УДК 517.956

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ КРЫЛА МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Канд. физ.-мат. наук, доц. ГРИБКОВА В. П.,
канд. техн. наук, доц. КОЗЛОВ С. М.

Белорусский национальный технический университет

В [1] подробно анализируется один из приближенных методов решения уравнения теории крыла конечного размаха, которое описывается сингулярным интегро-дифференциальным уравнением

$$\Gamma(x)/B(x)-(1/2\pi)\int_{-1}^{1}\Gamma'(t)/(t-x)dt=f(x),\quad x\in[-1,\,1], \qquad (1)$$

где $f(x)$ и $B(x)$ – известные функции (функция $B(x)$ нигде не обращается в нуль, за исключением, может быть, концов промежутка, и на всем промежутке больше нуля); $\Gamma(x)$ – искомая функция ($\Gamma(1)=\Gamma(-1)=0$).

Рассмотренный в [1] метод Мультоппа основан на замене точного решения тригонометрическим интерполяционным многочленом Лагранжа, построенным на узлах $x_k = \cos(k\pi/(n+1))$, $k=\overline{1,n}$ и выраженным через полиномы Чебышева второго рода:

$$U_n(x)=\sin((n+1)\arccos x)/\sqrt{1-x^2},$$

либо при замене $x=\cos\theta$, $\theta\in[0,\pi]$ $U_n(\cos\theta)=\sin\,(n+1)\theta/\sin\theta$. Аналогичное приближенное решение рассматривается в [2], но для пространства L_2 с нормой

$$\|f\|=\left(\int_{-1}^{1}\rho(x)\,|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

В данной статье предлагается метод, аналогичный рассмотренному в [1], который построен на полиномах Чебышева второго рода, но на других узлах. Этот метод удобен тем, что позволяет для каждого приближенного решения вычислить погрешность для любой точки промежутка [–1, 1] в виде ряда на основе последовательности линейных функционалов [3], который можно назвать рядом Фурье – Чебышева. Кроме того, если получить решение в виде многочлена при некотором небольшом значении n и рассмотреть погрешность в виде этого ряда, то можно определить номер элемента, начиная с которого будет выполняться заданная точность для многочлена любой степени n.

В [1] искомая функция представлена как произведение $\Gamma(x)=\sqrt{1-x^2}\gamma(x)$. Тогда функция $\gamma(x)$ обладает теми же аналитическими свойствами, что и $\Gamma(x)$. Рассматриваем решение уравнения (1) в пространстве C с нормой $\|f\|=\max_{x\in[-1,1]}|f(x)|$. Используем в работе представление любой функции $f(x)$ в виде асимптотического многочлена $G_n^f(x)$ и остаточного члена $R_n(x)$, рассмотренное в [3]:

$$f(x)=G_n^f(x)+R_n(x)=G_n^f(x)+\sum_{r=n}^{\infty}M_r^f\chi_{r+2}^{(n)}(x),$$

где линейные функционалы функции $f(x)$

$$M_r^f=(2/(r+3))\sum_{k=1}^{r+2}(-1)^k f(x_k)(1-x_k^2),$$

а функции $\chi_{r+2}^{(n)}(x)$ выражаются через полиномы Чебышева второго рода, поэтому такое разложение можно назвать рядом Фурье – Чебышева.

Представим приближенное решение уравнения (1) в виде асимптотического многочлена, умноженного на $\sqrt{1-x^2}$:

$$\overline{\Gamma}_{n+1}(x)=\sqrt{1-x^2}G_n^{\overline{\gamma}}(x);$$

$$\Gamma(x)\approx\overline{\Gamma}_{n+1}(x)=\sqrt{1-x^2}G_n^{\overline{\gamma}}(x)=\sqrt{1-x^2}\sum_{m=0}^{n}a_m^{\overline{\gamma}}U_m(x); \qquad (2)$$

$$a_m^{\overline{\gamma}}=(2/(n+3))\sum_{k=1}^{n+2}\overline{\gamma}(x_k)\times(1-x_k^2)U_m(x_k),$$

где узлы, на которых строится многочлен, определяются по формулам:

$$x_k = \cos(k\pi/(n+3)),\ k = \overline{1, n+2}. \qquad (3)$$

Над $\overline{\Gamma}$ и $\overline{\gamma}$ ставятся черточки в знак того, что эти функции строятся на ординатах, вычисленных приближенно.

Для решения задачи (1) удобнее перейти от асимптотического многочлена (2) к соответствующему ему интерполяционному многочлену $\overline{G}^{\overline{\gamma}}_{n+1}(x)$ [3], здесь черта сверху означает интерполяционный многочлен, соответствующий асимптотическому $G^{\gamma}_{n}(x)$:

$$\overline{G}^{\overline{\gamma}}_{n+1}(x) = G^{\overline{\gamma}}_{n}(x) + M^{\gamma}_{nn}U_{n+1}(x);$$

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{1-x^2}\,\overline{G}^{\overline{\gamma}}_{n+1}(x) = \qquad (4)$$

$$= \sqrt{1-x^2}\,(G^{\overline{\gamma}}_{n}(x) + M^{\overline{\gamma}}_{nn}U_{n+1}(x)).$$

Асимптотический многочлен $G^{\gamma}_{n}(x)$ в $k = \overline{1, n+2}$ узлах (3) отклоняется от интерполяционного на величину линейного функционала M^{γ}_{nn}

$$\overline{G}^{\overline{\gamma}}_{n+1}(x_k) = G^{\overline{\gamma}}_{n}(x_k) + (-1)^k \nu M^{\overline{\gamma}}_{nn}, \qquad (5)$$

