 = 56,7 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$N_{AC} = -X_2 = -11,1 \text{ кН};$$

$$N_{CE} = X_1 - q \cdot 6 = 26,7 - 10 \cdot 6 = -33,3 \text{ кН};$$

$$N_{BE} = X_2 - F = 11,1 - 30 = -18,9 \text{ кН}.$$

Находим  $M_{\max}$  на стержне  $AC$ :

$$z_0 = \frac{Q_{\max}}{q} = \frac{26,7}{10} = 2,67 \text{ м};$$

$$M_{z=2,67\text{м}} = 26,7 \cdot 2,67 - \frac{10 \cdot 2,67^2}{2} = 35,6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По этим расчетам строятся эпюры  $Q$ ,  $M$  и  $N$  (см. рис. 9.5, 9.6, 9.8).

6. Проверяем правильность построения эпюр.

*Статическая проверка* заключается в следующем. Если эпюры внутренних силовых факторов построены по способу 1, то проверяем равновесие всей рамы в целом. Для этого к раме с отброшенными связями прикладываем внешнюю нагрузку и силы, взятые из эпюр  $Q$  и  $N$  (рис. 9.10):

$$\begin{aligned} \sum x = 0; \quad 10 \cdot 6 - 26,7 - 33,3 &= 0; \\ 60 - 60 &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum y = 0; \quad 11,1 + 18,9 - 30 &= 0; \\ 30 - 30 &= 0. \end{aligned}$$

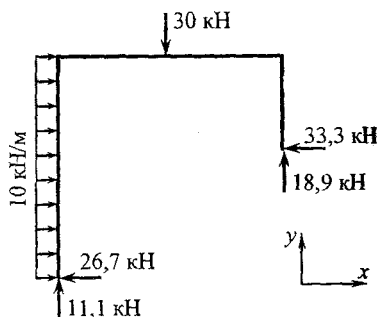


Рис. 9.10

Если эпюры  $Q$ ,  $M$  и  $N$  построены по способу 2, то вырезаем узлы рамы, прикладываем к ним все внутренние силовые факторы, взятые из эпюр, и проверяем их равновесие (рис. 9.11).

<p>Узел С</p> $\sum x = 0; \quad 33,3 - 33,3 = 0;$ $\sum y = 0; \quad 11,1 - 11,1 = 0;$ $\sum m_C = 0; \quad 19,8 - 19,8 = 0;$	<p>Узел E</p> $\sum x = 0; \quad 33,3 - 33,3 = 0;$ $\sum y = 0; \quad 18,9 - 18,9 = 0;$ $\sum m_E = 0; \quad 43,2 - 43,2 = 0.$
--	--

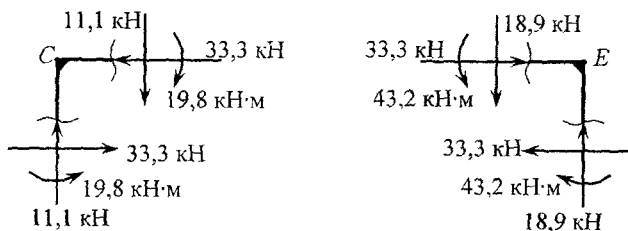


Рис. 9.11

Кинематическая (деформационная) проверка состоит в проверке равенства нулю перемещения заданной системы по направлению всех неизвестных. Для этого перемножаем по правилу Верещагина эпюру  $M$  на эпюру  $\bar{M}_S$  (см. рис. 9.4):

$$\begin{aligned} \Delta_S &= \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}_S}{E J} \cdot dz = \\ &= \frac{1}{2 \cdot E J} \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot 19,8 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{10 \cdot 6^2}{8} \cdot 3 \right) + \\ &+ \frac{1}{2 \cdot E J} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 13,5 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 19,8 \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 13,5 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 43,2 \cdot 11 \right) + \\ &+ \frac{1}{E J} \cdot \left( -\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 43,2 \cdot 11 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 56,7 \cdot 10 \right) = \\ &= \frac{1}{E J} \cdot (-1291,95 + 1302,75) = \frac{10,8}{E J}. \end{aligned}$$

Погрешность составляет

$$\frac{10,8}{1291,95} \cdot 100 \% = 0,84 \% < 2 \% .$$

### Задача 9.2

Неразрезная балка находится под действием заданной внешней нагрузки (рис. 9.12, а). Требуется выполнить необходимые расчеты и построить эпюры  $Q$  и  $M$  (см. условие к задаче 11 контрольных заданий).

#### Решение

1. Устанавливаем степень статической неопределимости балки:

$$L = N_{\text{пр.оп.}} + N_{\text{заш.}},$$

где  $L$  – число лишних неизвестных;

$N_{\text{пр.оп.}} = 1$  – число промежуточных опор;

$N_{\text{заш.}} = 1$  – число жестких защемлений.

Следовательно,  $L = 1 + 1 = 2$  – балка дважды статически неопределимая.

Выбираем основную систему. Для этого устанавливаем шарниры на промежуточной опоре и в защемлении данной балки (рис. 9.12, б). Далее изображаем эквивалентную систему (рис. 9.12, в), нагружая основную систему внешней нагрузкой и лишними неизвестными.

2. Составляем канонические уравнения метода сил для дважды статически неопределимой балки:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2F} = 0,$$

где  $X_1 = M_1$ ;  $X_2 = M_2$ .

3. Строим эпюры изгибающих моментов от действия внешней нагрузки (рис. 9.12, г) и единичных силовых факторов  $\overline{M}_1 = 1$  и  $\overline{M}_2 = 1$  (рис. 9.12, д).

4. Находим коэффициенты и свободные члены канонических уравнений по правилу Верещагина:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \cdot (\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{EJ};$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EJ} \cdot (\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{EJ};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \cdot (\overline{M}_2 \cdot \overline{M}_2) = \frac{1}{EJ} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{10}{3 \cdot EJ};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EJ} \cdot (M_F \cdot \overline{M}_1) = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 45 \cdot \frac{1}{2} = \frac{90}{EJ};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2F} &= \frac{1}{EJ} \cdot (M_F \cdot \overline{M}_2) = \\ &= \frac{1}{EJ} \cdot \left[ \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 45 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 45 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{60}{EJ}. \end{aligned}$$

5. Находим лишние неизвестные.

Подставляя найденные коэффициенты и свободные члены в каноническое уравнение и сокращая их на  $EJ$ , получим

$$2 \cdot X_1 + X_2 + 90 = 0;$$

$$X_1 + \frac{10}{3} \cdot X_2 + 60 = 0.$$

Отсюда находим

$$X_1 = M_1 = -42,4 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad X_2 = M_2 = -5,3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

6. Строим окончательные эпюры  $Q$  и  $M$ .

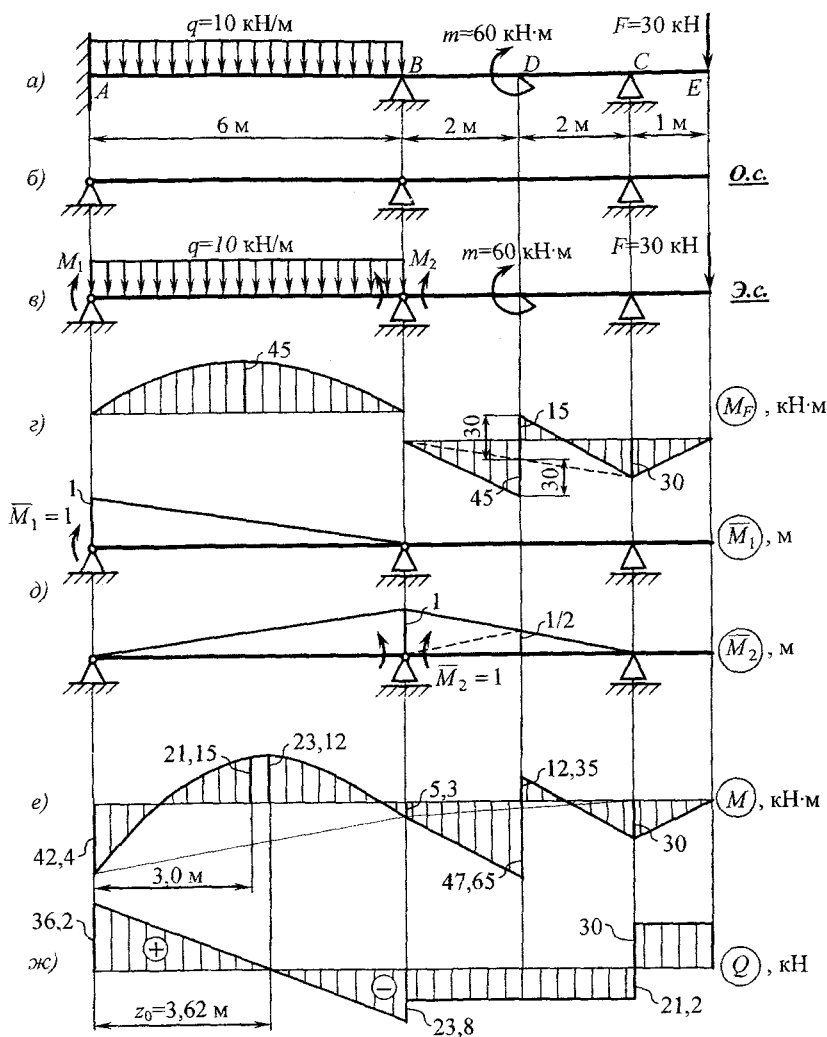


Рис. 9.12

### Способ 1

Эпюру изгибающих моментов строим методом геометрического сложения грузовой эпюры  $M_F$  (см. рис. 9.12, г) с эпюрами от опорных моментов (см. рис. 9.12, д), используя следующую формулу:

$$M = M_F + \overline{M}_1 \cdot X_1 + \overline{M}_2 \cdot X_2.$$

Для этого откладываем значения найденных опорных моментов (с учетом знака), ординаты соединяем прямыми и от них откладываем ординаты эпюр  $M_F$ , т. е. как бы «навешиваем» грузовые эпюры на линии опорных моментов. Находим величины изгибающих моментов в характерных сечениях.

*1-й пролет*

$$M_A = M_1 = -42,4 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_B = M_2 = -5,3 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{z=3\text{м}} = \frac{M_A + M_B}{2} + \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{-42,4 - 5,3}{2} + \frac{10 \cdot 6^2}{8} = 21,15 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

*2-й пролет*

$$M_B = M_2 = -5,3 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_E = 0; \quad M_C = -30 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_D^{\text{лев}} = -45 + (-5,3) \cdot 0,5 = -47,65 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_D^{\text{прав}} = 15 + (-5,3) \cdot 0,5 = 12,35 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Строим эпюру  $M$  (рис. 9.12, е).

Находим величины поперечных сил. Для этого используем известные формулы

$$Q = \frac{dM}{dz}; \quad Q = Q_0 + \frac{M_{\text{прав}} - M_{\text{лев}}}{l}.$$



Вычисляем

$$Q_A = Q_0 + \frac{M_B - M_A}{l_1} = \frac{10 \cdot 6}{2} + \frac{-5,3 + 42,4}{6} = 36,2 \text{ кН};$$

$$Q_B = -\frac{10 \cdot 6}{2} + \frac{-5,3 + 42,4}{6} = -23,8 \text{ кН};$$

$$Q_{BD} = \frac{M_D^{\text{лев}} - M_B}{2} = \frac{-47,65 - 5,3}{2} = -21,2 \text{ кН};$$

$$Q_{DC} = \frac{M_C - M_D^{\text{прав}}}{2} = \frac{-30 - 12,35}{2} = -21,2 \text{ кН};$$

$$Q_{CE} = \frac{M_E - M_C}{1} = \frac{30}{1} = 30 \text{ кН}.$$

Строим эпюру  $Q$  (рис. 9.12, ж).

Вычисляем максимальный изгибающий момент в первом пролете:

$$z_0 = \frac{Q_{\max}}{q} = \frac{36,2}{10} = 3,62 \text{ м};$$

$$M_{\max} = \frac{1}{2} \cdot Q_{\max} \cdot z_0 + M_A = \frac{1}{2} \cdot 36,2 \cdot 3,62 - 42,4 = 23,12 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Проверяем правильность построения эпюр, используя статическую проверку, а затем кинематическую (деформационную) проверку.

**Статическая проверка.** По формуле

$$R_n = Q_{\text{прав}}^n - Q_{\text{лев}}^n,$$

где  $Q_{\text{прав}}^n$  и  $Q_{\text{лев}}^n$  – поперечные силы, действующие справа и слева от опоры  $n$ , находим опорные реакции неразрезной балки:

$$R_A = Q_{\text{прав}}^A = 36,2 \text{ кН};$$

$$R_B = Q_{\text{прав}}^B - Q_{\text{лев}}^B = -21,2 - (-23,8) = 2,6 \text{ кН};$$

$$R_C = Q_{\text{прав}}^C - Q_{\text{лев}}^C = 30 - (-21,2) = 51,2 \text{ кН}.$$

Проверяем равновесие балки:

$$\begin{aligned} \sum y = 0; \quad R_A + R_B + R_C - F - q \cdot 6 = 0; \\ 36,2 + 2,6 + 51,2 - 30 - 10 \cdot 6 = 0; \quad 90 - 90 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad R_B \cdot 6 + R_C \cdot 10 - F \cdot 11 - m - q \cdot 6 \cdot 3 - M_A = 0; \\ 2,6 \cdot 6 + 51,2 \cdot 10 - 30 \cdot 11 - 60 - 10 \cdot 6 \cdot 3 - (-42,4) = 0; \\ 570 - 570 = 0. \end{aligned}$$

**Кинематическая проверка** основана на том, что угол поворота сечения  $A$  (жесткое защемление), а также взаимный угол поворота сечения над промежуточной опорой  $B$  должны равняться нулю. Находим эти углы по правилу Верещагина (путем перемножения соответствующих эпюр):

$$\begin{aligned} EJ\theta_A = (M \cdot \bar{M}_1) = -\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 42,4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \\ -\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5,3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 45 \cdot \frac{1}{2} = -90,1 + 90 = 0,1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EJ\theta_B = (M \cdot \bar{M}_2) = -\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 42,4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 - \\ -\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5,3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 45 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5,3 \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) - \\ -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 47,65 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 30 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \\ + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 12,35 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = -94,19 + 94,12 = -0,07. \end{aligned}$$

Погрешности вычислений составляют

$$\frac{0,1}{90} \cdot 100 = 0,11 \% < 2 \% ; \quad \frac{0,07}{94,12} \cdot 100 \% = 0,074 \% < 2 \% .$$

### Способ 2

Рассматриваем каждый пролет неразрезной балки в отдельности как простую статически определимую балку, нагруженную заданной нагрузкой и найденными опорными моментами, и строим для них эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

#### Балка AB

Находим опорные реакции:

$$\sum m_A = 0; \quad R_{B_1} \cdot 6 - q \cdot 6 \cdot 3 - M_2 + M_1 = 0;$$

$$R_{B_1} = \frac{10 \cdot 18 + 5,7 - 42,4}{6} = 23,8 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = 0; \quad -R_A \cdot 6 + q \cdot 6 \cdot 3 - M_2 + M_1 = 0;$$

$$R_A = \frac{10 \cdot 18 - 5,3 + 42,4}{6} = 36,2 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum y = 0; \quad R_A + R_{B_1} - q \cdot 6 = 0;$$

$$36,2 + 23,8 - 10 \cdot 6 = 0; \quad 60 - 60 = 0.$$

Вычисляем

$$Q_A = R_A = 36,2 \text{ кН}; \quad Q_B = -R_{B_1} = -23,8 \text{ кН};$$

$$M_A = -42,4 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_B = -5,3 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$z_0 = \frac{Q_{\text{лев}}}{q} = \frac{36,2}{10} = 3,62 \text{ м};$$

$$M_{\text{max}} = \frac{1}{2} \cdot 36,2 \cdot 3,62 - 42,4 = 23,12 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Строим эпюры  $Q$  и  $M$  для балки  $AB$  (рис. 9.13).

