

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

**ИННОВАЦИОННАЯ ПОДГОТОВКА
ИНЖЕНЕРНЫХ КАДРОВ НА ОСНОВЕ ЕВРОПЕЙСКИХ
СТАНДАРТОВ (ЕВРОКОДОВ)**

(г. Минск, БНТУ – 30.05.2017)

УДК 624.04

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПОИСКА РАВНОНАПРЯЖЕННЫХ
И ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ**

БОРИСЕВИЧ А. А.

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

Постановки задач оптимизации объектов строительства и поиски методов их решения непосредственно связаны с историей развития методов расчета строительных конструкций и систем. Наряду с необходимостью решения задач проверочного расчета конструкций, в которых идеи оптимального проектирования присутствуют неявно, находятся на втором плане, естественно проявлялся интерес к направленному поиску конструкций, обладающих необходимой прочностью, но имеющих минимальную массу, конструкций и систем минимальной стоимости, систем с ограниченными в заданных интервалах физическими характеристиками и т. д.

История развития методов поиска оптимальных конструкций, как свидетельствуют литературные источники, связана с поисками равнопрочных конструкций.

В 1638 г. в книге Г. Галилея было опубликовано решение задачи о балке равного сопротивления. Позже исследованиями формы балок равного сопротивления с помощью дифференциального исчисления занимались швейцарские ученые – представители семьи Бернулли. В 1733 г. Д. Бернулли положил начало решению задачи

проектирования однопролетной балки равного сопротивления с учетом собственного веса. Эти исследования продолжил английский физик Т. Юнг и результаты опубликовал в 1807 г. в двухтомном труде «Курс лекций по натуральной философии и механическому искусству». (Здесь же им была введена числовая характеристика упругости, известная как модуль Юнга).

В 1833 г. А. Мореном были выполнены первые исследования ферм равного сопротивления. Впоследствии теоремы о фермах равного сопротивления были сформулированы М. Леви (1873 г.), Д. Максвеллом (1890 г.) и Д. Мичеллом (1904 г.).

В 1855 г. французский ученый в области механики Б. Сен-Венан решил задачу о равнопрочности призматических брусьев, работающих на изгиб с кручением.

Интерес к задачам о равнонапряженных конструкциях способствовал развитию методов поиска их. На идее равнопрочности основных элементов конструкций Пиппардом в 1922 г. был предложен метод проектирования статически неопределимых систем, а в 1933 г. И.М. Рабиновичем метод заданных напряжений.

Исходя из условий реального проектирования, во многих случаях под равнонапряженностью понимается равенство напряжений в некоторых точках расчетных сечений элементов системы. Такое определение существенно расширяет класс равнонапряженных систем.

В дальнейших исследованиях понятие о лучшей, рациональной системе связывается не только с критерием равнонапряженности, но и с критериями равноустойчивости элементов системы, равенства перемещений узлов системы, условием постоянства удельной энергии упругой деформации системы (З. Васютинский, 1960 г.) и другими эвристическими критериями.

Появились предложения о предпочтительном распределении толщин упругих симметричных оболочечных конструкций из условий равенства напряжений в отдельных точках (Бех Л.П., Елин В.Д., Ганоева М.С., Косолапова Л.А., Малков В.П. и др.). Иные постановки и решения задач о поиске рациональных оболочек содержатся в работах Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С., Юрьев А.Г., Мартыненко М.Д., Ширко И.В., Хуберяна К.М. и др.

Методики оптимизации, естественно, базируются на существующих методах расчета систем.

Решаются задачи проектирования круглой пластинки, в каждой точке поверхности которой выполняется условие Мизеса (Григорьев А.С.).

В качестве условия оптимальности упругой пластинки Муштары Х.М. (1964, 1967 гг.) принимает равенство максимальных значений кривизн пластинок переменной и постоянной толщин и для частных случаев нагружения получает выражения жесткости прямоугольной и круглой пластинок переменной толщины.

К 70-м годам прошлого столетия наблюдается повышенное внимание исследователей к проблемам оптимизации конструкций во многих странах: Австралии, Бельгии, Великобритании, Германии, Дании, Индии, Италии, Канаде, Норвегии, Польше, СССР, США, Японии и др.