где $\nu = +1$ либо $\nu = -1$. В данном случае для простоты примем $\nu = +1$. Линейный функционал $M^{\overline{\gamma}}_{nn}$ вычисляется по формуле

$$M^{\overline{\gamma}}_{nn} = (2/(n+3))\sum\nolimits_{k=1}^{n+2}(-1)^k\,\overline{\gamma}(x_k)(1-x_k^2). \qquad (6)$$

Для функции, являющейся полиномом степени, меньшей или равной n, многочлен (4) будет точным решением. В дальнейшем будут использоваться обозначения:

$$\overline{\Gamma}(x_k) = \overline{\Gamma}_k;\ f(x_k) = f_k;\ B(x_k) = B_k;$$

$$\overline{\gamma}(x_k) = \overline{\gamma}_k \text{ и } \overline{\Gamma}_k = \sqrt{1-x_k^2}\,\overline{\gamma}_k.$$

Учитывая выражения (4)–(6), приближенное решение для $\gamma(x)$ будем отыскивать в виде (4), где

$$\overline{G}^{\overline{\gamma}}_{n+1}(x) = \sum\nolimits_{m=0}^{n} a^{\overline{\gamma}}_{m}U_m(x) + M^{\overline{\gamma}}_{nn}U_{n+1}(x). \qquad (7)$$

Уравнение (1) представим как операторное $F(x, \gamma(x)) = f(x)$. В [4] рассматривалось аналогичное применение асимптотических многочленов, построенных на полиномах Чебышева первого рода.

Первое слагаемое уравнения (1) приближенно представим следующим образом:

$$\Gamma(x)/B(x) \approx \overline{G}^{\Gamma B}_{n+1}(x) = \qquad (8)$$

$$= \sum\nolimits_{m=0}^{n} a^{\Gamma B}_{m}U_m(x) + M^{\Gamma B}_{nn}U_{n+1}(x);$$

$$a^{\Gamma B}_{m} = (2/(n+3))\sum\nolimits_{k=1}^{n+2}(\overline{\Gamma}_k/B_k)(1-x_k^2)U_m(x_k) =$$

$$= (2/(n+3))\sum\nolimits_{k=1}^{n+2}(\overline{\gamma}_k\sqrt{1-x_k^2}/B_k)(1-x_k^2)U_m(x_k);$$

$$M^{\Gamma B}_{nn} = (2/(n+3))\sum\nolimits_{k=1}^{n+2}(-1)^k(\overline{\Gamma}_k/B_k)(1-x_k^2) =$$

$$= (2/(n+3))\sum\nolimits_{k=1}^{n+2}(-1)^k(\overline{\gamma}_k\sqrt{1-x_k^2}/B_k)(1-x_k^2).$$

Если многочлен (4) представить через переменную θ, продифференцировать его по θ и использовать известные равенства (при $m = 0$ интегро-дифференциальный оператор равен нулю):

$$(1/\pi)\int_0^{\pi}\cos m\tau/(\cos\tau - \cos\theta)d\tau = \qquad (9)$$

$$= \sin m\theta/\sin\theta = U_{m-1}(x),\ m = 1,\ldots;\ \theta \in [0, \pi$$

то для второго слагаемого (1) получим выражение

$$(1/2\pi)\int_0^{\pi}\Gamma'(\tau)/(\cos\tau - \cos\theta)d\tau \approx (1/2\pi)\times$$

$$\times\int_0^{\pi}\left(\sqrt{1-x^2}\,\overline{G}^{\overline{\gamma}}_{n+1}(\tau)\right)'/(\cos\tau - \cos\theta)d\tau \approx$$

$$\approx (1/2)\Big(\sum\nolimits_{m=0}^{n} a^{\overline{\gamma}}_{m}(m+1)\sin(m+1)\theta/\sin\theta + \qquad (10)$$

$$+ M^{\overline{\gamma}}_{nn}(n+2)\sin(n+2)\theta/\sin\theta\Big) =$$

$$= (1/2)\left(\sum\nolimits_{m=0}^{n}(m+1)a^{\overline{\gamma}}_{m}U_m(x) + M^{\overline{\gamma}}_{nn}(n+2)U_{n+1}(x)\right).$$

Функцию $f(x)$ заменим интерполяционным многочленом вида (4)

$$f(x) \approx \overline{G}^{f}_{n+1}(x) = \sum\nolimits_{m=0}^{n} a^{f}_{m}U_m(x) + M^{f}_{n}U_{n+1}(x), \qquad (11)$$

где коэффициенты вычисляются по формулам:

$$a^{f}_{m} = (2/(n+3))\sum\nolimits_{k=1}^{n+2} f_k(1-x_k^2)U_m(x_k),\ m = \overline{0, n},$$

а линейный функционал

$$M^{f}_{n} = (2/(n+3))\sum\nolimits_{k=1}^{n+2}(-1)^k f_k(1-x_k^2).$$

Подставляя (7), (8), (10), (11) в уравнение (1), получим равенство для вычисления приближенного решения $\Gamma(x)\approx\sqrt{1-x^2}\,\overline{G}^{\gamma}_{n+1}(x)$

$$\overline{G}^{\Gamma B}_{n+1}(x)-(1/2\pi)\times \times\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2}\,\overline{G}^{\gamma}_{n+1}(t))'/(t-x)dt=\overline{G}^{f}_{n+1}(x), \quad (12)$$