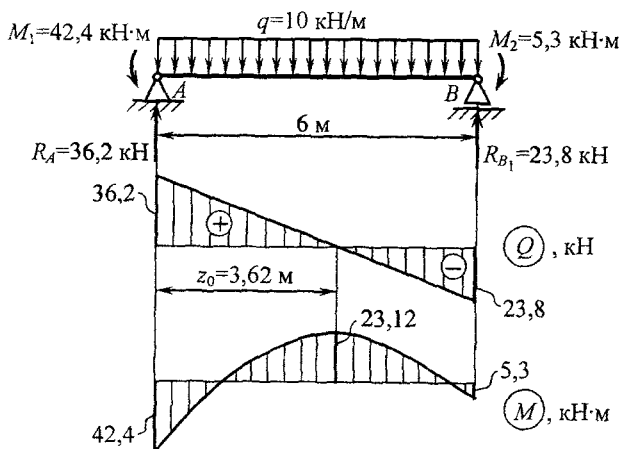


Рис. 9.13

Балка  $BC$

Находим опорные реакции:

$$\begin{aligned} \sum m_B = 0; \quad R_C \cdot 4 - F \cdot 5 - m + M_2 = 0; \\ R_C = \frac{30 \cdot 5 + 60 - 5,3}{4} = 51,2 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum m_C = 0; \quad R_{B_2} \cdot 4 + M_2 - m - F \cdot 1 = 0; \\ R_{B_2} = \frac{-5,3 + 60 + 30}{4} = 21,2 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\sum y = 0; \quad R_C - R_{B_2} - F = 0;$$

$$51,2 - 21,2 - 30 = 0; \quad 51,2 - 51,2 = 0.$$

Вычисляем

$$Q_{BC} = -R_{B_2} = -21,2 \text{ кН}; \quad Q_{CE} = F = 30 \text{ кН};$$

$$M_B = -5,3 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_D^{\text{лев}} = -5,3 - 21,2 \cdot 2 = -47,6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_E = 0; \quad M_C = -30 \cdot 1 = -30 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_D^{\text{прав}} = -30 \cdot 3 + 51,2 \cdot 2 = 12,4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Строим эпюры  $Q$  и  $M$  для балки  $BC$  (рис. 9.14).

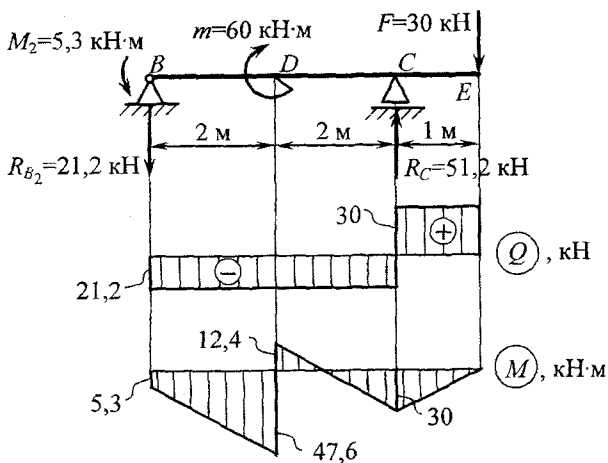


Рис. 9.14

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для неразрезной балки получаем путем совмещения соответствующих эпюр, построенных для отдельных балок.

7. Подбираем двутавровое сечение балки. Из условия прочности при изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

находим требуемый момент сопротивления сечения балки:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{42,4 \cdot 10^6}{160} = 265 \cdot 10^3 \text{ мм}^3 = 265 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента (ГОСТ 8239–89) выбираем *двутавр №24*, у которого  $W_x = 289 \text{ см}^3$ .

## 10. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Для надежной работы конструкции необходимо обеспечить не только ее прочность, но и *устойчивость*. При потере устойчивости всей конструкции или отдельных ее элементов теряет смысл и проверка на прочность, так как при потере устойчивости мгновенно меняется форма равновесия. Это сопровождается быстрым нарастанием напряжений и разрушением конструкции.

При центральном сжатии прямого стержня силой  $F$  его первоначальная прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой при достижении этой силой своего критического значения  $F_{\text{кр}}$ . При этом появляется опасность искривления оси стержня в плоскости наименьшей жесткости и потери устойчивости стержня.

При потере устойчивости в упругой стадии критическая сила вычисляется по формуле Леонарда Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{(\mu \cdot l)^2},$$

где  $\mu$  – коэффициент приведения длины стержня, зависящий от способа закрепления его концов;

$J_{\min}$  – минимальный момент инерции поперечного сечения стержня.

Возникающие при этом напряжения, называемые критическими, равны

$$\sigma_{\text{кр}} \frac{F_{\text{кр}}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\text{min}}}{(\mu \cdot l)^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2},$$

где  $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\text{min}}}$  – гибкость стержня;

$i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{J_{\text{min}}}{A}}$  – минимальный радиус инерции сечения стержня.

Как отмечалось выше, формула Эйлера применима лишь в упругой стадии нагружения при выполнении следующего условия:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{пц}}, \quad (10.1)$$

где  $\sigma_{\text{пц}}$  – предел пропорциональности материала стержня.

Из соотношения (10.1) находим  $\lambda$ :

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \lambda_{\text{пред}}. \quad (10.2)$$

Выражение (10.2) является условием применимости формулы Эйлера. Например, для стали Ст3  $\sigma_{\text{пц}} = 200$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Тогда

$$\lambda_{\text{пред}} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5}{200}} = 100.$$

Для чугуна  $\lambda_{\text{пред}} \approx 80$ , для дерева  $\lambda_{\text{пред}} \approx 75$ .

Однако часто на практике гибкость стержней бывает меньше указанных величин. Формула Эйлера в таких случаях становится неприменимой, так как критические напряжения  $\sigma_{\text{кр}}$  превзойдут предел

пропорциональности  $\sigma_{\text{ли}}$  и нагружение стержня переходит в упруго-пластическую стадию. В этом случае для определения критических напряжений используют эмпирическую формулу Ф.С. Ясинского:

$$\bar{\sigma}_{\text{кр}} = a - b \cdot \lambda,$$

где  $a$  и  $b$  – коэффициенты, зависящие от материала стержня.

Например: для стали Ст3  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа;

для чугуна  $a = 776$  МПа,  $b = 12$  МПа;

для дерева  $a = 29,3$  МПа,  $b = 0,19$  МПа.

Критическая сила по формуле Ясинского находится из соотношения

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} \cdot A = (a - b \cdot \lambda) \cdot A.$$

Допускаемое напряжение и допускаемая нагрузка при расчете стержней на устойчивость в целях безопасности должны быть меньше их критических значений:

$$[F] = \frac{F_{\text{кр}}}{[n_y]}; \quad [\sigma_y] = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{[n_y]},$$

где  $[n_y]$  – требуемый (допускаемый) коэффициент запаса устойчивости.

Для стали принимается  $[n_y] = 2 \dots 3$ ; для чугуна  $[n_y] = 5 \dots 5,5$ ; для дерева  $[n_y] = 3 \dots 4$ . При этом коэффициент запаса устойчивости несколько больше коэффициента запаса прочности  $n$ . Так, для стали  $[n] = 1,5$ ; для чугуна  $[n] = 3$ .

На практике расчет на устойчивость стержней любой гибкости производится как расчет на простое сжатие путем введения специального коэффициента. Расчетная формула (или условие устойчивости) имеет следующий вид:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma], \quad (10.3)$$



Здесь  $\varphi = \frac{[\sigma_y]}{[\sigma_c]}$  – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения,

где  $[\sigma_y]$  – допускаемое напряжение при продольном изгибе;

$[\sigma_c]$  – допускаемое напряжение на сжатие.

Величина коэффициента  $\varphi$  зависит от гибкости стержня  $\lambda$  и от его материала. С целью облегчения расчетов для многих материалов составлены таблицы зависимости коэффициента  $\varphi$  от гибкости  $\lambda$ .

Из условия устойчивости (10.3) вытекают три типа задач:

- 1) проверка устойчивости стержня;
- 2) определение допускаемой силы  $[F]$ ;
- 3) подбор сечения стержня.

Расчет всех трех типов задач может быть выполнен двумя методами.

1. Требуемый коэффициент запаса устойчивости  $[n_y]$  не задан. В этом случае расчет ведется с использованием таблицы значений коэффициента продольного изгиба  $\varphi$ . (При составлении таблиц коэффициентов  $\varphi$  для стальных стержней принималось  $[n_y] = 1,8 \dots 2$ .)

2. Коэффициент  $[n_y]$  задан. В этом случае расчет производится с использованием формулы Эйлера или Ясинского. Во многих случаях этот метод значительно упрощает расчет.

### Задача

Стойка длиной  $l$  двутаврового сечения, выполненная из стали Ст3, сжимается осевой силой  $F$  (рис. 10.1). Требуется выполнить необходимые расчеты (см. условие к задаче 12 контрольных заданий).

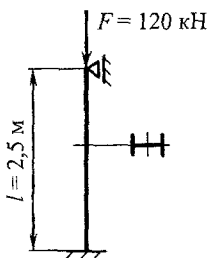


Рис. 10.1

Дано:

вариант 1  
 $[\sigma] = 160$  МПа;  
 $[n_y]$  не задан;

вариант 2  
 $[n_y] = 2,2$ .

## Решение

### Вариант 1

1. Подбираем номер двутавра из условия устойчивости

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma] \quad \Rightarrow \quad A \geq \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]}$$

методом последовательных приближений.

1-е приближение

Принимаем  $\varphi_1 = 0,5$ . Вычисляем требуемую площадь сечения стойки:

$$A \geq \frac{F}{\varphi_1 \cdot [\sigma]} = \frac{120 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160} = 1500 \text{ мм}^2 = 15 \text{ см}^2.$$

По таблице сортамента выбираем двутавр №12, у которого

$$A = 14,7 \text{ см}^2; \quad J_{\min} = 27,9 \text{ см}^4; \quad i_{\min} = 1,38 \text{ см}.$$

Вычисляем гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 250}{1,38} = 127.$$

По таблице коэффициентов  $\varphi$  находим:

$$\begin{aligned} \text{при } \lambda = 120 \quad \varphi &= 0,45; \\ \text{при } \lambda = 130 \quad \varphi &= 0,40. \end{aligned}$$

Методом линейной интерполяции определяем коэффициент  $\varphi$  для найденного значения  $\lambda$ :

$$\varphi'_1 = 0,4 + \frac{0,45 - 0,4}{10} \cdot 3 = 0,415.$$

Проверяем устойчивость стойки по формуле

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi_1' \cdot [\sigma],$$

где

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{120 \cdot 10^3}{14,7 \cdot 10^2} = 81,6 \text{ МПа};$$

$$\varphi_1' \cdot [\sigma] = 0,415 \cdot 160 = 66,4 \text{ МПа}.$$

Стойка перегружена. Перегрузка составляет

$$\frac{81,6 - 66,4}{66,4} \cdot 100 \% = 22,9 \% > 5 \%,$$

что недопустимо. Продолжаем расчет.

*2-е приближение*

Принимаем

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,415}{2} = 0,46.$$

Вычисляем

$$A \geq \frac{120 \cdot 10^3}{0,46 \cdot 160} = 1630 \text{ мм}^2 = 16,3 \text{ см}^2.$$

Выбираем *двутавр №14*, у которого

$$A = 17,4 \text{ см}^2; \quad J_{\min} = 41,9 \text{ см}^4; \quad i_{\min} = 1,55 \text{ см}.$$

Гибкость стойки равна

$$\lambda = \frac{0,7 \cdot 250}{1,55} = 113.$$

Методом интерполяции находим  $\varphi$ :

$$\varphi_2' = 0,52 - \frac{0,52 - 0,45}{10} \cdot 3 = 0,5.$$

Проверяем устойчивость стойки:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{120 \cdot 10^3}{17,4 \cdot 10^2} = 69 \text{ МПа}; \quad \varphi_2' \cdot [\sigma] = 0,5 \cdot 160 = 80 \text{ МПа.}$$

Стойка недогружена на

$$\frac{80 - 69}{69} \cdot 100 \% = 15,9 \% > 5 \%,$$

но с этим нужно мириться, поскольку ближайший меньший двутавр, как было установлено выше, вызывает недопустимую перегрузку.

Таким образом, принимаем окончательно *двутавр №14*.

2. Определяем критическую силу.

Так как  $\lambda = 113 > \lambda_{\text{пред}} = 100$ , то применяем формулу Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\text{min}}}{(\mu \cdot l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 41,9 \cdot 10^4}{(0,7 \cdot 2500)^2} = 269800 \text{ Н} = 269,8 \text{ кН.}$$

3. Вычисляем коэффициент запаса устойчивости:

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{269,8}{120} = 2,25.$$

### **Вариант 2**

Если задан коэффициент запаса устойчивости  $[n_y] = 2,2$ , то критическая сила

$$F_{\text{кр}} = F \cdot [n_y] = 120 \cdot 2,2 = 264 \text{ кН.}$$

С другой стороны, при выполнении расчетов по формуле Эйлера

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{(\mu \cdot l)^2}.$$

Отсюда находим требуемый минимальный момент инерции сечения:

$$J_{\min} = \frac{F_{кр} (\mu \cdot l)^2}{\pi^2 \cdot E} = \frac{264 \cdot 10^3 \cdot (0,7 \cdot 2500)^2}{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5} = 409591 \text{ мм}^4 = 40,96 \text{ см}^4.$$

По таблице сортамента находим необходимый номер двутаврового сечения – №14. Для него

$$A = 17,4 \text{ см}^2; \quad J_{\min} = 41,9 \text{ см}^4; \quad i_{\min} = 1,55 \text{ см}.$$

Проверяем правильность применения формулы Эйлера к расчету стойки принятого профиля, определяя гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2500}{1,55} = 113 > \lambda_{\text{пред}} = 100.$$

Следовательно, формула Эйлера использована в пределах ее применимости.

## 11. РАСЧЕТЫ НА УДАРНУЮ НАГРУЗКУ

Инженерные конструкции часто подвергаются действию *динамических нагрузок*, быстро возрастающих во времени. Возникающие при этом силы инерции оказывают значительное влияние на напряженно-деформированное состояние конструкций. Расчет их элементов при наличии динамических нагрузок более сложен, чем при статическом воздействии. Общий метод расчета основан на известном из теоретической механики принципе Даламбера. В тех случаях, когда определение сил инерции затруднено, как, например, при ударных нагрузках, расчеты выполняются с использованием закона сохранения энергии.

Для упрощения расчета применяются различные гипотезы, в частности, пренебрегают потерями энергии при ударе. Предполагается также, что напряжения при ударе не превышают предела пропорциональности и закон Гука соблюдается (упругий удар).

В зависимости от направления удара по отношению к оси стержня и характера деформаций, возникающих при этом, удары подразделяются на три основных вида:

- а) продольный удар (деформация растяжения или сжатия);
- б) поперечный удар (деформация изгиба);
- в) крутящий удар (кручение с изгибом).

Целью расчета сооружений на ударную нагрузку является определение максимальных напряжений и деформаций, возникающих при ударе. Для этого используются следующие формулы:

$$\sigma_d = K\delta_{ст} \sigma_d = K_d \cdot \sigma_{ст}; \quad \delta_d = K_d \cdot \delta_{ст},$$

где  $\sigma_d$  и  $\delta_d$  – напряжение и перемещение стержня при ударном приложении нагрузки;

$\sigma_{ст}$  и  $\delta_{ст}$  – напряжение и перемещение стержня при статическом действии силы, равной весу падающего груза;

$K_d$  – динамический коэффициент при ударе, который определяется по формуле (без учета собственной массы стержня):

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{ст}}}. \quad (11.1)$$

Здесь  $h$  – высота падения груза.

Так как скорость падения груза в момент удара определяется по формуле

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h},$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,

то формула (11.1) может быть представлена в следующем виде:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{\delta_{ст}}}. \quad (11.2)$$

Если нагрузка к стержню приложена мгновенно, т. е.  $h = 0$  и  $v = 0$ , то из формул (11.1) и (11.2) следует, что  $K_d = 2$ .

С учетом массы стержня, подвергающегося удару, величина  $K_d$  определяется по формуле

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{ст} \cdot \left(1 + \frac{P}{Q} \cdot \beta\right)}}, \quad (11.3)$$

где  $P$  – вес стержня, подвергающегося удару;

$Q$  – вес падающего груза;

$\beta$  – коэффициент приведения массы стержня к точке удара ( $\beta < 1$ ).

Если отношение  $\frac{h}{\delta_{ст}} > 100$ , то формулы (11.1) – (11.3) можно

записать так:

$$K_d = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{\delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{v^2}{g \cdot \delta_{ст}}}; \quad K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{ст} \cdot \left(1 + \frac{P}{Q} \cdot \beta\right)}}.$$

Коэффициент  $\beta$  имеет следующие значения:

- при продольном ударе по брусу постоянного сечения  $\beta = 0,333$ ;
- при поперечном ударе по середине балки, лежащей на двух опорах,  $\beta = 0,486$ .

### Задача

На упругую систему падает груз  $Q$  с высоты  $h$  (рис. 11.1). Материал стержней – сталь,  $[\sigma] = 160$  МПа. Определить максимальные напряжения в элементах системы и перемещение точки падения груза.