Первоначально основные усилия ученых были направлены на применение к оптимизации конструкций различных математических методов: линейного и нелинейного программирования, теории оптимального управления, теории игр, теории графов, динамического программирования, геометрического программирования, методов случайного поиска. Опыт решения практических задач показал необходимость разработки новых эффективных методов, учитывающих реальные особенности областей допустимых решений.

В развитие теории оптимального проектирования существенный вклад внесли ученые Н.В. Баничук, В.П. Валуйских, А.И. Виноградов, Е.Н. Герасимов, В.Н. Гордеев, В.А. Комаров, Л.И. Коршун, И.Б. Лазарев, В.П. Малков, Д.А. Мацюлявичюс, И. И. Овчинников, Ю.А. Радциг, Ю.М. Почтман, В.В. Трофимович, А.П. Чижас, А.А. Чирас, а также Я. Арора, Л. Берке, М. Бхатти, Г. Вандерплаац, З. Васютински, У. Кирш, Н.С. Кот, Р. Нельсон, В. Прагер, В. Разани, Г. Реклейгис, Д. Рожваны, К. Свенберг, К. Флери, Р. Фокс, Э. Хог, Н. Хот, Л. Шмит и другие.

Приведенный краткий обзор, разумеется, не является исчерпывающим и ограничивается, в основном, рассмотрением работ, известных автору из научной литературы, имеющейся в библиотеках Беларуси и России. Однако и он позволяет представить сложный путь развития методов поиска оптимальных конструкций.

Стремление проектировщиков к получению равнонапряженных систем является вполне естественным. С практической точки зрения равнонапряженными называют такие системы, у которых

нормальные напряжения в расчетных сечениях стержней равны. Алгоритм решения таких задач для статически неопределимых систем не простой.

Задачи о получении равнонапряженных систем наиболее характерны для ферм, хотя могут рассматриваться и другие, не обязательно стержневые. Изложенный в одном из известных источников способ поиска расчетных схем ферм с заданными напряжениями имеет существенные погрешности.

Для статически неопределимой фермы с одной неизвестной можно организовать вычислительный процесс по расчету ее на заданную нагрузку таким образом, что в одном из ее стержней напряжение будет равно заранее заданному значению (в разумных пределах). Операция эта основана на классических методах строительной механики. При заданных жесткостях всех остальных стержней жесткость стержня с заданным напряжением будет изменена. Зафиксировав значение жесткости в этом стержне, далее следует перейти к расчету, позволяющему найти такие жесткости стержней системы, при которых в другом стержне напряжения будут равны требуемому значению. Однако надо иметь в виду, что поскольку жесткости стержней по отношению к предыдущему соотношению их изменяются, то и полученные ранее напряжения в них тоже изменятся.

Рассмотрим следующий тестовый пример. Для показанной на рис. 1 расчетной схемы принята следующая исходная информация: $E = 200\,000$ МПа, $R = 200$ МПа, вектор нагрузки $F^1 = [10; -20; 0; 0]^T$.

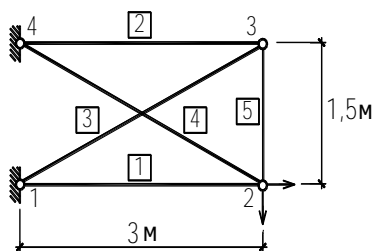


Рис. 1. Расчетная схема

Ограничиваясь только условиями прочности и не учитывая в расчете коэффициентов продольного изгиба, условий работы и др., найдем, что вектор площадей сечений стержней в состоянии близком к равнонапряженному будет следующим:

$$[0.000145569, 4.98083 \cdot 10^{-6}, 6.9873 \cdot 10^{-6}, \\ 0.000218038, 2.49042 \cdot 10^{-6}]^T, \text{ м}^2,$$

а соответствующие ему нормальные напряжения в стержнях фермы будут равны:

$$[-199245, 200000, -159396, 200000, 200000]^T, \text{ кН/м}^2.$$

Увеличив точность вычислений, напряжение и в первом стержне можно довести до расчетного значения. Попытки улучшить полученный результат окажутся безуспешными. Объем материала на изготовление стержней составит $12.1014 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$.