или с учетом равенств (7)–(11) от уравнения (12) перейдем к уравнению

$$\left(\sum_{m=0}^{n}a_m^{\Gamma B}U_m(x)+M_{nn}^{\Gamma B}U_{n+1}(x)\right)-$$
$$-(1/2)\left(\sum_{m=0}^{n}(m+1)a_m^{\gamma}U_m(x)+M_{nn}^{\gamma}(n+2)U_{n+1}(x)\right)=$$
$$=\sum_{m=0}^{n}a_m^{f}U_m(x)+M_{nn}^{f}U_{n+1}(x). \quad (13)$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых полиномах $U_m(x)$ $(m=\overline{0,n+1})$ в левой и правой частях равенства (13), получим систему $(n+2)$ уравнений:

$$\begin{cases} a_m^{\Gamma B}+a_m^{\gamma}=a_m^{f}, \; m=\overline{0,n}; \\ M_{nn}^{\Gamma B}+M_{nn}^{\gamma}=M_n^{f}, \; m=n+1 \end{cases}$$

с $(n+2)$ неизвестными $\overline{\gamma}_k$, которые можно определить, подставив все выражения для коэффициентов $a_m^{\Gamma B}$, a_m^{γ} и a_m^{f}, а также соответствующие линейные функционалы $k=\overline{1,n+2}$:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n+2}\overline{\gamma}_k\left(\sqrt{1-x_k^2}/B_k-\dfrac{m+1}{2}\right)U_m(x_k)(1-x_k^2)= \\ \qquad =\sum_{k=1}^{n+2}f_kU_m(x_k)(1-x_k^2), \quad m=\overline{0,n}; \\ \sum_{k=1}^{n+2}(-1)^k\overline{\gamma}_k\left(\sqrt{1-x_k^2}/B_k-(1/2)(n+2)\right)\times \\ \qquad \times(1-x_k^2)=M_n^{f}, \quad m=n+1. \end{cases} \quad (14)$$

Существование решения системы (14) и его единственность следуют из общих теорем для проекционных методов, рассмотренных в [5], а также в [1] для метода Мультоппа. В [1] доказана ограниченность оператора, описывающего второе слагаемое уравнения (1), что дает возможность сделать вывод о сходимости метода последовательных приближений при решении рассматриваемой системы уравнений (14) от какого бы начального значения не исходили. Однако система уравнений (14) может быть решена и любым другим методом.

После вычисления приближенных ординат $\overline{\gamma}_k$ и линейного функционала M_{nn}^{γ} (6) приближенное решение окончательно может быть записано либо с помощью асимптотического (2), либо с помощью интерполяционного многочлена (4). Решение (2) отличается от решения (4) на слагаемое $\sqrt{1-x^2}M_{nn}^{\gamma}U_{n+1}(x)$. Рассмотрим, при каких условиях многочлен $\overline{G}^{\gamma}_{n+1}(x)$ будет стремиться к точному решению $\gamma(x)$ или $\sqrt{1-x^2}\,\overline{G}^{\gamma}_{n+1}(x)$ к $\Gamma(x)$.

Разность между выражениями (1) и (11) имеет вид

$$(\Gamma(x)/B(x)-(1/2\pi)\times \times\int_{-1}^{1}\Gamma'(t)/(t-x)dt-f(x))-(\overline{G}^{\Gamma B}_{n+1}(x)-(1/2\pi)\times \times\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2}\,\overline{G}^{\gamma}_{n+1}(t))'/(t-x)dt-\overline{G}^{f}_{n+1}(x))=0. \quad (15)$$

Представим ее следующим образом:

$$\Gamma(x)/B(x)-\overline{G}^{\Gamma B}_{n+1}(x)=1/(2\pi)\int_{-1}^{1}\Gamma'(t)/(t-x)dt-$$
$$-(1/2)\sum_{m=0}^{n+1}\overline{\gamma}_k(1-x_k^2)(m+1)U_m(x_k)U_m(x)+$$
$$+f(x)-\overline{G}^{f}_{n+1}(x).$$

Левую часть равенства преобразуем

$$\Gamma(x)/B(x)-\overline{G}^{\Gamma B}_{n+1}=$$
$$=\left(\Gamma(x)/B(x)-\sqrt{1-x^2}\,\overline{G}^{\gamma}_{n+1}(x)/B(x)\right)+$$
$$+\left(\sqrt{1-x^2}\,\overline{G}^{\gamma}_{n+1}(x)/B(x)-\sqrt{1-x^2}\gamma(x)/B(x)\right)+$$
$$+\left(\sqrt{1-x^2}\gamma(x)/B(x)-\overline{G}^{\Gamma B}_{n+1}(x)\right).$$

Тогда разность (15) можно переписать в виде

$$\left(\Gamma(x)-\sqrt{1-x^2}\,\overline{G}^{\gamma}_{n+1}(x)\right)/B(x)=$$
$$=\left(\sqrt{1-x^2}\gamma(x)-\sqrt{1-x^2}\,\overline{G}^{\gamma}_{n+1}(x)\right)/B(x)-$$
$$-\left(\sqrt{1-x^2}\gamma(x)/B(x)-\overline{G}^{\Gamma B}_{n+1}(x)\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\Gamma'(t)/(t-x)dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n+1}\bar{\gamma}_k(1-x_k^2)(m+1)U_m(x_k)U_m(x)\right)+$$

$$+\left(f(x)-\bar{G}_{n+1}^{f}(x)\right).$$

Умножим правую часть на функцию $B(x)$

$$\Gamma(x)-\sqrt{1-x^2}\,\bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x)=$$
$$=\left(\sqrt{1-x^2}\gamma(x)-\sqrt{1-x^2}\,\bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x)\right)+$$
$$+B(x)\left(-\left(\sqrt{1-x^2}\gamma(x)/B(x)-\bar{G}_{n+1}^{\Gamma B}(x)\right)+\right.$$
$$+\left(1/(2\pi)\int_{-1}^{1}\Gamma'(t)/(t-x)dt-\right.\tag{16}$$
$$\left.-(1/2)\sum_{m=0}^{n+1}\bar{\gamma}_k(1-x_k^2)(m+1)U_m(x_k)U_m(x)\right)+$$
$$\left.+\left(f(x)-\bar{G}_{n+1}^{f}(x)\right)\right)=R_{n+1}(x).$$