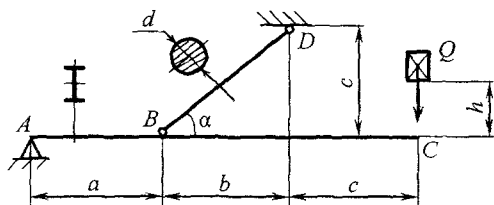


Рис. 11.1

Дано:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \text{ м}; & b &= 1,5 \text{ м}; \\ c &= 2,5 \text{ м}; & d &= 3 \text{ см}; \\ & \text{двутавр №24}; \\ Q &= 2,0 \text{ кН}; & h &= 10 \text{ см}. \end{aligned}$$

### Решение

Балка AC подвергается действию поперечного удара, а стержень BD испытывает продольный удар.

По таблице сортамента (ГОСТ 8339–89) для двутавра №24 находим

$$J_x = 3460 \text{ см}^4; \quad W_x = 289 \text{ см}^3.$$

Площадь поперечного сечения стержня

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 3^2}{4} = 7,065 \text{ см}^2.$$

1. Вычисляем перемещение системы в точке падения груза при статическом действии силы  $Q$ . Определение перемещения можно производить двумя способами.

#### Способ 1

Изображаем расчетную схему (рис. 11.2) и находим продольное усилие в стержне BD:

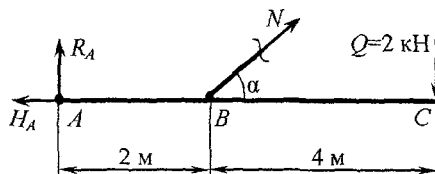


Рис. 11.2

$$\sum m_A = 0; \quad N \cdot \sin \alpha \cdot 2 - Q \cdot 6 = 0;$$



$$N = \frac{6 \cdot Q}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{6 \cdot 2}{2 \cdot 0,8575} = 7,0 \text{ кН},$$

где

$$\sin \alpha = \frac{c}{l_{BD}} = \frac{2,5}{\sqrt{1,5^2 + 2,5^2}} = 0,8575;$$

$$l_{BD} = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{1,5^2 + 2,5^2} = 2,92 \text{ м}.$$

Определяем удлинение стержня  $BD$ :

$$\Delta l = \frac{N \cdot l_{BD}}{E A} = \frac{7 \cdot 10^3 \cdot 2,92 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 7,065 \cdot 10^2} = 0,145 \text{ мм}.$$

Вычисляем перемещение точки  $C$  только от изгиба балки  $AC$  (рис. 11.3):

$$\begin{aligned} y_{C(\text{изг})} &= \frac{1}{EJ} \cdot (M_F \cdot \bar{M}) = \frac{1}{EJ} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \\ &= \frac{64}{EJ} = \frac{64 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^4} = 9,25 \text{ мм}. \end{aligned}$$

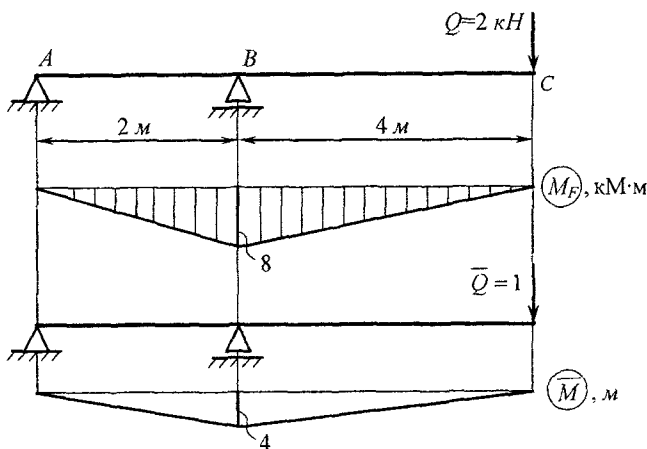


Рис. 11.3

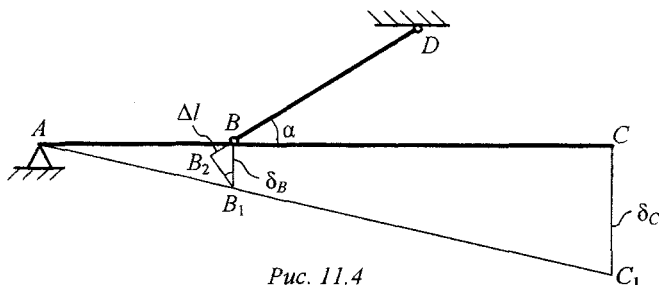
Перемещение точки  $C$  только от растяжения стержня  $BD$  найдем, изобразив систему в деформированном состоянии (рис. 11.4).

При этом балку  $AC$  считаем абсолютно жесткой по отношению к стержню  $BD$ . Из подобия треугольников  $ABB_1$  и  $ACC_1$  находим

$$\delta_C = \frac{\delta_B \cdot 6}{2},$$

где из треугольника  $BB_1B_2$

$$\delta_B = \frac{\Delta l}{\sin \alpha} = \frac{0,145}{0,8575} = 0,17 \text{ мм.}$$



Тогда

$$\delta_C = y_{C(\text{раст})} = \frac{0,17 \cdot 6}{2} = 0,51 \text{ мм.}$$

Суммарное перемещение точки  $C$  от деформации балки  $AC$  и стержня  $BD$

$$y_C = \delta_{\text{ст}} = y_{C(\text{изг})} + y_{C(\text{раст})} = 9,25 + 0,51 = 9,76 \text{ мм.}$$

Способ 2

Величину  $y_C$  можно найти по методу Мора с применением способа Верещагина:

$$\begin{aligned}
 y_C &= \int_0^l \frac{M_F \cdot \bar{M}_i}{EJ} dz + \int_0^l \frac{N_F \cdot \bar{N}_i}{EA} dz = \frac{1}{EJ} \cdot (M_F \cdot \bar{M}_i) + \frac{1}{EA} \cdot (N_F \cdot \bar{N}_i \cdot l) = \\
 &= \frac{1}{EJ} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) + \frac{1}{EA} \cdot (7 \cdot 3,5 \cdot 2,92) = \\
 &= 9,25 + \frac{71,54 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^5 \cdot 7,065 \cdot 10^2} = 9,25 + 0,51 = 9,76 \text{ мм},
 \end{aligned}$$

где (из уравнения статики)

$$\bar{N} = \frac{\bar{Q} \cdot 6}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{1 \cdot 6}{2 \cdot 0,8575} = 3,5; \quad N_F = N = 7 \text{ кН}.$$

2. Вычисляем динамический коэффициент:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 100}{9,76}} = 5,64.$$

3. Находим максимальные напряжения в элементах системы при статическом действии силы  $Q$ :

$$\text{стержень } BD \quad \sigma_{ст} = \frac{N}{A} = \frac{7 \cdot 10^3}{7,065 \cdot 10^2} = 9,9 \text{ МПа};$$

$$\text{балка } AC \quad \sigma_{ст} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{8 \cdot 10^6}{289 \cdot 10^3} = 27,7 \text{ МПа}.$$

4. Определяем максимальные напряжения системы при ударе:

$$\text{стержень } BD \quad \sigma_d = K_d \cdot \sigma_{ст} = 5,64 \cdot 9,9 = 55,8 \text{ МПа};$$

$$\text{балка } AC \quad \sigma_d = K_d \cdot \sigma_{ст} = 5,64 \cdot 27,7 = 156,2 \text{ МПа}.$$

5. Находим перемещение точки падения груза (точки C):

$$y_C \sigma_d = K_d \cdot \sigma_{ст} = 5,64 \cdot 9,76 = 55,0 \text{ мм}.$$

## 12. РАСЧЕТЫ ПРИ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ

### 12.1. Основные сведения из теории

На прочность конструкции большое влияние оказывают *упругие колебания* ее элементов, часто являющиеся причиной разрушения. Поэтому вопросы колебаний требуют особого внимания при проектировании любой конструкции.

При изучении колебаний упругие системы принято различать по числу степеней свободы. *Число степеней свободы* – это число независимых параметров, определяющих положение системы в любой момент времени. Различают собственные и вынужденные колебания.

*Собственные колебания* – это колебания упругой системы, вызванные однократным воздействием силового импульса и в дальнейшем происходящие под влиянием сил упругости самой системы.

*Вынужденные колебания* происходят под воздействием периодически изменяющихся во времени внешних сил.

Время одного полного колебания называется *периодом колебаний*  $T$  (измеряется в секундах). Величина, обратная периоду колебаний, называется *секундной частотой*  $f$ . Она представляет собой число колебаний в секунду и измеряется в герцах. В технике чаще используется *круговая частота*  $\omega$ , которая представляет собой число колебаний за  $2\pi$  секунд (измеряется в рад/с или  $\text{с}^{-1}$ ).

### 12.2. Собственные колебания системы с одной степенью свободы

Дифференциальное уравнение собственных колебаний имеет вид

$$\ddot{z} + \omega^2 \cdot z = 0, \quad (12.1)$$

где  $\omega$  – круговая частота;

$z$  – смещение груза от положения статического равновесия, соответствующее моменту времени  $t$ .

Общее решение уравнения (12.1) можно представить в следующем виде:

$$z = A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha), \quad (12.2)$$

где  $A_0 = \sqrt{z_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$  – амплитуда собственных колебаний;

$z_0$  – начальное смещение груза от положения статического равновесия;

$v_0$  – начальная его скорость;

$(\omega \cdot t + \alpha)$  – фаза колебаний;

$\alpha = \arctg \frac{z_0 \cdot \omega}{v_0}$  – сдвиг фазы.

Круговая частота определяется по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad c^{-1},$$

где  $\delta_{ст}$  – перемещение в направлении колебаний от статического действия силы, равной весу тела, совершающего колебания;

$g$  – ускорение свободного падения;

$m$  – масса тела;

$c$  – коэффициент жесткости упругой системы, равный силе, вызывающей единичное перемещение.

Для упругого стержня (или пружины), к которому подвешен груз:

$$c = \frac{E A}{l};$$

для балки, у которой груз закреплен посередине:

$$c = \frac{48 \cdot E J}{l^3}.$$

Уравнение (12.2) показывает, что собственные колебания системы с одной степенью свободы являются гармоническими. Согласно определению периода колебаний, круговой и секундной частот можно записать

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{\delta_{ст}}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c}}, \text{ с}; \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \text{ Гц.}$$

### 12.3. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$\ddot{z} + \omega^2 \cdot z = q \cdot \cos pt, \quad (12.3)$$

где  $p$  – частота изменения возмущающей силы.

Здесь

$$q = \frac{H}{Q} \cdot g, \quad (12.4)$$

где  $H$  – максимальное значение возмущающей силы;

$Q$  – вес груза, совершающего колебания.

Общее решение уравнения (12.3) можно представить в следующем виде:

$$z = B_0 \cdot (\cos pt - \cos \omega t). \quad (12.5)$$

Здесь амплитуда вынужденных колебаний

$$B_0 = \frac{q}{\omega^2 - p^2}. \quad (12.6)$$

Динамические напряжения и перемещения, возникающие в элементах системы при упругих колебаниях, определяются по формулам

$$\sigma_d = K_d \cdot \sigma_{ст}; \quad \delta_d = K_d \cdot \delta_{ст},$$

где  $\sigma_{ст}$  – напряжения при статическом действии силы  $Q$ ;

$K_d$  – динамический коэффициент.

При собственных колебаниях динамический коэффициент

$$K_d = 1 + \frac{z_0}{\delta_{ст}}$$

При вынужденных колебаниях динамический коэффициент

$$K_d = 1 + \frac{H}{Q} \cdot \beta.$$

Здесь  $\beta$  – коэффициент нарастания колебаний – определяется по формуле

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{p}{\omega^2}}.$$

### Задача

Электродвигатель весом  $Q = 8$  кН, закрепленный на стальной балке длиной  $l = 2$  м прямоугольного поперечного сечения  $6 \times 12$  см, передает вращательное движение со скоростью  $n = 1000$  об/мин (рис. 12.1). Неуравновешенные вращающиеся части двигателя имеют массу  $m = 5$  кг и эксцентриситет  $e = 3$  см.

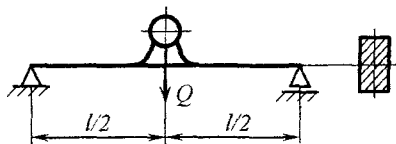


Рис. 12.1

Необходимо определить амплитуду вынужденных колебаний и наибольший прогиб балки, а также максимальные нормальные напряжения в балке. Найти число оборотов электродвигателя, при котором наступит резонанс. Вес балки не учитывать.

### Решение

1. Определяем частоту собственных колебаний балки:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{ст}}}},$$

где  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения;

$\delta_{\text{ст}}$  – статический прогиб балки под действием силы  $Q$  в месте крепления электродвигателя.

Величину статического прогиба обычно определяют по способу Верещагина. В данной задаче  $\delta_{\text{ст}}$  находим по известной формуле:

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{Q \cdot l^3}{48 \cdot E J},$$

где

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad J = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{6 \cdot 12^3}{12} = 864 \text{ см}^4.$$

Тогда

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{8 \cdot 10^3 \cdot (2 \cdot 10^3)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 864 \cdot 10^4} = 0,77 \text{ мм.}$$

Вычисляем

$$\omega = \sqrt{\frac{9800}{0,77}} = 112,8 \text{ с}^{-1}.$$

2. Определяем частоту изменения возмущающей силы:

$$p = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{\pi \cdot 1000}{30} = 104,7 \text{ с}^{-1}.$$



3. Находим коэффициент нарастания колебаний:

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - \frac{104,7^2}{112,8^2}} = 7,22.$$

4. Определяем динамический коэффициент:

$$K_d = 1 + \frac{H}{Q} \cdot \beta.$$

Наибольшее значение возмущающей силы находим по формуле

$$H = m \cdot p^2 \cdot e = 5 \cdot 104,7^2 \cdot 0,03 = 1644 \text{ Н.}$$

Тогда

$$K_d = 1 + \frac{1644}{8000} \cdot 7,22 = 2,48.$$

5. Определяем амплитуду вынужденных колебаний:

$$B_0 = \delta_{ст}^H \cdot \beta,$$

где  $\delta_{ст}^H$  – деформация при статическом действии возмущающей силы.

Из отношения  $\frac{\delta_{ст}^H}{\delta_{ст}} = \frac{H}{Q}$  следует, что  $\delta_{ст}^H = \delta_{ст} \cdot \frac{H}{Q}$ .

Тогда

$$B_0 = \delta_{ст} \cdot \frac{H}{Q} \cdot \beta = 0,77 \cdot \frac{1644}{8000} \cdot 7,22 = 1,14 \text{ мм.}$$

Величину  $B_0$  можно также найти исходя из формул (12.4) и (12.6):

$$B_0 = \frac{H}{Q} \cdot \frac{g}{\omega^2 - p^2} = \frac{1644}{8000} \cdot \frac{9800}{112,8^2 - 104,7^2} = 1,14 \text{ мм.}$$

6. Находим наибольший прогиб балки (под электродвигателем):

$$\delta_d = K_d \cdot \delta_{ст} = 2,48 \cdot 0,77 = 1,91 \text{ мм.}$$

Или

$$\delta_d = K_d \cdot \delta_{ст} = \delta_{ст} \left( 1 + \frac{H}{Q} \beta \right) = \delta_{ст} + B_0 = 0,77 + 1,14 = 1,91 \text{ мм.}$$

7. Определяем максимальные нормальные напряжения в балке:

$$\sigma_d = K_d \cdot \sigma_{ст}.$$

Здесь напряжения при статическом действии силы  $Q$  равны

$$\sigma_{ст} = \frac{M_{\max}}{W_x},$$

где

$$M_{\max} = \frac{Q \cdot l}{4} = \frac{8 \cdot 2}{4} = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{6 \cdot 12^2}{6} = 144 \text{ см}^3.$$

Тогда

$$\sigma_{ст} = \frac{4 \cdot 10^6}{144 \cdot 10^3} = 27,8 \text{ МПа.}$$

Отсюда

$$\sigma_d = 2,48 \cdot 27,8 = 68,9 \text{ МПа.}$$

8. Устанавливаем характер изменения суммарных напряжений в опасном сечении балки.

