ПОДХОД К ВЫБОРУ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ «КОЭФФИЦИЕНТОВ» ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА, ПОЛУЧЕННОГО НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Новиков С.О.
Белорусский национальный технический университет,
Минск, Республика Беларусь

В качестве прикладной задачи рассмотрим задачу позиционного управления электроприводом постоянного тока (ЭПТ) по критерию минимума электрических потерь с учетом локальных ограничений.

Для применения модифицированного принципа максимума необходимо заменить время t на одну из фазовых переменных, в данной задаче это скорость ν. Методика применения модифицированного принципа максимума может быть описана следующим образом. Уравнение равновесия моментов на валу ЭПТ может быть представлено в виде:

$$J(\alpha)\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t} = \mu_{э} - \hat{\mu}_{н}(\alpha,\nu), \qquad (1)$$

где $\hat{\mu}_{н}(\alpha,\nu) = \mu_{н} + (\nu^2/2) * (\mathrm{d}J(\alpha)/\mathrm{d}\alpha)$; $\mu_{н} = \mathrm{const}$.

Учитывая, что для электропривода $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t = i^2$ и $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t = \nu$, перепишем систему уравнений движения электропривода (1) в виде:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = i^2, \quad J(\alpha)\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t} = i - \hat{\mu}_{н}, \quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \nu, \qquad (2)$$

где q – потери; i – ток якоря, который в относительных единицах равен $\mu_{э}$.

Граничные условия при этом имеют вид

$$\nu(0) = 0,\ \nu(T) = 0,\ \alpha(0) = 0,\ \alpha(T) = \alpha_T. \qquad (3)$$

Требуется на решениях системы (2) при соблюдении условий (3) выбрать такой закон изменения тока якоря, который доставит минимум функционалу:

$$q = \int_0^T i^2 \mathrm{d}t \to \min. \qquad (4)$$

После замены аргумента t на ν система уравнений привода (2) примет вид

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}\nu} = \frac{J(\alpha)i^2}{i - \hat{\mu}_{н}(\alpha,\nu)}, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\nu} = \frac{J(\alpha)}{i - \hat{\mu}_{н}(\alpha,\nu)}, \quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\nu} = \frac{J(\alpha)\nu}{i - \hat{\mu}_{н}(\alpha,\nu)}. \qquad (5)$$

Граничные условия для этой задачи имеют вид

$$q(0) = 0,\ \nu(0) = v_0 = 0,\ \nu(T) = v_T = 0,\ \alpha(0) = 0,\ \alpha(T) = \alpha_T\ . \qquad (6)$$

Для системы (6) запишем функцию Л.С. Понтрягина

$$H = \frac{(\psi_0 i^2 + \psi_1 + \psi_2 \nu)J(\alpha)}{i - \hat{\mu}_{н}(\alpha,\nu)}. \qquad (7)$$

Уравнения для сопряженных переменных, «коэффициентов», имеют вид

$$\frac{d\psi_0}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial q} \equiv 0; \quad \frac{d\psi_1}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0;$$
$$\frac{d\psi_2}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha} = -\frac{(\psi_0 i^2 + \psi_1 + \psi_2 \nu)}{(i - \hat{\mu}_н(\alpha,\nu))^2}\left[\frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha}(i - \hat{\mu}_н(\alpha,\nu)) + (\frac{\nu^2}{2})\frac{\partial^2 J(\alpha)}{\partial \alpha^2}\right]. \qquad (8)$$

Из условия $\partial H/\partial i = 0$, выбираем $\psi_0 = -1$ и определяем оптимальный закон изменения тока якоря:

$$i^* = \hat{\mu}_н(\alpha,\nu) \pm \sqrt{\hat{\mu}_н(\alpha,\nu) + \psi_1 + \psi_2 \nu}. \qquad (9)$$

Обозначим некоторую ступень постоянства $J(\alpha)$ и ψ_2 индексом j, а следующую за ней индексом $j+1$. Точки разрывов кусочно-постоянной функции $J(\alpha)$ от аргумента ν не зависят. Поэтому гамильтониан в оптимальном процессе непрерывен. Исходя из этого приравниваются соответствующие индексы j и $j+1$:

$$\frac{(i_j^{*2} + \psi_1 + \psi_{2j}\nu_j)J_j}{i_j^* - \hat{\mu}_{нj}} = H_j = H_{j+1} = \frac{(i_{j+1}^{*2} + \psi_1 + \psi_{2j+1}\nu_{j+1})J_{j+1}}{i_{j+1}^* - \hat{\mu}_{нj+1}}. \qquad (10)$$

Отсюда, с учетом выражения для тока (9), получаем

$$\pm J_j i_j^* = \pm J_{j+1} i_{j+1}^*, \qquad (11)$$

где знак «+» соответствует участку разгона; знак «–» участку торможения.

Подставляя (9) в (11), получаем формулу для определения ψ_{2j+1} в виде

$$\psi_{2j+1} = ((J_j i_j^*/J_{j+1} + \hat{\mu}_{нj+1}(\alpha,\nu))^2 - \hat{\mu}_{нj+1}{}^2 - \psi_1)/\nu_j. \qquad (12)$$

Для моделирования работы системы управления с регулятором (9), необходимо выбрать начальные значения для «коэффициентов» ψ_1 и ψ_2. Поскольку в начальный момент времени ν=0, то начальное значение ψ_2 может быть практически любым, а (9) примет вид

$$i^* = \mu_н \pm \sqrt{\mu_н + \psi_1}. \qquad (13)$$

Отсюда, принимая во внимание ограничения, которые накладываются на ЭПТ, условие (4) и производится выбор начального значения для ψ_1. Процесс позиционирования имеет участки разгона и торможения. Из непрерывности гамильтониана в оптимальном процессе следует непрерывность оптимального управления (тока i^*), и поэтому переключение на торможение происходит при скорости $\nu = \nu_п$, определяемой из условия $\hat{\mu}_н(\alpha,\nu) + \psi_1 + \psi_2\nu = 0$. Задаваясь для системы (2) с регулятором (9) начальными значениями констант ψ_1 и ψ_2 так, чтобы выполнялись граничные условия (3). Полученный процесс и является решением задачи в исходной постановке.