Кроме того, можно от разности между точным решением и интерполяционным многочленом (4)

$$\Gamma(x)-\sqrt{1-x^2}\,\bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x)=$$
$$=\Gamma(x)-\sqrt{1-x^2}\left(G_n^{\bar{\gamma}}(x)+M_{nn}^{\bar{\gamma}}U_{n+1}(x)\right)$$

перейти к разности между точным решением и асимптотическим многочленом (2)

$$\Gamma(x)-\sqrt{1-x^2}G_n^{\bar{\gamma}}(x)=\Gamma(x)-\sqrt{1-x^2}G_n^{\gamma}(x)=$$
$$=\sqrt{1-x^2}M_{nn}^{\bar{\gamma}}U_{n+1}(x)+R_{n+1}(x)=R_n(x).$$

Необходимо доказать сходимость приближенного решения $\sqrt{1-x^2}G_n^{\bar{\gamma}}(x)$ к точному $\Gamma(x)=\sqrt{1-x^2}\gamma(x)$.

Теорема. Пусть для уравнения (1) получено приближенное решение в виде многочлена $\sqrt{1-x^2}G_n^{\bar{\gamma}}(x)$ (2). Тогда для приближенного решения имеет место равномерная сходимость к точному решению $\Gamma(x)$ в том случае, когда функции $f(x)$ и $B(x)$ $(B(x)>0)$ имеют производные порядка *p*, а искомая функция – порядка $(p+1)$, принадлежащие классу $Lip\alpha$, если $p>2$, а $0<\alpha<1$.

Доказательство. Интерполяционный многочлен $\bar{G}_{n+1}^{\gamma}(x)$ будет являться точным решением для всех функций, которые являются многочленами степени $(<n)$. Предположим, что для функции $\gamma(x)$ существует полином наилучшего равномерного приближения $P_n(x)$ степени *n* с величиной наименьшего уклонения E_n^{γ}. Тогда представим разность между точным и приближенным решениями в виде

$$\sqrt{1-x^2}(\gamma(x)-\bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x))=\sqrt{1-x^2}\times$$
$$\times\left((\gamma(x)-P_n(x))+(P_n(x)-\bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x))\right).\tag{17}$$

Первое слагаемое правой части (17) равно

$$\sqrt{1-x^2}(\gamma(x)-P_n(x))=\sqrt{1-x^2}E_n^{\gamma}.$$

Для вычисления и оценки второго слагаемого полином наилучшего приближения представим в виде

$$P_n(x)=(2/(n+3))\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{n+2}P_n(x_k)(1-x_k^2)\sum_{m=0}^{n}U_m(x_k)U_m(x)$$

и составим разность

$$\sqrt{1-x^2}(P_n(x)-\bar{G}_{n+1}^{\bar{\gamma}}(x))=\sqrt{1-x^2}(P_n(x)-$$
$$-G_n^{\bar{\gamma}}(x)-M_{nn}^{\bar{\gamma}}U_{n+1}(x))=(2/(n+3))\times$$
$$\times\left(\sqrt{1-x^2}\sum_{k=1}^{n+2}(P_n(x_k)-\bar{\gamma}_k)\sum_{m=0}^{n}U_m(x_k)U_m(x)+\right.$$
$$+\sqrt{1-x^2}M_{nn}^{\bar{\gamma}}U_{n+1}(x)+B(x)\times$$
$$\times\left(-\sum_{k=1}^{n+2}(\sqrt{1-x_k^2}/B_k)(P_n(x_k)-\bar{\gamma}_k)(1-x_k^2)\times\right.$$
$$\times\sum_{m=0}^{n}U_m(x_k)U_m(x)+M_{nn}^{\bar{\Gamma}B}U_{n+1}(x)+(1/2)\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{n+2}(P_n(x_k)-\bar{\gamma}_k)(1-x_k^2)\sum_{m=0}^{n}U_m(x_k)(m+1)\times$$
$$\times U_m(x)+M_{nn}^{\bar{\gamma}}(n+2)U_{n+1}(x)/2+\sum_{k-1}^{n+2}(P_n(x_k)-f_k)\times$$
$$\left.\times(1-x_k^2)\sum_{m=0}^{n}U_m(x_k)U_m(x)+M_n^{f}U_{n+1}(x)\right).$$

Считаем, что функция $B(x)$ является непрерывной, поэтому имеет верхнюю $\bar{B}=\|B\|$ =

$= \max\limits_{x\in[-1,1]}|B(x)|$ и нижнюю $\underline{B} = \|1/B\| = \max\limits_{x\in[-1,1]}|1/B(x)|$ грани. Введем постоянную $C = 1+\overline{B}(\underline{B}+1)$. Норма полинома $\|U_m\| = m+1$. Она не улучшаема, так как в точках $x=-1$ и $x=1$ полином достигает значений $m+1$.