Вычисляем наибольшие напряжения в опасном сечении от веса электродвигателя:

$$\sigma_Q = \frac{M_{\max(Q)}}{W_x} = \frac{Q \cdot l}{4 \cdot W_x} = \frac{8 \cdot 2 \cdot 10^6}{4 \cdot 144 \cdot 10^3} = 27,8 \text{ МПа.}$$

Определяем наибольшие напряжения от действия возмущающей силы  $H$ :

$$\sigma_d^H = \sigma_d^H \cdot \beta.$$

Здесь напряжения  $\sigma_{\text{ст}}^H$ , возникающие в опасном сечении балки от действия возмущающей силы при ее статическом приложении, равны

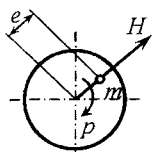
$$\sigma_{\text{ст}}^H = \frac{M_{\max(H)}}{W_x} = \frac{H \cdot l}{4 \cdot W_x} = \frac{1644 \cdot 2 \cdot 10^3}{4 \cdot 144 \cdot 10^3} = 5,7 \text{ МПа.}$$

Тогда

$$\sigma_d^H = 5,7 \cdot 7,22 = 41,1 \text{ МПа.}$$

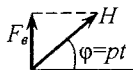
Эти напряжения изменяются во времени по симметричному циклу. Центробежная сила, возникающая при вращении неуравновешенных масс, равна

$$H = m \cdot p^2 \cdot e.$$



Вертикальная составляющая этой силы и является гармонической возмущающей силой, равной (рис. 12.2)

$$F_v = H \cdot \sin pt .$$



Ее максимальное значение равно  $F_v = H$  (при  $\sin pt = 1$ ).

Динамические напряжения от действия возмущающей силы накладываются на постоянные напряжения от собственного веса электродвигателя. Таким образом, суммарные напряжения в опасном сечении балки изменяются по асимметричному циклу. Изображаем графически этот цикл согласно выполненным расчетам (рис. 12.3).

Рис. 12.2

Изображаем графически этот цикл согласно выполненным расчетам (рис. 12.3).

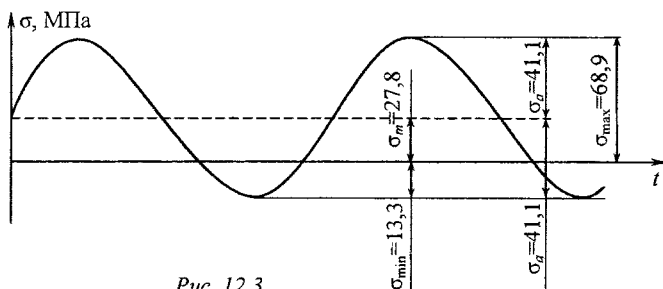


Рис. 12.3

Основные параметры цикла:

- среднее напряжение цикла
- амплитудное напряжение
- максимальное напряжение
- минимальное напряжение

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \sigma_Q = 27,8 \text{ МПа;} \\ \sigma_a &= \sigma_d^H = 41,1 \text{ МПа;} \\ \sigma_{\max} &= \sigma_m + \sigma_a = 68,9 \text{ МПа;} \\ \sigma_{\min} &= \sigma_m - \sigma_a = -13,3 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

9. Находим число оборотов электродвигателя, при котором наступает резонанс.

Явление резонанса наступает, когда частота изменения возмущающей силы становится равной частоте собственных колебаний электродвигателя. Поэтому критическое число оборотов электродвигателя находим из формулы

$$p = \frac{\pi \cdot n}{30} = \omega \quad \Rightarrow \quad n_{\text{кр}} = \frac{30 \cdot \omega}{\pi} = \frac{30 \cdot 112,8}{\pi} = 1077,7 \text{ об/мин.}$$

# КОНТРОЛЬНЫЕ И РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

## Общие указания о порядке выполнения контрольных работ

Количество контрольных работ для студентов различных специальностей и форм обучения устанавливается учебным планом. Задачи, входящие в состав контрольных работ, указаны в таблице.

№ п/п	Число контрольных работ	Номера задач, входящих в контрольные работы			
		1	2	3	4
1	4	1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9, 10	11, 12, 13, 14
2	3	1, 3, 4, 6	7, 8, 9, 10	11, 12, 13	–
3	2	1, 3, 4, 6	7, 9, 10, 12	–	–
4	1	1, 4, 9, 12	–	–	–

*Примечание.* В случае изменения учебных планов допускаются дополнения и изменения в данной таблице.

Исходные данные для решения задач выбираются студентом из таблиц, прилагаемых к условию каждой задачи, в соответствии со своим учебным шифром (номер зачетной книжки). Шифром считаются три последние цифры номера. Если номер двузначный, то его следует записать дважды и взять три последние цифры. Каждая таблица состоит из трех частей. Из каждой части таблицы выписывается та строка, которая соответствует первой, второй и последней цифре шифра. Например, шифр студента 276. В этом случае из первой части таблицы выписывается строка 2, из второй (средней) части таблицы – строка 7, из третьей части – строка 6.

**Работы, выполненные не по шифру, возвращаются студенту без рассмотрения и не зачитываются.**

Приступать к выполнению контрольных работ следует после изучения соответствующего раздела курса сопротивления материалов [1...7].

Каждую контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради с полями для замечаний рецензента.

На титульном листе контрольной работы должны быть написаны: название дисциплины и номер контрольной работы, фамилия, имя и отчество студента, название факультета, специальность, шифр и точный почтовый адрес.

После условия каждой задачи необходимо вычертить заданную схему и указать на ней все размеры и все нагрузки в цифрах. На эпюрах должны быть поставлены числовые значения всех характерных ординат и их размерность.

Решение задач должно сопровождаться краткими пояснениями. Все расчетные формулы необходимо записывать с расшифровкой входящих в них символов. После этого подставляются числовые значения, указывается результат вычислений и его размерность. При этом окончательные результаты необходимо подчеркивать.

Получив после рецензирования контрольную работу, студент должен исправить все отмеченные ошибки и выполнить все указанные преподавателем исправления и дополнения, даже если работа зачтена. Если работа не зачтена, необходимо выполнить на отдельных листах исправления и представить всю работу целиком на повторную рецензию.

Нужно помнить, что самостоятельно выполненное задание не позволит студенту приобрести необходимые знания и навыки, а также овладеть практическими методами и приемами решения задач, связанных с расчетом элементов инженерных конструкций.

Это, в свою очередь, не даст возможности студенту ответить на вопросы, связанные с выполнением задания, и решить контрольную задачу по тематике задания при его защите.

### Задача 1

Абсолютно жесткий элемент закреплен при помощи стальных стержней длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $A$ . Модуль упругости материала стержней  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Элемент нагружен внешней нагрузкой ( $F$  или  $q$ ) (рис. 1).

Требуется:

1) определить усилия и напряжения в стержнях при заданной нагрузке;

2) найти величину наибольшей допустимой нагрузки, если  $[\sigma] = 160$  МПа;

3) определить коэффициенты запаса прочности стержней при найденной допускаемой нагрузке;

4) вычислить допускаемую нагрузку по несущей способности, если предел текучести материала стержней  $\sigma_T = 240$  МПа и коэффициент запаса  $k = 1,5$ ;

5) сравнить найденные значения допускаемой нагрузки.

Числовые данные взять из *табл. 1*.

*Таблица 1*

Первая цифра цифра	$F$ , кН	$q$ , кН/м	$a$ , м	$l_1$ , м	Вторая цифра цифра	$A_{1,2}$ , см <sup>2</sup>	$b$ , м	$l_2$ , м	Последняя цифра цифра (№ схемы)	$A_{2,2}$ , см <sup>2</sup>	$\alpha_1$ , градус	$\alpha_2$ , градус
1	20	—	1,0	2,1	1	6	1,1	1,2	1	6	30	60
2	—	10	1,2	2,2	2	7	1,2	1,4	2	7	90	90
3	30	—	1,4	2,3	3	8	1,3	1,6	3	10	80	50
4	—	15	1,6	2,4	4	9	1,4	1,8	4	12	50	80
5	40	—	1,8	2,5	5	10	1,5	2,0	5	14	90	90
6	—	20	2,0	2,6	6	11	1,6	2,2	6	16	60	80
7	50	—	2,2	2,7	7	12	1,7	2,4	7	17	75	60
8	—	25	2,4	2,8	8	13	1,8	2,6	8	18	45	45
9	60	—	2,6	2,9	9	14	1,9	2,8	9	19	70	40
0	—	30	2,8	3,0	0	15	2,0	3,0	0	20	40	70

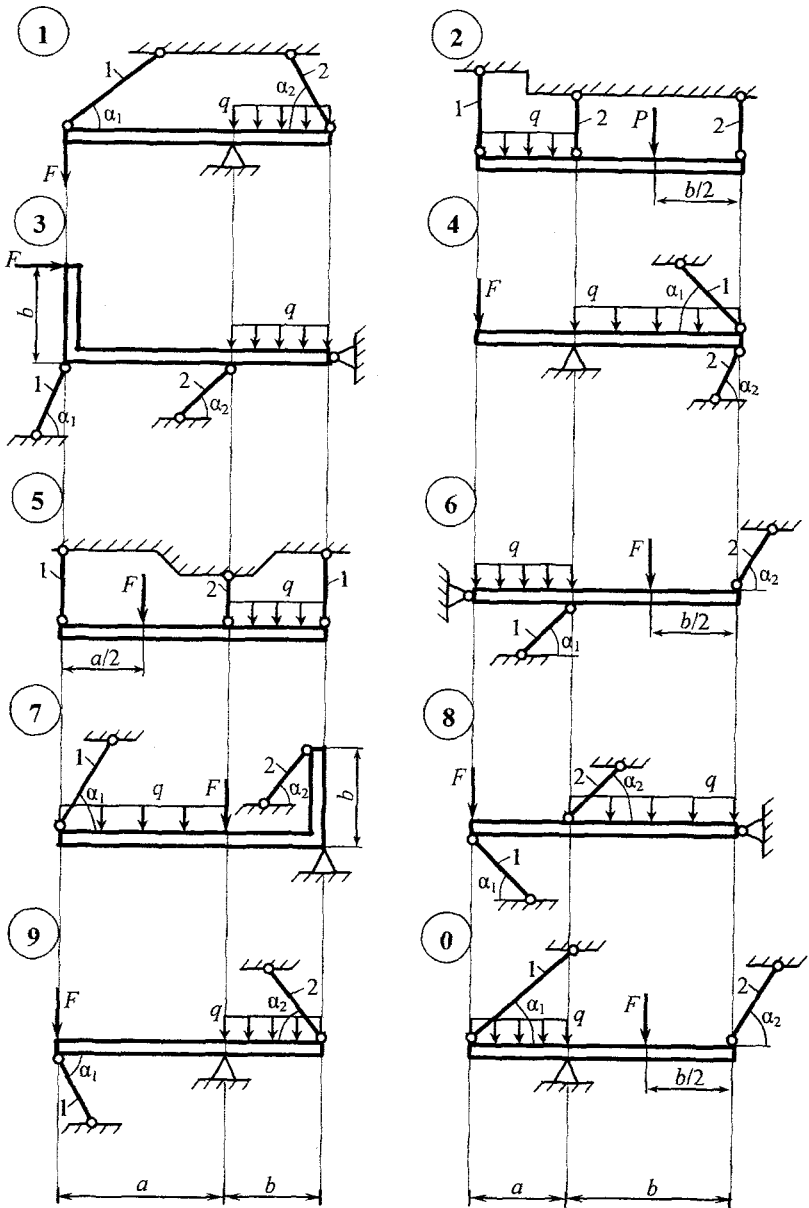


Рис. 1



## Задача 2

Бесконечно малый элемент, выделенный в опасной точке нагруженного тела, находится в плоском напряженном состоянии (рис. 2).

Требуется:

- 1) определить аналитически и графически (при помощи круговой диаграммы Мора) главные напряжения и направление главных площадок;
- 2) вычислить максимальные касательные напряжения;
- 3) показать на чертеже элемента и на круговой диаграмме Мора главные площадки и направление главных напряжений, а также положение площадок с максимальными касательными напряжениями;
- 4) определить относительные деформации  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ ;
- 5) определить относительную объемную деформацию;
- 6) найти удельную потенциальную энергию деформации;
- 7) проверить прочность материала в рассматриваемой точке по одной из теорий прочности.

Числовые данные взять из табл. 2.

Таблица 2

Первая цифра шифра	$\sigma_x$ , МПа	$\tau_{xy}$ , МПа	Вторая цифра шифра	$\sigma_y$ , МПа	Последняя цифра Шифра (№ схемы)	Теория прочности	$[\sigma_p]$ , МПа	$[\sigma_c]$ , МПа	$E$ , МПа	$\mu$
1	10	10	1	10	1	III	160	160	$2,0 \cdot 10^5$	0,26
2	20	20	2	20	2	M	40	120	$1,0 \cdot 10^5$	0,23
3	30	30	3	30	3	IV	150	150	$2,1 \cdot 10^5$	0,28
4	40	40	4	40	4	M	35	100	$1,1 \cdot 10^5$	0,24
5	50	50	5	50	5	III	140	140	$2,0 \cdot 10^5$	0,33
6	60	60	6	60	6	IV	150	150	$2,1 \cdot 10^5$	0,32
7	70	50	7	70	7	M	30	120	$1,15 \cdot 10^5$	0,25
8	80	40	8	80	8	III	160	160	$2,0 \cdot 10^5$	0,30
9	90	30	9	90	9	M	25	100	$1,20 \cdot 10^5$	0,26
0	100	20	0	100	0	IV	180	180	$2,1 \cdot 10^5$	0,28

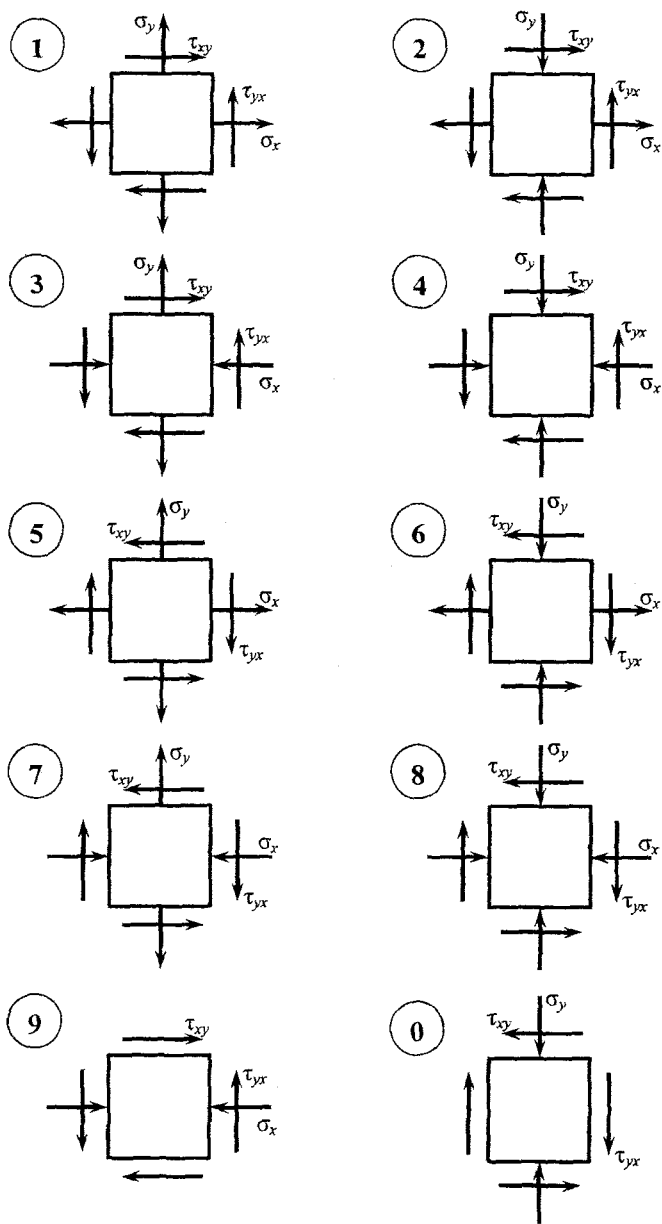


Рис. 2

### Задача 3

Поперечное сечение состоит из прокатных профилей и листа размером  $b \times h$  (рис. 3).

Требуется:

- 1) определить положение центра тяжести сечения;
- 2) найти направление главных центральных осей;
- 3) вычислить моменты инерции и моменты сопротивления относительно этих осей;
- 4) определить значения главных центральных радиусов инерции;
- 5) вычертить сечение в удобном масштабе и указать на нем все оси и все размеры.

Числовые данные взять из табл. 3.