Учитывая, что выполняются неравенства $|P_n(x_k)-\overline{\gamma}_k| < E_n^\gamma$, $|P_n(x_k)-f_k| < E_n^\gamma$ и $M_{nn}^\gamma < E_n^\gamma$, $M_{nn}^{\Gamma B} < E_n^\gamma$, можно сделать оценку погрешности

$$\begin{gathered}\|P_n-\gamma\| < (2/(n+3))E_n^\gamma \times \\ \times\Big(C\sum\nolimits_{k=1}^{n+2}|1-x_k^2|\sum\nolimits_{m=0}^{n+1}|U_m(x_k)|\cdot\|U_m\| + \\ +(\overline{B}/2)\sum\nolimits_{k=1}^{n+2}|1-x_k^2|\sum\nolimits_{m=0}^{n+1}(m+1)|U_m(x_k)|\cdot\|U_m\|\Big).\end{gathered} \tag{18}$$

Если перейти от переменной x к переменной θ, то неравенство (18) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}\|P_n-\gamma\| < (2/(n+3))E_n^\gamma \times \\ \times\Big(C\sum\nolimits_{k=1}^{n+2}|\sin\theta_k|\sum\nolimits_{m=0}^{n+1}|\sin(m+1)\theta_k)|\times \\ \times\|\sin(m+1)\theta/\sin\theta\| + (\overline{B}/2)\sum\nolimits_{k-1}^{n+2}|\sin\theta_k|\times \\ \times\sum\nolimits_{m-0}^{n+1}(m+1)|\sin(m+1)\theta_k|\cdot\|\sin(m+1)\theta/\sin\theta\|\Big).\end{gathered}$$

Оценка сверху:

– для первого слагаемого

$$\begin{gathered}\sum\nolimits_{k=1}^{n+2}|\sin\theta_k|\sum\nolimits_{m=0}^{n+1}|\sin(m+1)\theta_k)|\times \\ \times\|\sin(m+1)\theta/\sin\theta\| < (n+2)^2(n+3)/2;\end{gathered}$$

– для второго

$$\begin{gathered}\sum\nolimits_{k-1}^{n+2}|\sin\theta_k|\sum\nolimits_{m=0}^{n+1}(m+1)|\sin(m+1)\theta_k|\times \\ \times\|\sin(m+1)\theta/\sin\theta\| < \\ < (n+2)\sum\nolimits_{m-0}^{n+1}(m+1)^2 \le (n+1)(n+2)^3/3.\end{gathered}$$

Таким образом, для неравенства (18) будет справедливо

$$\begin{gathered}\|P_n-\gamma\| < (2/(n+3))E_n^\gamma \times \\ \times\Big(C(n+2)^2(n+3)/2 + \overline{B}(n+1)(n+2)^3/3) < \\ < E_n^\gamma(C(n+2)^2 + (\overline{B}/3)(n+1)(n+2)^2).\end{gathered}$$

Здесь использовали известный результат суммирования $\sum\nolimits_{k-1}^{n}k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$. Тогда, возвращаясь к (16), можно сделать оценку

$$\begin{gathered}\|\Gamma-\sqrt{1-x^2}G_n^{\bar{\gamma}}\| < \|\gamma - G_n^{\bar{\gamma}}\| < E_n^\gamma + \\ +E_n^\gamma(C(n+2)^2 + (\overline{B}/3)(n+1)(n+2)^2)\end{gathered} \tag{19}$$

или

$$\|\gamma - G_n^\gamma\| < E_n^\gamma(C(n+2)^2 + (\overline{B}/3)(n+2)^3). \tag{20}$$

Оценка для равенства (17) будет следующей

$$\begin{gathered}\|\Gamma-\sqrt{1-x^2}G_n^\gamma\| < E_n^\gamma + E_n^\gamma(C(n+2)^2/2 + \\ +\overline{B}(n+2)^3/3).\end{gathered} \tag{21}$$

Если величина $E_n^\gamma < c^\gamma/n^{p+\alpha}$ [6], где постоянная c^γ зависит от функции $\gamma(x)$, $p>3$, $0<\alpha<1$, то для сходимости приближенного решения к точному необходимо, чтобы производная $p>3$ функции $\gamma(x)$ принадлежала классу $Lip\alpha$. Причем для первого слагаемого неравенства (20) достаточно, чтобы функции $B(x)$ и $f(x)$ имели производные порядка $p>2$, принадлежащие классу $Lip\alpha$. Теорема доказана.

Обозначим правую часть равенства (16) – остаточный член $R_{n+1}(x)$ – как сумму

$$R_{n+1}(x) = R_{n+1}^{(1)}(x) + R_{n+1}^{(2)}(x) + R_{n+1}^{(3)}(x) + R_{n+1}^{(4)}(x),$$

где

$$R_{n+1}^{(1)}(x) = \sqrt{1-x^2}\gamma(x) - \sqrt{1-x^2}\,\overline{G}_{n+1}^{\gamma}(x);$$

$$R_{n+1}^{(2)}(x) = B(x)\Big(\sqrt{1-x^2}\gamma(x)/B(x) - \overline{G}_{n+1}^{\Gamma B}(x)\Big);$$

$$\begin{gathered}R_{n+1}^{(3)}(x) = B(x)\Bigg(\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(t)}{t-x}dt - \\ -\frac{1}{2}\sum\nolimits_{m=0}^{n+1}\overline{\gamma}_k(1-x_k^2)(m+1)U_m(x_k)U_m(x)\Bigg);\end{gathered}$$

$$R_{n+1}^{(4)}(x) = B(x)\Big(f(x) - \overline{G}_{n+1}^{f}(x)\Big).$$

Каждое из слагаемых можно представить в виде бесконечной суммы, выраженной через соответствующие линейные функционалы и функции $\chi_{r+2}^{(n)}(x)$, $r = n, \ldots, \infty$, способ вычисления которых через полиномы Чебышева второго рода приведен в [3]. К этим функциям при вычислении третьего слагаемого (16) применяется преобразование (9). Введем обозначение

$$\overline{\chi}_{r+2}^{(n)}(x) = (1/\pi)\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\chi_{r+2}^{(n)}(t)\right)' dt/(t-x).$$

Для остаточных членов соответственно получим:

$$R_{n+1}^{(1)}(x) = \sqrt{1-x^2}\gamma(x) - \sqrt{1-x^2}\,\overline{G}_{n+1}^{\gamma}(x) = \\ = \sqrt{1-x^2}\sum_{r=n+1}^{\infty} M_{nr}^{\gamma}\chi_{r+2}^{(n)}(x)$$

или

$$R_{n+1}^{(1)}(x) = \sqrt{1-x^2}\gamma(x) - \\ -\sqrt{1-x^2}\,(G_{n+1}^{\gamma}(x) - M_{nn}^{\overline{\gamma}}U_{n+1}(x)) \Rightarrow \\ \Rightarrow R_n^{(1)}(x) = \sqrt{1-x^2}M_{nn}^{\overline{\gamma}}U_{n+1}(x) + R_{n+1}^{(1)}(x) = \\ = \sqrt{1-x^2}\sum_{r=n}^{\infty} M_{nr}^{\gamma}\chi_{r+2}^{(n)}(x). \quad (22)$$

Слагаемые с линейными функционалами можно включить в остаточные члены, которые таким образом приобретут еще по одному слагаемому, и суммы будут изменяться не от $(n+1)$, а от n, то есть

$$R_n^{(1)}(x) = \sqrt{1-x^2}\gamma(x) - \sqrt{1-x^2}G_n^{\overline{\gamma}}(x) = \\ = \sqrt{1-x^2}\sum_{r=n}^{\infty} M_{nr}^{\overline{\gamma}}\chi_{r+2}^{(n)}(x),$$

аналогично для всех остальных $R_{n+1}^{(i)}(x)$, $i = 2, 3, 4$:

$$R_n^{(2)}(x) = B(x)M_{nn}^{\overline{\Gamma}B}U_{n+1}(x) + R_{n+1}^{(2)}(x) = \\ = B(x)\sum_{r=n}^{\infty} M_{n}^{\overline{\Gamma}B}\chi_{r+2}^{(n)}(x);$$

$$R_n^{(3)}(x) = \Big(B(x)M_{nn}^{\overline{\gamma}}(n+1)U_{n+1}(x) + \\ +B(x)\sum_{r=n+1}^{\infty} M_{nr}^{\overline{\gamma}}\overline{\chi}_{r+2}^{(n)}(x)\Big)/2 = \\ = (B(x)/2)\sum_{r=n}^{\infty} M_{nr}^{\overline{\gamma}}\overline{\chi}_{r+2}^{(n)}(x);$$

$$R_n^{(4)}(x) = B(x)M_n^{f}U_{n+1}(x) + R_{n+1}^{(4)}(x) = \\ = B(x)\sum_{r=n}^{\infty} M_r^{f}\chi_{r+2}^{(n)}(x).$$

Следовательно, окончательно остаточный член примет вид:

$$R_n(x) = \sum_{r=n}^{\infty}\Big(-M_{nr}^{\gamma}\sqrt{1-x^2} + B(x)(M_{nr}^{\overline{\Gamma}B} + M_r^{f})\Big) \times \\ \times\chi_{r+2}^{(n)}(x) + B(x)M_{nr}^{\overline{\gamma}}\overline{\chi}_{r+2}^{(n)}(x)\Big). \quad (23)$$

Для того чтобы производная приближенного решения наибольшего третьего порядка $\left(G_n^{\gamma}(x)\right)''' \in Lip\alpha$, необходимо, чтобы многочлен $\left(G_n^{\gamma}(x)\right)'''$ имел кривизну, отличную от нуля, следовательно, был бы не менее второго порядка. Тогда многочлен $G_n^{\gamma}(x)$ будет иметь степень пятого порядка. Он основан на семи ординатах – $\overline{\gamma}_k$, $k = \overline{1,7}$, для определения которых необходимо решить систему уравнений (14) седьмого порядка. Таким образом, наименьшая степень асимптотического многочлена, являющегося приближенным решением уравнения (1), не может быть меньше пятой.

Для слагаемых $R_n^{(1)}(x)$, $R_n^{(2)}(x)$ и $R_n^{(4)}(x)$ рассмотрено стремление к нулю при $n \to \infty$ в [3], для всех функций, у которых производная порядка $p > 2$ принадлежит классу $Lip\alpha$. Функции $\chi_{r+2}^{(n)}(x)$ выражаются через полиномы Чебышева второго рода

$$\chi_{r+2}^{(n)}(x) = \sum_{m=n(2)}^{\infty} k_{rm}h_{m+2}^{(n)}(x),$$

где k_{rm} – элементы $(k+2)$ строки матрицы K

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix};$$

$$h_{m+2}^{(n)}(x) = \\ = \begin{cases} U_{m+1}(x), \text{ если } m+2 = \begin{cases} (2\lambda+1)(n+3); \\ 2\lambda(n+3); \\ (2\lambda(n+3) \pm (n+2); \end{cases} \\ U_{m+1}(x) \pm U_{h-1}(x), \text{ если } m+2 = 2\lambda(n+3) \pm h; \\ \qquad 1 < h < n+1. \end{cases}$$

Следует учесть, исходя из вида матрицы K, что номера r и m одинаковой четности, и для нечетных номеров сумма (16) вычисляется только для слагаемых с нечетными номерами, а для четных – лишь для слагаемых с четными номерами m, и номер m меняется через две единицы. Элементы матрицы K вычисляются через функцию Мебиуса, что более подробно приведено в [3]. Функции $\overline{\chi}^{(n)}_{r+2}(x)$ с учетом формул (9) и (24) принимают вид

$$\overline{\chi}^{(n)}_{r+2}(x) = \frac{1}{2\pi}\sum\nolimits_{m=n(2)}^{r+2} K_{r+2}\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-t^2}\times$$

$$\times h^{(n)}_{m+2}(t))'dt/(t-x) = \frac{1}{2}\sum\nolimits_{m=n(2)}^{r+2} K_{r+2}\overline{h}^{(n)}_{m+2}(x),$$