Таблица 3

Первая цифра шифра	Двутавр	$b$ , см	Вторая цифра шифра	Швеллер	$h$ , см	Последняя цифра шифра (№ схемы)	Уголок равнополочный	Уголок неравнополочный
1	10	10	1	10	100	1	80x80x8	—
2	12	12	2	12	120	2	—	80x50x6
3	14	14	3	14	140	3	—	90x56x8
4	16	16	4	16	160	4	—	—
5	18	18	5	18	180	5	90x90x9	—
6	20	20	6	20	200	6	100x100x10	—
7	22	18	7	22	220	7	125x125x10	—
8	24	16	8	24	240	8	—	100x63x10
9	27	14	9	27	260	9	—	110x70x8
0	30	13	0	30	280	0	—	125x80x10

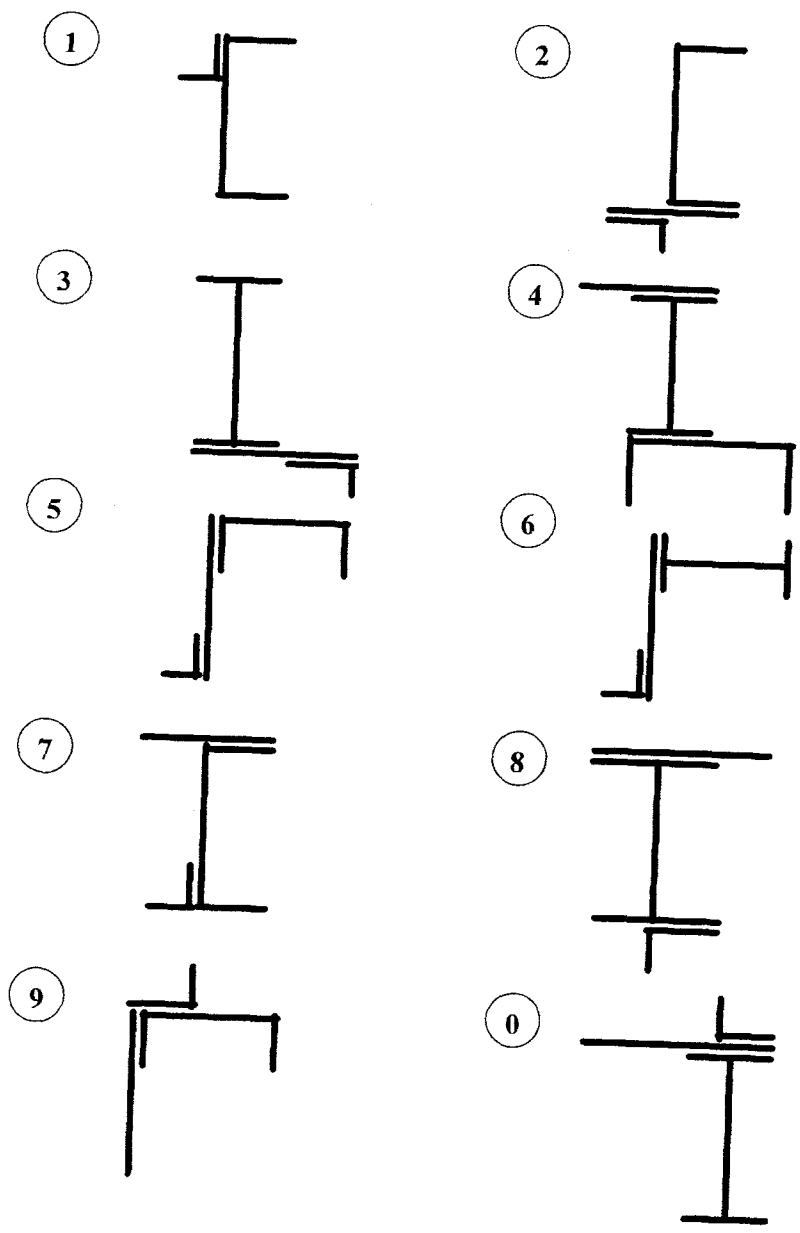


Рис. 3











## Задача

Для заданной схемы балки (рис. 4.1) и рамы (рис. 4.2) требуется:

- 1) построить эпюры внутренних силовых факторов;
- 2) подобрать необходимые размеры поперечного сечения заданной формы при  $[\sigma]=160$  МПа (для балок);
- 3) вычислить наибольшие касательные напряжения (для балок);
- 4) построить эпюру прогибов, приняв  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа (для балок);
- 5) проверить правильность построения эпюр путем вырезания узлов с последующей проверкой выполнения всех трех уравнений равновесия каждого узла (для рам).

Числовые данные взять из табл. 4.

Таблица 4

Первая цифра шифра	$a$ , м	$F$ , кН	Вторая цифра шифра	$b$ , м	$m$ , кН·м	$q$ , кН/м	Последняя цифра шифра (№ схемы)	$c$ , м	Форма сечения	Отношение высоты к ширине $h/b$
1	1	10	1	3	40	2	1	1		—
2	2	20	2	2	30	4	2	2		2
3	3	30	3	1	20	6	3	1		—
4	2	40	4	2	10	8	4	2		1
5	1	30	5	3	20	10	5	1		—
6	2	20	6	2	30	12	6	2		—
7	3	10	7	1	40	14	7	3		2,5
8	2	20	8	2	30	16	8	1		—
9	1	30	9	3	20	18	9	2		1
0	2	40	0	2	10	20	0	1		—

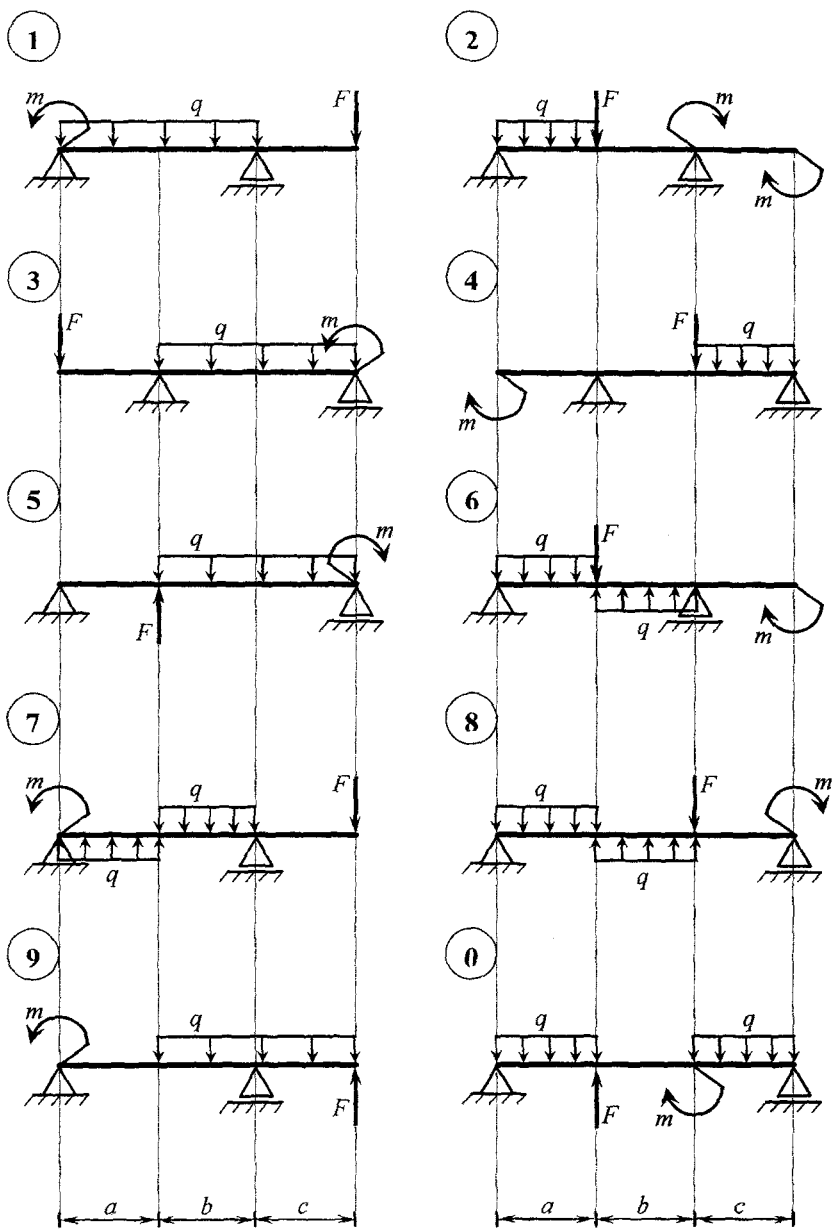


Рис. 4.1

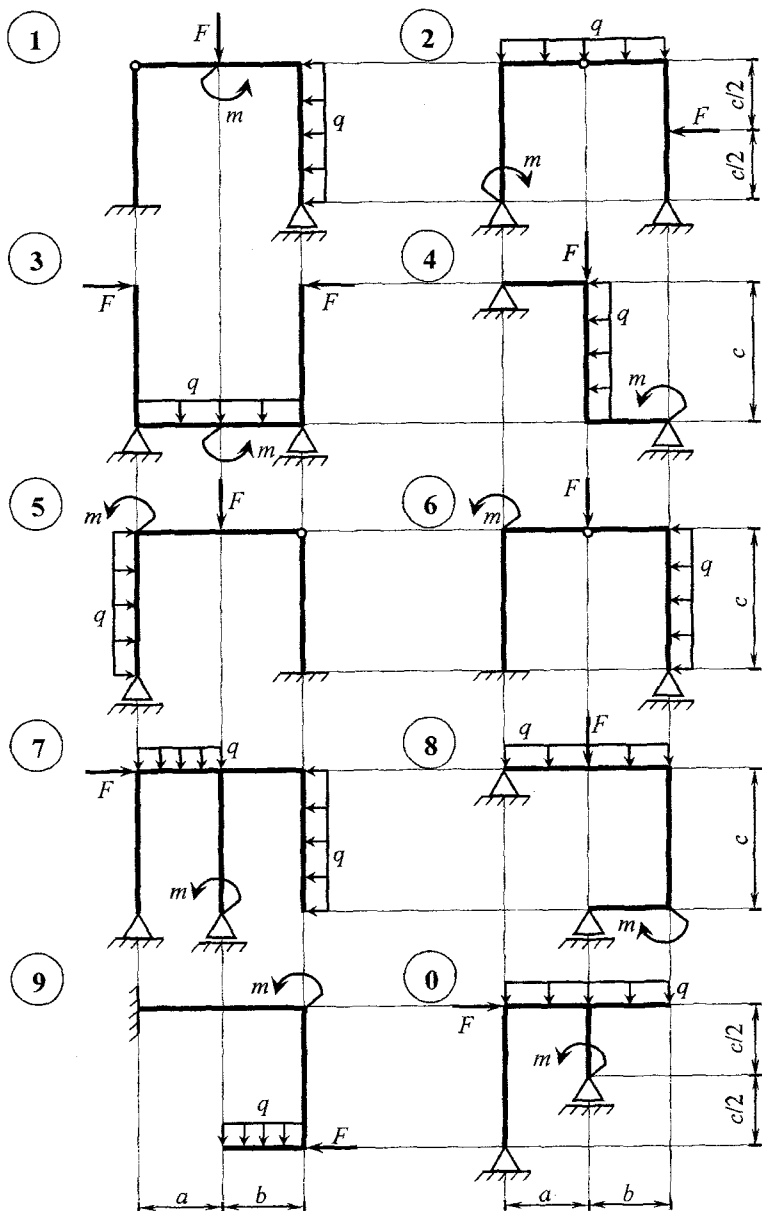


Рис. 4.2

## Задача 5

Для двух заданных схем нагружения балок (рис. 5.1а, б), имеющих форму и размеры поперечных сечений, указанных на рис. 5.1в, требуется:

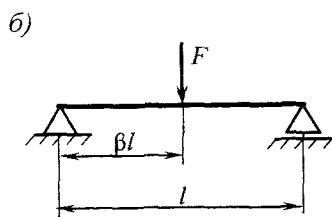
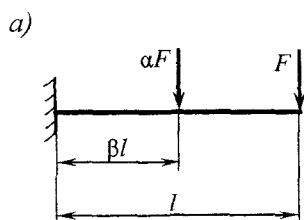
- 1) определить величину наибольших растягивающих и сжимающих напряжений в опасном сечении балки;
- 2) построить эпюру нормальных напряжений по высоте сечения;
- 3) определить величину допускаемой нагрузки на балку;
- 4) определить допускаемую нагрузку при повороте поперечного сечения на  $180^\circ$ ;
- 5) сравнить найденные значения допускаемой нагрузки.

Числовые данные взять из табл. 5.

Таблица 5

Первая цифра шифра	Схема балки (рис. 5.1а, б)	$F$ , кН	$l$ , м	Вторая цифра шифра	$\alpha$	$\beta$	$[\sigma_c]$ , МПа	Последняя цифра шифра	Тип поперечного сечения по (рис. 5.1в)	$t$ , см	$b$ , см	$[\sigma_p]$ , МПа
1	а	10	2,0	1	0,7	0,25	80	1	1	4,0	24	30
2	б	20	3,0	2	0,8	0,30	90	2	2	3,0	22	32
3	а	15	1,8	3	0,9	0,35	100	3	3	3,6	20	34
4	б	30	2,8	4	1,0	0,40	110	4	4	3,0	18	36
5	а	20	1,6	5	1,1	0,45	120	5	1	3,2	26	38
6	б	40	2,6	6	1,2	0,50	130	6	2	3,0	24	40
7	а	25	1,4	7	1,1	0,55	140	7	3	3,2	22	42
8	б	50	2,4	8	1,0	0,60	130	8	4	3,4	20	44
9	а	30	1,2	9	0,9	0,65	120	9	1	3,6	28	46
0	б	60	2,2	0	0,8	0,70	110	0	2	3,8	22	48





6)

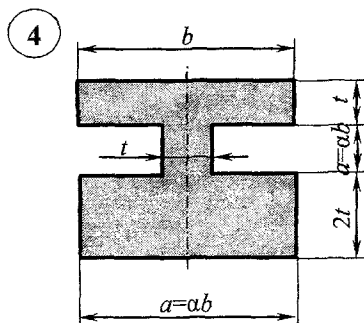
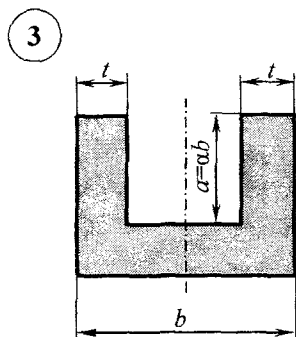
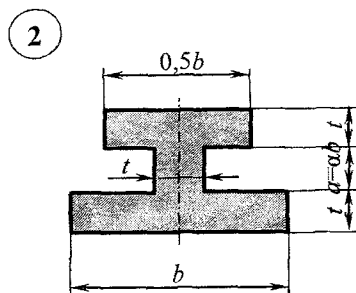
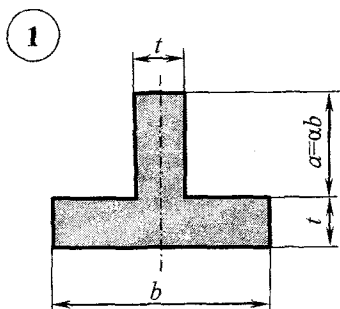


Рис. 5.1

## Задача 6

К стальному валу приложены три известных момента  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  и один неизвестный  $X$  (рис. 6).

Требуется:

- 1) определить значение момента  $X$ , при котором угол поворота концевого (не заземленного) сечения вала равен нулю;
- 2) построить эпюру крутящих моментов при найденном значении  $X$ ;
- 3) определить диаметр вала из условия прочности и жесткости, приняв  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа;
- 4) вычислить максимальные касательные напряжения на всех участках вала и построить эпюру  $\tau_{\max}$ ;
- 5) построить эпюру углов закручивания поперечных сечений вала;
- 6) найти наибольший относительный угол закручивания.

Числовые данные взять из табл. 6.

Таблица 6

Первая цифра шифра	$a$ , м	$M_1$ , кН·м	$[\tau]$ , МПа	Вторая цифра шифра	$b$ , м	$M_2$ , кН·м	$[\theta]$ , градус/м	Последняя цифра шифра (№ схемы)	$c$ , м	$M_3$ , кН·м
1	1,1	1	50	1	2,0	2	1,0	1	0,5	1,5
2	1,2	2	60	2	1,9	4	1,2	2	0,6	3,0
3	1,3	3	65	3	1,8	6	1,4	3	0,7	4,5
4	1,4	4	70	4	1,7	8	1,6	4	0,8	6,0
5	1,5	5	75	5	1,6	10	1,8	5	0,9	7,5
6	1,6	6	80	6	1,5	12	2,0	6	1,0	9,0
7	1,7	7	85	7	1,4	14	2,2	7	1,1	10,5
8	1,8	8	90	8	1,3	16	2,4	8	1,2	12,0
9	1,9	9	95	9	1,2	18	2,6	9	1,3	13,5
0	2,0	10	100	0	1,0	20	2,8	0	1,4	15,0

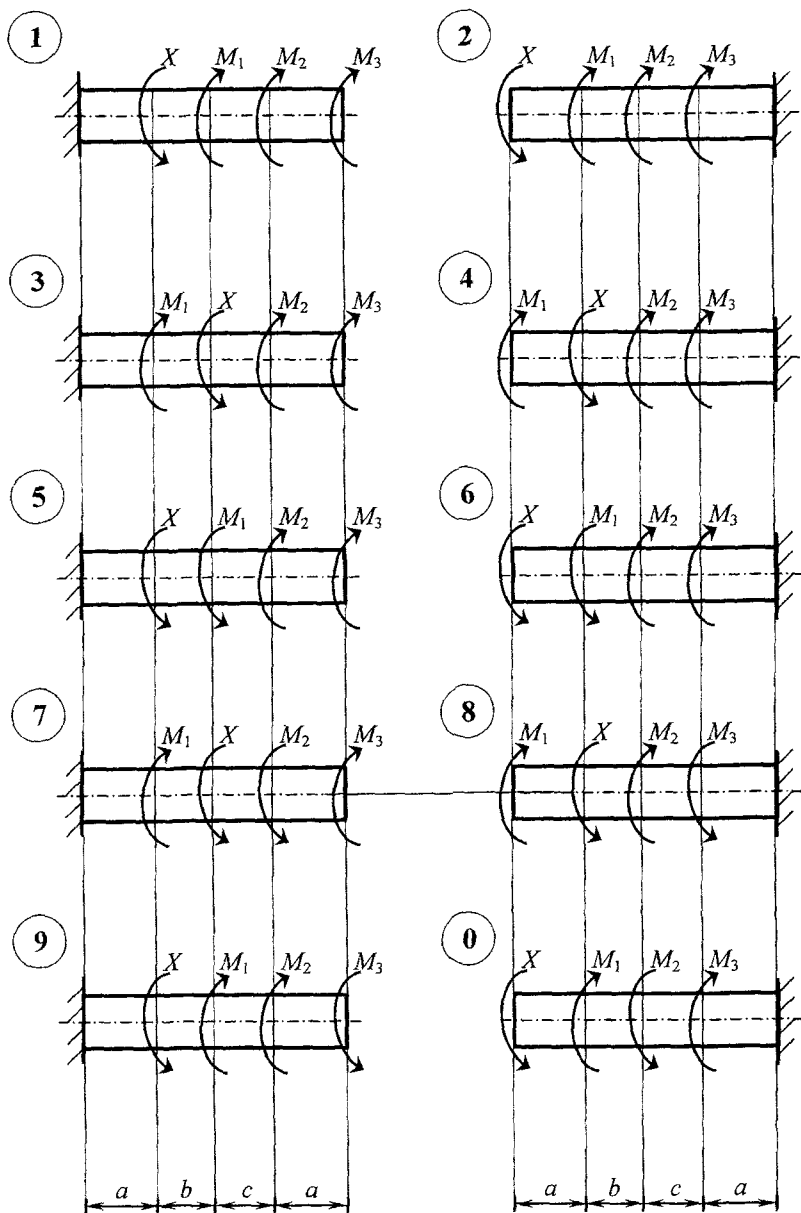


Рис. 6

## Задача 7

Короткий стержень заданного поперечного сечения сжимается продольной силой  $F$ , приложенной в точке, показанной на схеме сечения (рис. 7).

Требуется:

- 1) найти положение нейтральной линии в поперечном сечении стержня;
- 2) вычислить наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения и построить эпюру напряжений;
- 3) найти допускаемую нагрузку при заданных размерах сечения;
- 4) построить ядро сечения.

Числовые данные взять из табл. 7.

Таблица 7

Первая цифра шифра	$b$ , см	$F$ , кН	Вторая цифра шифра	$[\sigma_c]$ , МПа	Точка приложения силы	Последняя цифра шифра (№ схемы)	$h$ , см	$[\sigma_p]$ , МПа
1	4	100	1	90	1	1	3	22
2	5	120	2	100	2	2	4	24
3	6	140	3	110	1	3	5	26
4	7	160	4	120	2	4	6	28
5	6	180	5	130	1	5	7	30
6	7	200	6	140	2	6	8	32
7	8	220	7	130	1	7	7	34
8	9	240	8	120	2	8	6	36
9	10	260	9	110	1	9	5	38
0	12	280	0	100	2	0	4	40

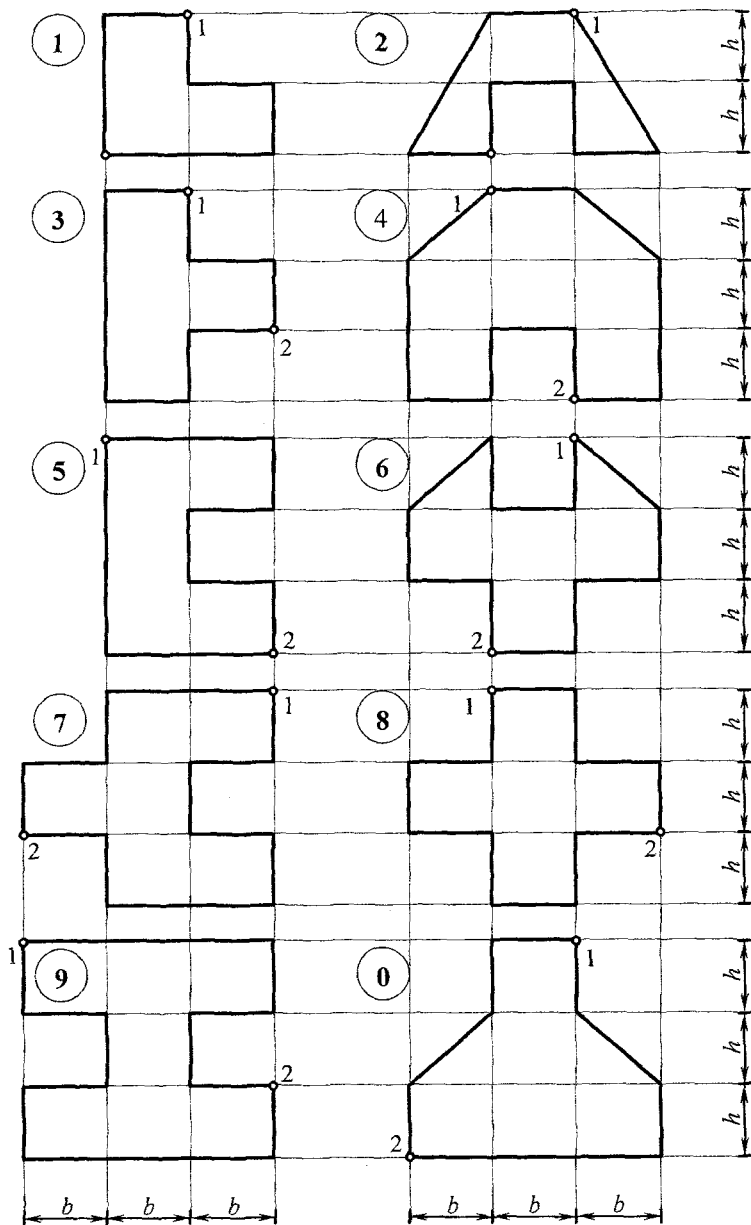


Рис. 7

## Задача 8

Для заданной пространственной системы стержней одинаковой длины  $l$  (рис. 8) требуется:

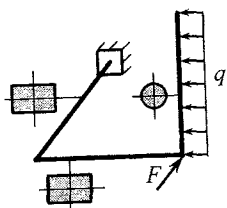
- 1) построить в аксонометрии эпюры внутренних силовых факторов в общем виде ( $Q$ ,  $N$ ,  $M_n$ ,  $M_k$ );
- 2) для каждого стержня:
  - а) установить вид сопротивления;
  - б) изобразить опасные сечения в рабочем положении (в аксонометрии) и показать внутренние усилия (в общем виде);
  - в) вычислить величину внутренних усилий и геометрические характеристики сечений;
- 3) найти положение нейтральной линии в опасных сечениях и построить эпюры нормальных и касательных напряжений в этих сечениях;
- д) проверить прочность всех стержней и (при необходимости) подобрать размеры сечения стержней, обеспечивающих их прочность, приняв  $[\sigma]=160$  МПа,  $[\tau]=100$  МПа.

Числовые данные взять из табл. 8.

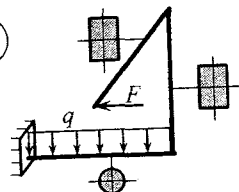
Таблица 8

Первая цифра шифра	$F$ , кН	$l$ , м	Вторая цифра шифра	$q$ , кН/м	$h$ , мм	Последняя цифра шифра (№ схемы)	$h/b$
1	$0,5 \cdot ql$	0,1	1	2	10	1	1,5
2	$1,0 \cdot ql$	0,2	2	4	12	2	2,0
3	$1,5 \cdot ql$	0,3	3	6	14	3	3,0
4	$2,0 \cdot ql$	0,4	4	8	16	4	4,0
5	$2,5 \cdot ql$	0,5	5	10	18	5	2,0
6	$3,0 \cdot ql$	0,6	6	8	20	6	1,0
7	$2,5 \cdot ql$	0,7	7	6	22	7	3,0
8	$2,0 \cdot ql$	0,8	8	4	24	8	1,5
9	$1,5 \cdot ql$	0,9	9	2	26	9	2,0
0	$1,0 \cdot ql$	1,0	0	1	28	0	3,0

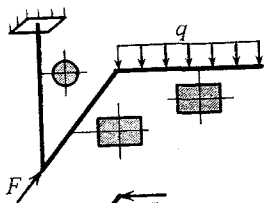
1



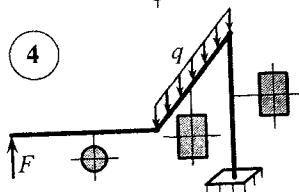
2



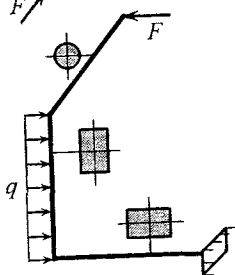
3



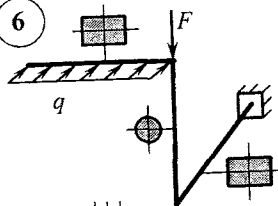
4



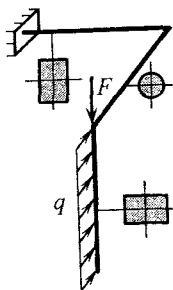
5



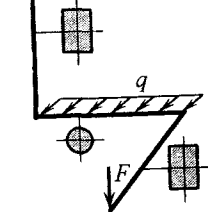
6



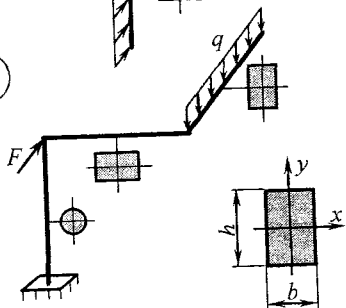
7



8



9



0

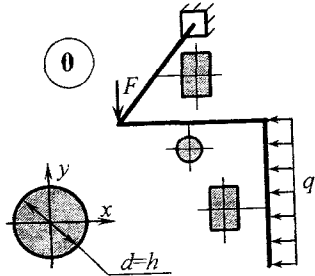


Рис. 8

## Задача 9

Стальной вал диаметром  $d$  (рис. 9), вращающийся со скоростью  $n$ , от электродвигателя через шкив 1 ременной передачи принимает мощность  $P$ , которая затем передается зубчатыми шестернями 2 и 3 в заданном отношении.

Требуется:

- 1) определить моменты, приложенные к шкиву и шестерням;
- 2) построить эпюру крутящих моментов;
- 3) определить силы, действующие на шкив и шестерни при  $T_1 = 2t_1$ , считая радиальные усилия на шестернях  $F_r = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha$ , где  $F_t$  – окружное усилие, а  $\alpha = 20^\circ$  – угол зацепления;
- 4) определить нагрузки, действующие на вал;
- 5) определить силы, изгибающие вал в вертикальной и горизонтальной плоскостях;
- 6) построить эпюры изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях;
- 7) построить суммарную эпюру изгибающих моментов;
- 8) найти опасное сечение вала и вычислить для него величину эквивалентного момента (по III теории прочности);
- 9) определить диаметр вала, приняв  $[\sigma] = 80$  МПа.

Числовые данные взять из табл. 9.

Таблица 9

Первая цифра шифра	$P_1$ , кВт	$D_1$ , мм	$a$ , м	Вторая цифра шифра	$n$ , об/мин	$D_2$ , мм	$b$ , м	Последняя цифра шифра (№ схемы)	$P_2/P_3$	$D_3$ , мм	$c$ , м
1	10	400	0,1	1	500	100	0,1	1	0,5	150	0,1
2	20	450	0,2	2	600	150	0,2	2	1,0	200	0,2
3	30	500	0,3	3	650	200	0,3	3	1,5	250	0,3
4	40	550	0,4	4	700	250	0,4	4	2,0	300	0,4
5	50	600	0,5	5	750	300	0,5	5	2,5	350	0,5
6	60	650	0,6	6	800	350	0,6	6	3,0	300	0,6
7	50	700	0,7	7	850	300	0,7	7	2,5	250	0,7
8	40	600	0,8	8	900	250	0,8	8	2,0	200	0,8
9	30	500	0,9	9	950	200	0,9	9	1,5	150	0,9
0	20	400	1,0	0	1000	150	1,0	0	1,0	100	1,0