где

$$\overline{h}^{(n)}_{m+2}(x) = (1/\pi)\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-t^2}h^{(n)}_{m+2}(t))'dt/(t-x).$$

Оценки сверху для функций в общем случае будут такими

$$\| h^{(n)}_{m+2} \| < |\sin(m+3)\theta/\sin\theta| + |\sin(m+1)\theta/\sin\theta| <$$

$$< (m+3)+(m+1) = 2(m+2),$$

тогда для

$$\| \overline{\chi}^{(n)}_{r+2} \| \le \sum\nolimits_{m=n}^{\infty} K_{r+2}\| h^{(n)}_{m+2} \| 2(m+2) <$$

$$\le \sum\nolimits_{m=n}^{\infty} K_{r+2}2(m+2)^2.$$

Учитывая равенство $\sum\nolimits_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)\times$ $\times(2n+1)/6$ и то, что коэффициенты K_{r+2} можно оценить сверху величиной $\zeta(r+3)$, которая обозначает число делителей d_j целого числа $(r+3)$, больших либо равных $(n+3)$ и допускающих представление $r+3=(2s_j+1)d_j$. Для этой функции справедлива оценка [7] – $\zeta(r+3)/r^{\varepsilon/2} < c_1$, где c_1 – постоянная, а $\varepsilon > 0$ – некоторая бесконечно малая величина

$$\| \overline{\chi}^{(n)}_{r+2} \| \le 2c_1\sum\nolimits_{m=0}^{r+2}(r+3)^2 < 2c_1(r+3)^3\zeta(r+3)/3.$$

В предположении, что существует полином наилучшего равномерного приближения $P_n(x)$ степени n для функции

$$\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2}\gamma(x) \approx \sqrt{1-x^2}P_n(x),$$

с величиной наибольшего уклонения E^{γ}_n, выполняются условия [3]:

$$M^{\overline{\gamma}}_n < E^{\gamma}_n \text{ и } M^f_n < E^{\gamma}_n,\ \ E^{\gamma}_n < c/n^{p+1+\alpha+\varepsilon/2}. \quad (25)$$

Откуда можно сделать вывод, что при выполнении неравенства (25), где $0<\alpha<1$, $p>3$ и $\varepsilon>0$ – любая бесконечно малая, будет иметь место равномерная сходимость ряда (23) приближенного решения $\sqrt{1-x^2}G^{\overline{\gamma}}_n(x)$ к точному $\Gamma(x)$, так как будет выполняться условие

$$\| \Gamma - \sqrt{1-x^2}G^{\gamma}_n \| < \| \gamma - G^{\gamma}_n \| <$$

$$< \overline{B}E^{\Gamma}_{n+1}c/(n+1)^{p+3+\alpha+\varepsilon/2} = \overline{B}c_2/(n+1)^{\alpha}.$$

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 2. Если линейные функционалы M^{γ}_{nr} и M^f_r удовлетворяют условию (25), то остаточный член ряда (23) стремится к нулю во всех случаях, когда функции $f(x)$ и $B(x)$ имеют производные порядка p, а функция $\gamma(x)$ – производную порядка $(p+1)$, принадлежащие классу $Lip\alpha$, если $p>2$, $0<\alpha<1$, $\varepsilon>0$ – любая бесконечно малая, и функция $B(x)$ на рассматриваемом промежутке не обращается в нуль.

Следует отметить, если $f(x)$ и $B(x)$ четные функции, то ввиду симметрии искомой функции система уравнений (14) будет иметь порядок вдвое меньший, чем в общем случае, и все четные линейные функционалы будут равны нулю. Что существенно облегчает решение.

Рассмотрим более подробно приближенное решение при $n=5$ в самом общем случае. После определения приближенного решения в виде (2) можно записать равенство

$$\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2}\gamma(x) = \sqrt{1-x^2}G^{\overline{\gamma}}_5 + R_5(x),$$

где

$$R_5(x) = R^{(1)}_5(x) + R^{(2)}_5(x) + R^{(3)}_5(x) + R^{(4)}_5(x),$$

то есть

$$\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2}G^{\overline{\gamma}}_5(x) + \sqrt{1-x^2}\sum\nolimits_{r=5}^{\infty} M^{\overline{\gamma}}_{5r}\chi^{(5)}_{r+2}(x) +$$

$$+B(x)\Big(-\sum\nolimits_{r=5}^{\infty} M^{\overline{\Gamma}B}_{5r}\chi^{(5)}_{r+2}(x) +$$

$$+(1/2)\sum\nolimits_{r=5}^{\infty} M^{\overline{\gamma}}_{5r}\overline{\chi}^{(5)}_{r+2}(x) + \sum\nolimits_{r=5}^{\infty} M^f_r\chi^{(5)}_{r+2}(x)\Big) = \quad (26)$$

$$= \sqrt{1-x^2} G_5^{\overline{\gamma}}(x) + \sum_{r=n}^{\infty} \Big(-M_{5r}^{\gamma} \sqrt{1-x^2} +$$

$$+ B(x)(M_{5r}^{\Gamma B} + M_r^f)\chi_{r+2}^{(5)}(x) + M_{5r}^{\overline{\gamma}} \overline{\chi}_{r+2}^{(5)}(x) \Big).$$