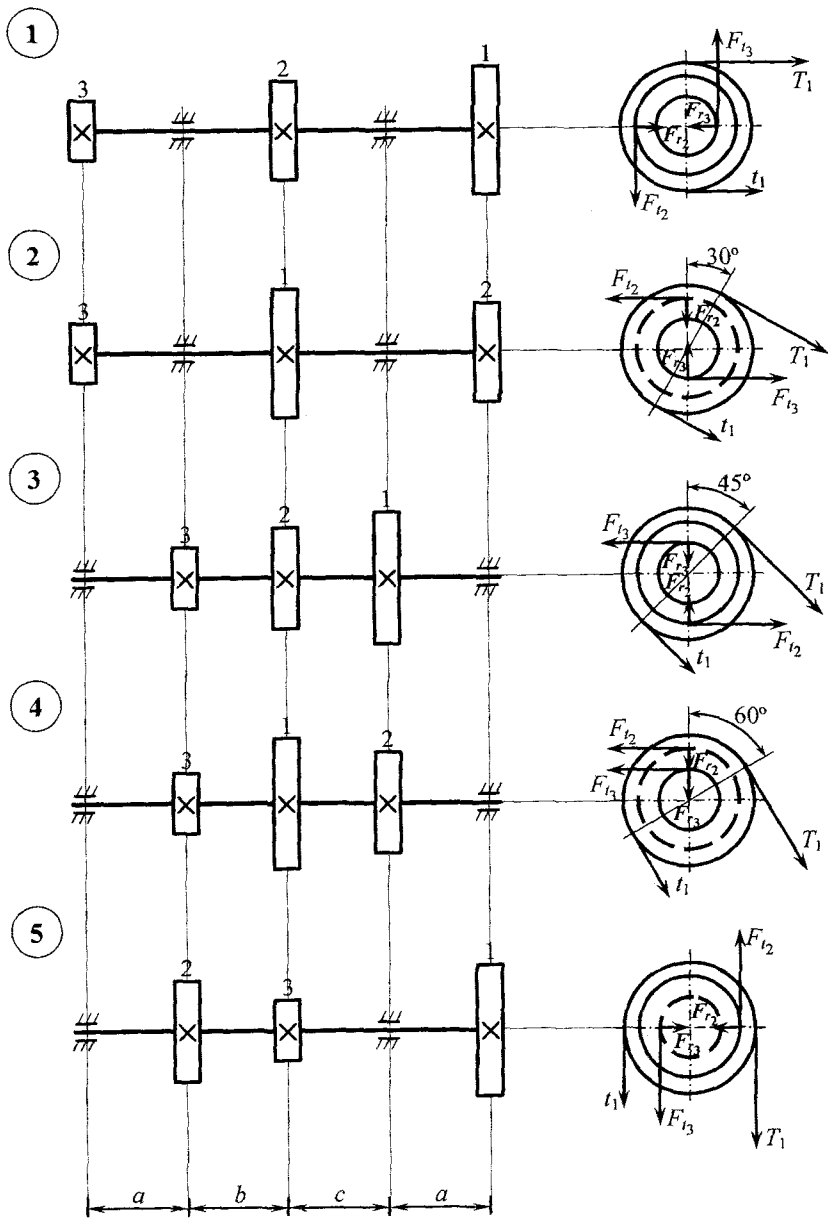


Рис. 9

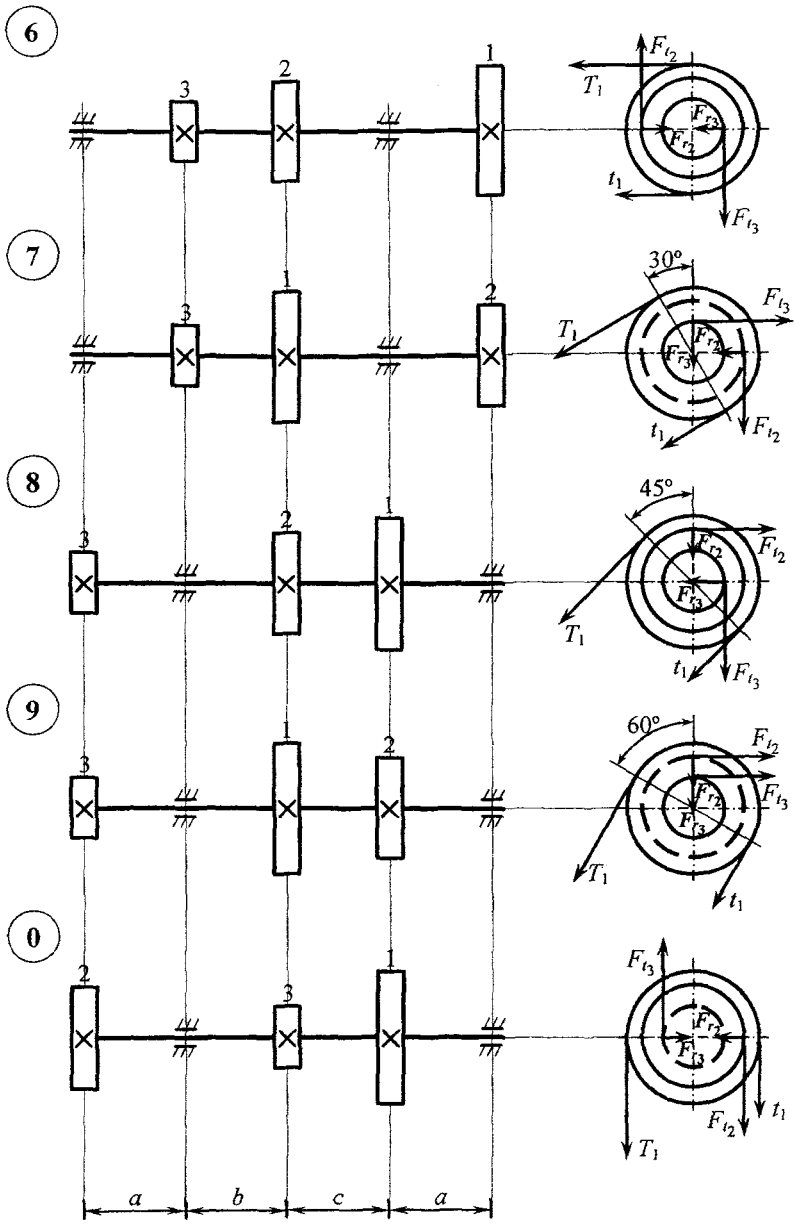


Рис. 9 (окончание)

## Задача 10

Статически неопределимая рама находится под действием заданных внешних сил (рис. 10).

Требуется:

- 1) установить степень статической неопределимости рамы и выбрать основную систему;
- 2) составить канонические уравнения метода сил;
- 3) построить эпюры изгибающих моментов от единичных сил и заданной нагрузки;
- 4) найти величины лишних неизвестных;
- 5) построить окончательные эпюры внутренних силовых факторов;
- 6) проверить правильность построения эпюр:
  - а) статическая проверка – путем вырезания узлов рамы и проверки выполнения всех трех уравнений равновесия узла;
  - б) кинематическая (деформационная) проверка – путем умножения по правилу Верещагина окончательной эпюры  $M$  на каждую единичную эпюру.

Числовые данные взять из табл. 10.

Таблица 10

Первая цифра шифра	$l$ , м	$J_1/J_2$	Вторая цифра шифра	$h$ , м	$q$ , кН/м	Последняя цифра шифра (№ схемы)	$m$ , кН·м	$F$ , кН
1	2	1,0	1	2	12	1	–	30
2	3	0,75	2	3	10	2	10	–
3	4	0,5	3	4	8	3	20	–
4	5	0,75	4	5	6	4	30	20
5	6	1,0	5	4	4	5	–	10
6	5	1,5	6	3	6	6	30	30
7	4	2,0	7	2	8	7	20	20
8	3	1,0	8	3	10	8	10	10
9	2	0,75	9	4	12	9	–	–
0	3	0,5	0	6	4	0	–	–

*Примечание:* горизонтальные стержни рамы имеют моменты инерции  $J_1$ , а вертикальные стержни –  $J_2$ .

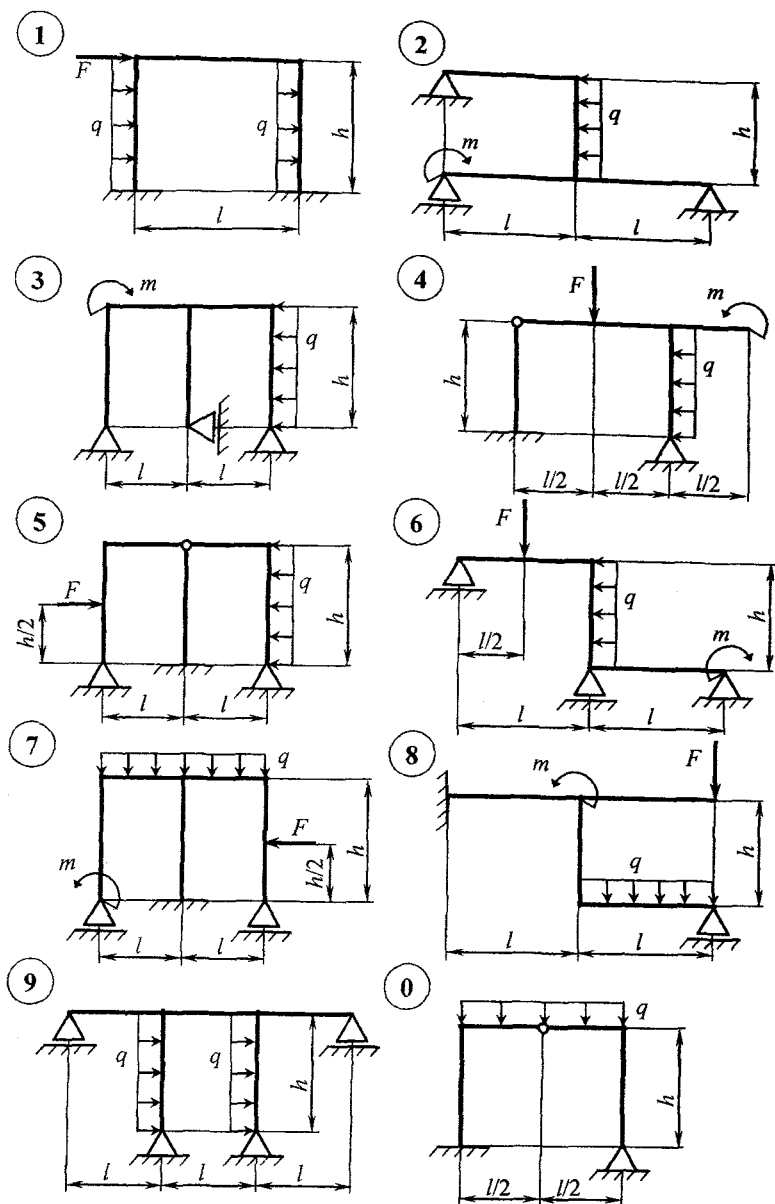


Рис. 10

## Задача 11

Неразрезная балка находится под действием заданных внешних сил (рис. 11).

Требуется:

- 1) установить степень статической неопределимости балки и выбрать основную систему;
- 2) составить канонические уравнения метода сил;
- 3) построить эпюры изгибающих моментов от единичных силовых факторов и заданной нагрузки;
- 4) найти величины опорных моментов;
- 5) построить окончательные эпюры  $Q$  и  $M$ ;
- 6) проверить правильность построения эпюр (по правилу Верещагина или методу начальных параметров);
- 7) подобрать двутавровое сечение балки;
- 8) определить перемещение посередине каждого пролета и на конце консоли и показать изогнутую ось балки.

Числовые данные взять из табл. 11.

Таблица 11

Первая цифра шифра	$F$ , кН	$q$ , кН/м	$m$ , кН·м	Вторая цифра шифра	Индекс нагрузки $F$	Индекс нагрузки $q$	Индекс нагрузки $m$	Последняя цифра шифра (№ схемы)	$a_1$ , м	$a_2$ , м
1	20	5	10	1	1	3	1	1	1,2	1,0
2	24	10	20	2	2	2	1	2	1,4	1,2
3	26	15	30	3	3	1	1	3	1,6	1,4
4	28	20	40	4	1	1	2	4	1,8	1,6
5	30	15	30	5	2	2	2	5	2,0	1,8
6	32	10	20	6	3	3	2	6	1,8	2,0
7	34	5	10	7	1	3	3	7	1,6	1,8
8	36	10	20	8	2	2	3	8	1,4	1,6
9	38	15	30	9	3	1	3	9	1,2	1,4
0	40	20	40	0	1	2	3	0	1,0	1,2

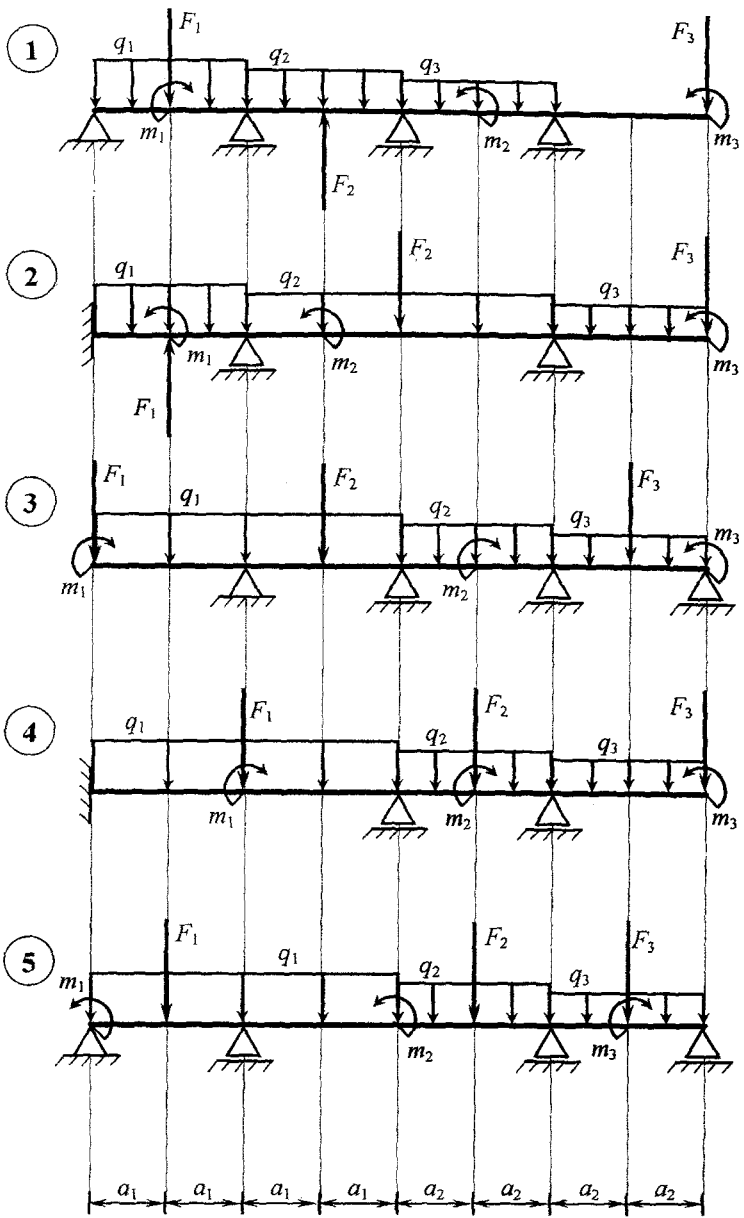


Рис. 11

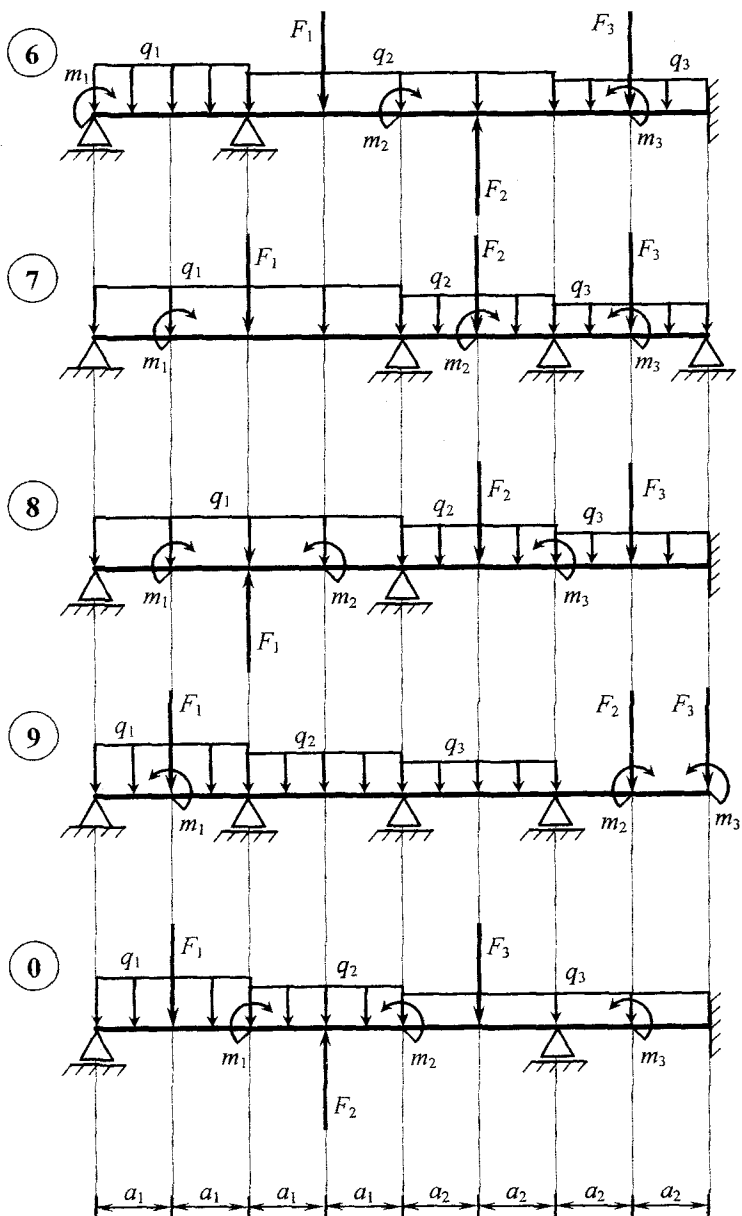


Рис. 11 (окончание)

## Задача 12

Стойка длиной  $l$  (рис. 12а) заданного поперечного сечения (рис. 12б), выполненная из стали Ст3, сжимается осевой силой  $F$ .

Требуется:

- 1) найти размеры поперечного сечения стойки из условия устойчивости методом последовательных приближений;
- 2) определить величину критической силы;
- 3) вычислить коэффициент запаса устойчивости.

Числовые данные взять из табл. 12.