Для n = 5 функции $h_{m+2}^{(5)}(x)$ соответственно $\chi_{r+2}^{(5)}(x)$ и $\overline{\chi}_{r+2}^{(5)}(x)$ будут иметь вид:

$$h_7^{(5)}(x) = U_6(x),\ \ h_9^{(5)}(x) = U_8(x),$$

$$h_{11}^{(5)}(x) = U_{10}(x),\ \ h_{13}^{(5)}(x) = U_{12}(x) - U_2(x),$$

$$h_{15}^{(5)}(x) = U_{14}(x) - U_0,\ \ h_{17}^{(5)}(x) = U_{16}(x) + U_0,$$

$$h_{19}^{(5)}(x) = U_{18}(x) + U_2(x),\ \ h_{21}^{(5)}(x) = U_{20}(x) + U_4(x),$$

$$h_{23}^{(5)}(x) = U_{22}(x) \text{ и т. д.;}$$

$$\chi_7^{(5)}(x) = h_7^{(5)}(x) = U_6(x),$$
$$\chi_9^{(5)}(x) = h_9^{(5)}(x) + h_{11}^{(5)}(x) = U_{10}(x) + U_8(x),$$

$$\chi_{11}^{(5)}(x) = h_{11}^{(5)}(x) + h_{13}^{(5)}(x) + h_{15}^{(5)}(x) =$$
$$= U_{14}(x) + U_{12}(x) + U_{10}(x) - U_2(x) - U_0,$$

$$\chi_{13}^{(5)}(x) = h_{13}^{(5)}(x) + h_{15}^{(5)}(x) + h_{17}^{(5)}(x) + h_{19}^{(5)}(x) =$$
$$= U_{18}(x) + U_{16}(x) + U_{14}(x) + U_{12}(x),$$

$$\chi_{15}^{(5)}(x) = h_{15}^{(5)}(x) + h_{17}^{(5)}(x) + h_{19}^{(5)}(x) + h_{21}^{(5)}(x) +$$
$$+ h_{23}^{(5)}(x) = U_{22}(x) + U_{20}(x) + U_{18}(x) +$$
$$+ U_{16}(x) + U_{14}(x) + U_4(x) \text{ и т. д.;}$$

$$\overline{\chi}_7^{(5)}(x) = 7U_6(x),\ \ \overline{\chi}_9^{(5)}(x) = 11U_{10}(x) + 9U_8(x),$$

$$\overline{\chi}_{11}^{(5)}(x) = 15U_{14}(x) + 13U_{12}(x) + 10U_{10}(x) - 2U_2(x),$$

$$\overline{\chi}_{13}^{(5)}(x) = 19U_{18}(x) + 17U_{16}(x) + 15U_{14}(x) + 13U_{12}(x),$$

$$\overline{\chi}_{15}^{(5)}(x) = 23U_{22}(x) + 21U_{20}(x) + 19U_{18}(x) +$$
$$+ 17U_{16}(x) + 15U_{14}(x) + 5U_4(x) \text{ и т. д.}$$

Пусть решение уравнения (1) на основе ряда (23) представлено в виде суммы

$$\Gamma(x) = \sqrt{1-x^2} G_5^{\overline{\gamma}}(x) + R_5(x).$$

Далее можно действовать следующим образом.

1. Вычислить многочлен (2) $G_5^{\overline{\gamma}}(x)$, определив ординаты приближенного решения из системы уравнений (14).

2. Вычислить определенное количество слагаемых остаточного члена $R_5(x)$ (26). По ним установить степень n многочлена $G_n^{\gamma}(x)$, для которого необходимая точность будет удовлетворяться.

3. Вычислить многочлен найденной степени, снова решив систему уравнений (14) $(n+2)$-го порядка.

4. Уточнить оценку погрешности, определив некоторое число слагаемых нового остаточного члена (23), для чего вычислить новые последовательности $\{M_m^{\Gamma B}\}_{r=n,\,n+1,...}$, $\{M_r^f\}_{r=n,\,n+1,...}$, $\{M_{nr}^{\gamma}\}_{r=n,\,n+1,...}$ и соответствующие функции $\chi_{r+2}^{(n)}(x)$, $\overline{\chi}_{r+2}^{(n)}(x)$. Поскольку эти функции основаны на полиномах Чебышева второго рода, то оценка сверху для них не представляет затруднений.

ВЫВОД

Предлагаемый для решения уравнения теории крыла метод асимптотических полиномов является эффективным и простым при составлении алгоритма для реализации его с помощью вычислительной техники.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Каландия, А. И.** Математические методы теории упругости / А. И. Каландия. – М.: Наука, 1973.
2. **Ермолаева, Л. Б.** Решение одного интегро-дифференциального уравнения / Л. Б. Ермолаева // Сб. тр. XXIII Междунар. науч. конф. ММТТ-23. – Т. 1. – 2010. – С. 68–71.
3. **Грибкова, В. П.** Равномерные приближения, основанные на полиномах Чебышева / В. П. Грибкова, С. М. Козлов // Сб. тр. XXIII Междунар. науч. конф. ММТТ-24. – Т. 1. – 2011. – С. 31–36.
4. **Грибкова, В. П.** Решение операторных уравнений одним из приближенных методов / В. П. Грибкова // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1970. – № 6. – С. 68–76.
5. **Габдулхаев, Б. Г.** Оптимальные аппроксимации решений линейных задач / Б. Г. Габдулхаев. – Казань: КГУ, 1980.
6. **Натансон, И. П.** Конструктивная теория функций / И. П. Натансон. – М.; Л.: ГТТЛ, 1949.
7. **Этерман, И. И.** К вопросу восстановления функции по некоторой характеристической последовательности / И. И. Этерман // Известия вузов. – 1966. – № 2. – С. 148–157.

Поступила 02.05.2012