Таблица 12

Первая цифра шифра	№ схемы (рис. 12а)	$F$ , кН	Вторая цифра шифра	$l$ , м	Последняя цифра шифра	Форма сечения по (рис. 12б)	$[\sigma]$ , МПа
1	1	300	1	3,0	1	0	180
2	2	350	2	3,2	2	9	160
3	3	400	3	3,4	3	8	150
4	4	450	4	3,6	4	7	140
5	5	500	5	3,8	5	6	160
6	1	550	6	4,0	6	5	120
7	2	600	7	4,2	7	4	160
8	3	650	8	4,4	8	3	150
9	4	700	9	4,6	9	2	140
0	5	800	0	4,8	0	1	100



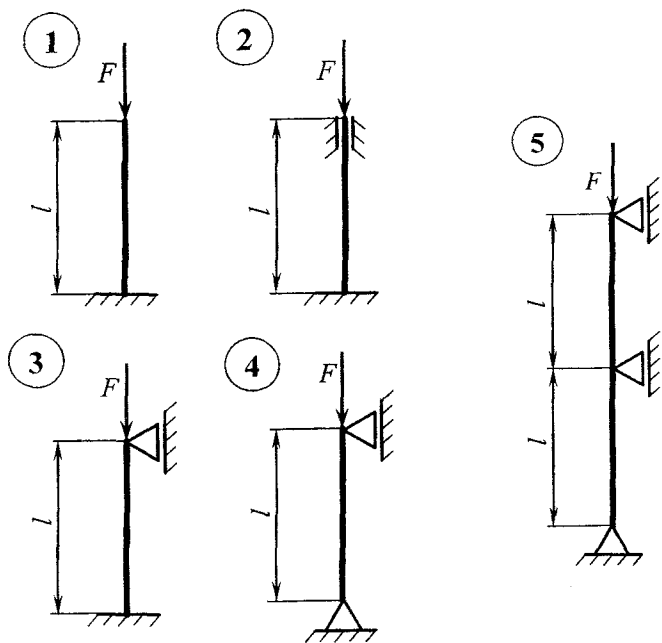


Рис. 12а

Формы поперечных сечений стоек

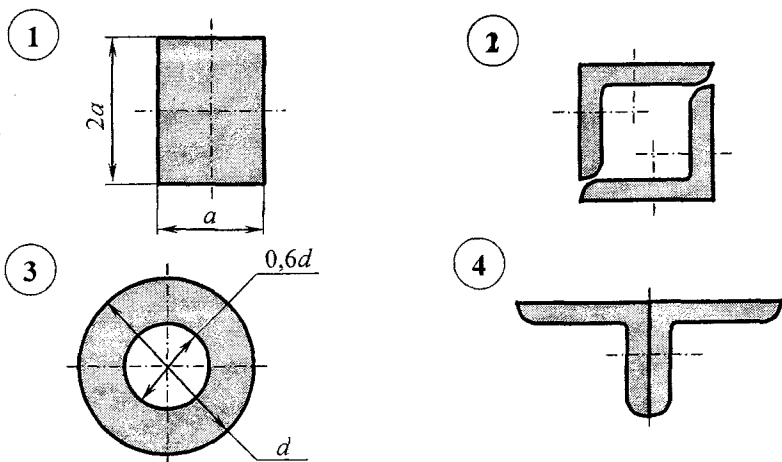


Рис. 12б

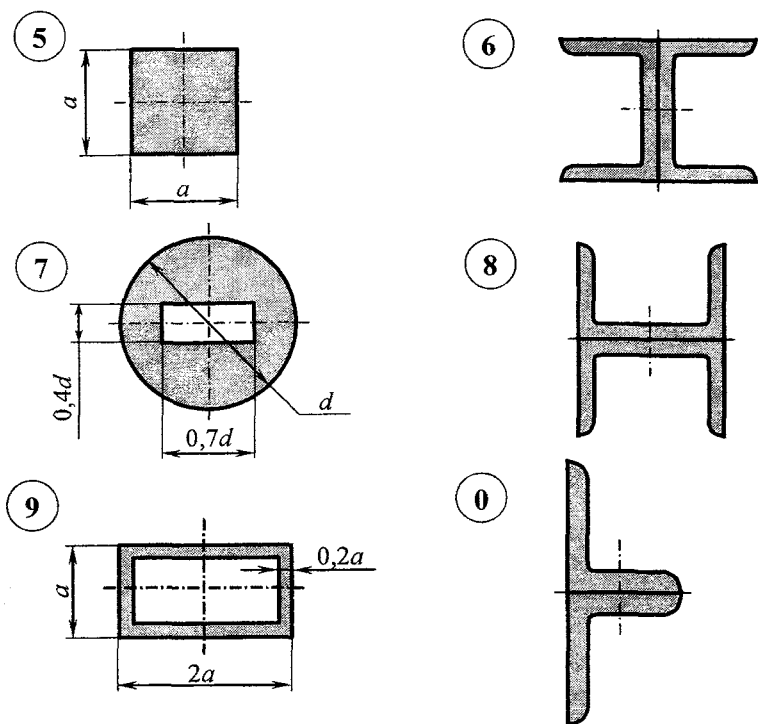


Рис. 126 (окончание)

### Задача 13

На балке (или раме) установлен электродвигатель весом  $Q$  (рис. 13). Частота вращения двигателя  $n$ . Центробежная сила инерции, возникающая вследствие неуравновешенности вращающихся частей двигателя,  $H$ . Собственный вес конструкции и силы сопротивления не учитывать.

Требуется:

- 1) определить частоту собственных и вынужденных колебаний системы;
- 2) вычислить амплитуду вынужденных колебаний, приняв  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;
- 3) найти наибольший прогиб под электродвигателем;

4) определить постоянную составляющую напряжений от веса  $Q$  и динамическую составляющую (амплитудное напряжение) от силы  $H$  в опасном сечении;

5) установить вид цикла изменения суммарных напряжений в этом сечении, определить основные параметры цикла ( $\sigma_m$ ,  $\sigma_a$ ,  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_{min}$ ) и изобразить его графически;

6) определить частоту вращения вала электродвигателя, при котором наступает резонанс.

Числовые данные взять из *табл. 13*.

*Таблица 13*

Первая цифра шифра	$l$ , м	$Q$ , кН	Вторая цифра шифра	$n$ , об/мин	$H$ , кН	Последняя цифра шифра (№ схемы)	№ I	$a$ , см
1	2,1	15	1	300	2,0	1	20	—
2	2,2	14	2	350	2,2	2	18	—
3	2,3	13	3	400	2,4	3	—	8
4	2,4	12	4	450	2,6	4	—	10
5	2,5	11	5	500	2,8	5	16	—
6	2,6	10	6	550	3,0	6	20	—
7	2,7	9	7	600	3,2	7	—	12
8	2,8	8	8	650	3,4	8	—	14
9	2,9	7	9	700	3,6	9	18	—
0	3,0	6	0	750	3,8	0	—	12

*Примечание:* сечение стержней рам – квадрат со стороной  $a$ .

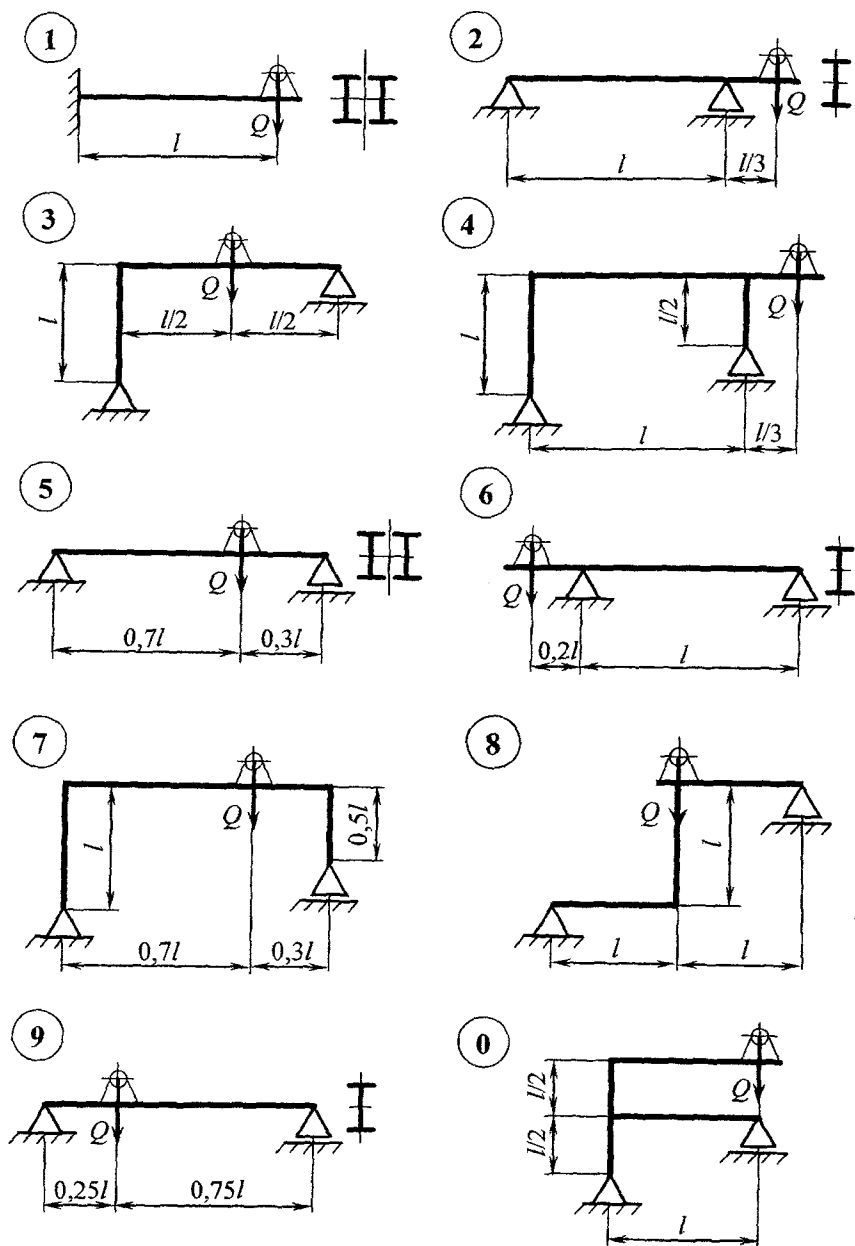


Рис. 13

### Задача 14

На упругую систему с высоты  $h$  падает груз весом  $Q$  (рис. 14). Материал элементов системы — *сталь*. Модуль продольной упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Поддерживающие стержни круглого поперечного сечения диаметром  $d$ .

Требуется:

1) вычислить максимальные напряжения, возникающие в элементах системы (собственный вес элементов упругой системы не учитывать);

2) определить перемещение точки падения груза, вызванное ударом;

3) проверить прочность элементов системы и (при необходимости) подобрать размеры сечения элементов, обеспечивающие их прочность, приняв  $[\sigma] = 160$  МПа.

Числовые данные взять из табл. 14.

Таблица 14

Первая цифра шифра	$b$ , м	№ I	Вторая цифра шифра	$c$ , м	$Q$ , кН	Последняя цифра шифра (№ схемы)	$h$ , см	$d$ , мм	$a$ , см
1	1,1	20	1	2,1	2,0	1	4	25	—
2	1,2	22	2	2,2	2,2	2	5	26	—
3	1,3	24	3	2,3	2,4	3	6	27	—
4	1,4	27	4	2,4	2,6	4	7	28	—
5	1,5	30	5	2,5	2,8	5	8	29	—
6	1,6	27	6	2,6	3,0	6	9	30	—
7	1,7	24	7	2,7	2,8	7	10	—	10
8	1,8	22	8	2,8	2,6	8	9	—	12
9	1,9	20	9	2,9	2,4	9	8	—	14
0	2,0	18	0	3,0	2,2	0	6	—	16

*Примечание:* сечение стержней рам — квадрат со стороной  $a$ .

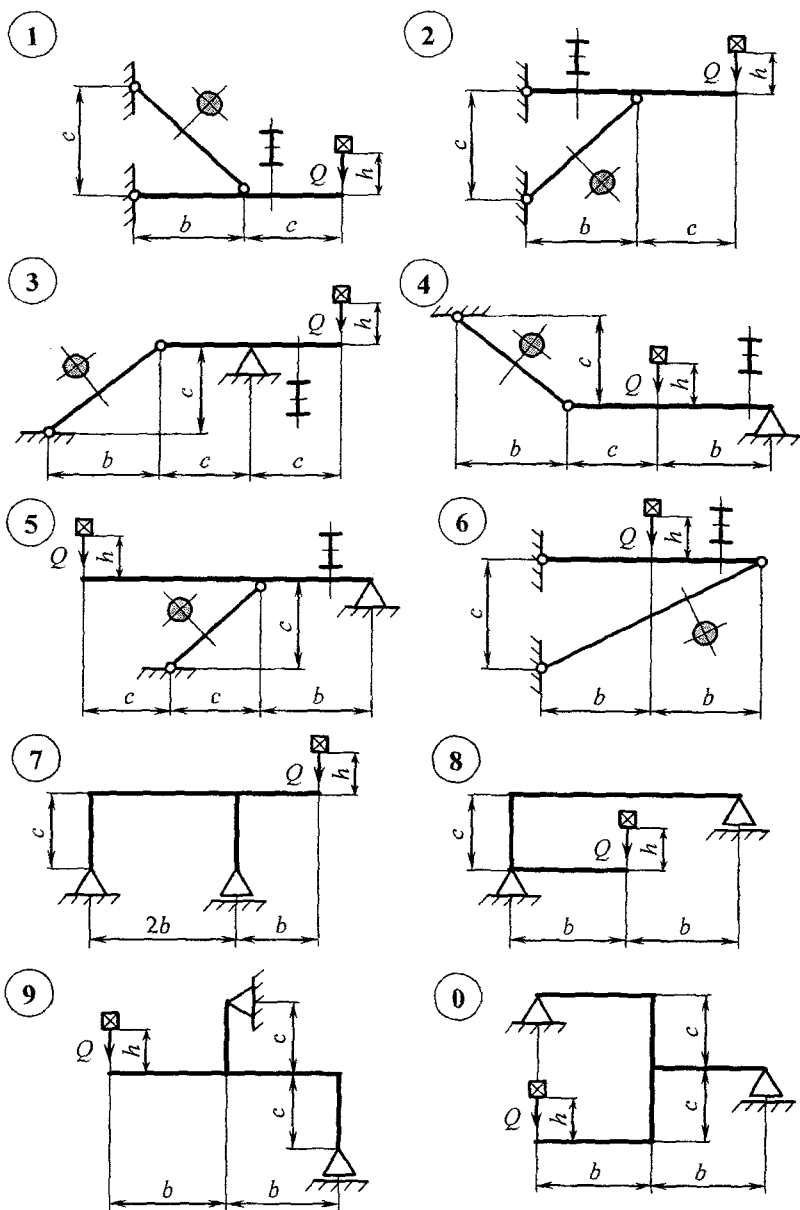


Рис. 14

## Литература

1. *Феодосьев, В.И.* Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
2. *Дарков, А.В., Широ, Г.С.* Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1975. – 742 с.
3. *Степин, П.А.* Сопротивление материалов. – М.: Высшая школа, 1968. – 424 с.
4. *Крылов, Г.С., Молосаев, И.П., Новиков, В.И.* Методическое пособие для самостоятельной работы и решения задач по сопротивлению материалов для студентов заочной формы обучения механических специальностей. – Мн.: БПИ, 1990. – 72 с.
5. *Писаренко, Г.С., Яковлев, А.П., Матвеев, В.В.* Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наукова думка, 1975. – 704 с.
6. *Горшков, Н.Г., Трошин, В.Н., Шалашилин, В.И.* Сопротивление материалов: учебное пособие. – М.: Физматлит, 2002. – 544 с.
7. *Старовойтов, Э.И.* Сопротивление материалов. – Гомель: БелГУТ, 2004. – 376 с.

## Оглавление

1. Осевое растяжение – сжатие . . . . .	3
Задача . . . . .	9
2. Напряженное состояние в точке . . . . .	14
Задача . . . . .	17
3. Геометрические характеристики плоских сечений . . . . .	25
Задача . . . . .	30
4. Плоский поперечный изгиб . . . . .	36
Задача 4.1а . . . . .	41
Задача 4.1б . . . . .	48
Задача 4.2 . . . . .	51
5. Кручение . . . . .	55
Задача . . . . .	57
6. Внецентренное растяжение-сжатие . . . . .	61
Задача . . . . .	63
7. Общий случай сложного сопротивления . . . . .	68
Задача . . . . .	69
8. Кручение с изгибом . . . . .	78
Задача . . . . .	79
9. Расчет статически неопределимых рам и неразрезных балок . . . . .	86
Задача 9.1 . . . . .	88
Задача 9.2 . . . . .	100
10. Устойчивость сжатых стержней . . . . .	109
Задача . . . . .	112
11. Расчеты на ударную нагрузку . . . . .	116
Задача . . . . .	118
12. Расчеты при упругих колебаниях . . . . .	123
Задача . . . . .	126
Контрольные и расчетно-графические задания . . . . .	132
Литература . . . . .	166



Учебное издание

ЯКУБОВСКИЙ Чеслав Андреевич  
ЯКУБОВСКИЙ Андрей Чеславович

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

*ПРАКТИКУМ*

Учебное пособие

Редактор Т.Н. Микулик  
Компьютерная верстка О.В. Дубовик

---

Подписано в печать 12.12.2006  
Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная.  
Отпечатано на ризографе. Гарнитура Таймс.  
Усл. печ. л. 9,7. Уч.-изд. л. 7,6. Тираж 300. Заказ 549.

---

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Белорусский национальный технический университет.  
ЛИ № 02330/0131627 от 01.04.2004.  
220013, Минск, проспект Независимости, 65.