Заметим, что в полученном решении перемещение узла 2 по вертикали равно $-0,0134773 \text{ м}$. Пропорционально увеличивая жесткости стержней, уменьшим напряжения в них и перемещение узла 2 до необходимого значения.

Приведенный пример расчета надо рассматривать как демонстрационный. Учет в вычислительном процессе коэффициентов условий работы и др. совершенно не изменяет базовый алгоритм расчета. Осуществить поиск систем, близких к равнонапряженным, можно и для более сложных систем, систем многократно статически неопределимых.

В задачах оптимизации имеется возможность учета множества разнообразных ограничений, накладываемых на систему. Рассмотрим далее возможный численно-аналитический способ решения задачи оптимизации той же расчетной схемы фермы.

Принимая жесткости стержней 1–2 и 3–4 равными EA_1 , а остальных – EA_2 , найдем выражение для определения перемещения узла 2 по вертикали:

$$Z_2^{BEPT} = 174,883/EA_2 - (-1.18287 \cdot 10^{17} EA_1 - 8.19862 \cdot 10^{16} EA_2) / \\ (1.33003 \cdot 10^{15} EA_{12} + 9.10957 \cdot 10^{14} EA_1 EA_2 + 1. EA_{22}).$$

Контурный график (график равных высот) перемещения Z_2^{BEPT} показан на рис. 2.

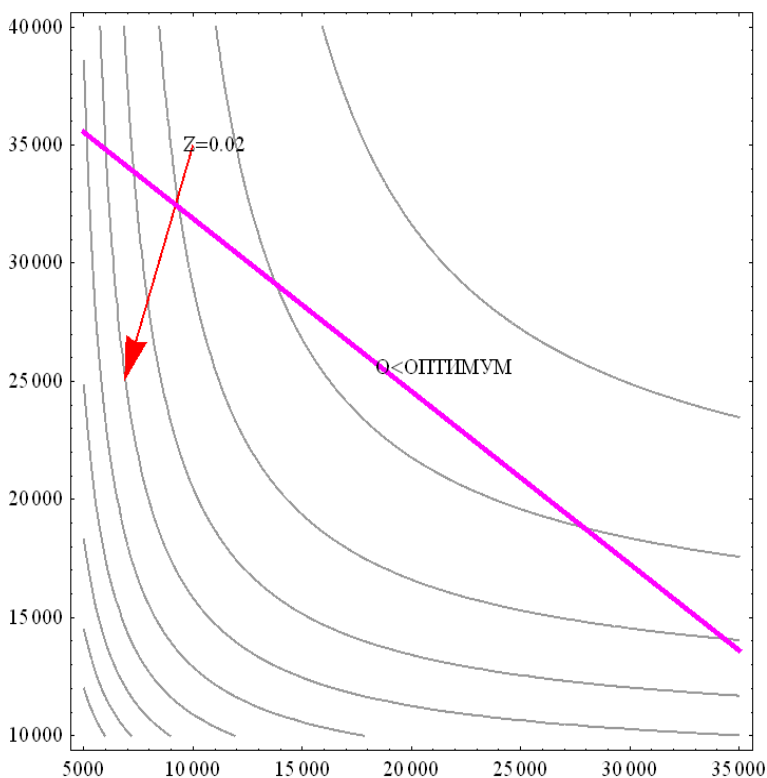


Рис. 2. График равных высот

Предположим, что перемещение узла, равное $Z_2^{BEPT} = 0,02\text{ м}$ (на рис. 2 соответствующая кривая отмечена), будет в этой задаче активным. Для активного ограничения Z_2^{BEPT} функциональная зависимость между жесткостями EA_1 и EA_2 описывается линией пересечения поверхности $Z_2^{BEPT} = f(EA_1, EA_2)$ и плоскости $Z_2^{BEPT} = 0,02\text{ м}$ (рис. 3).

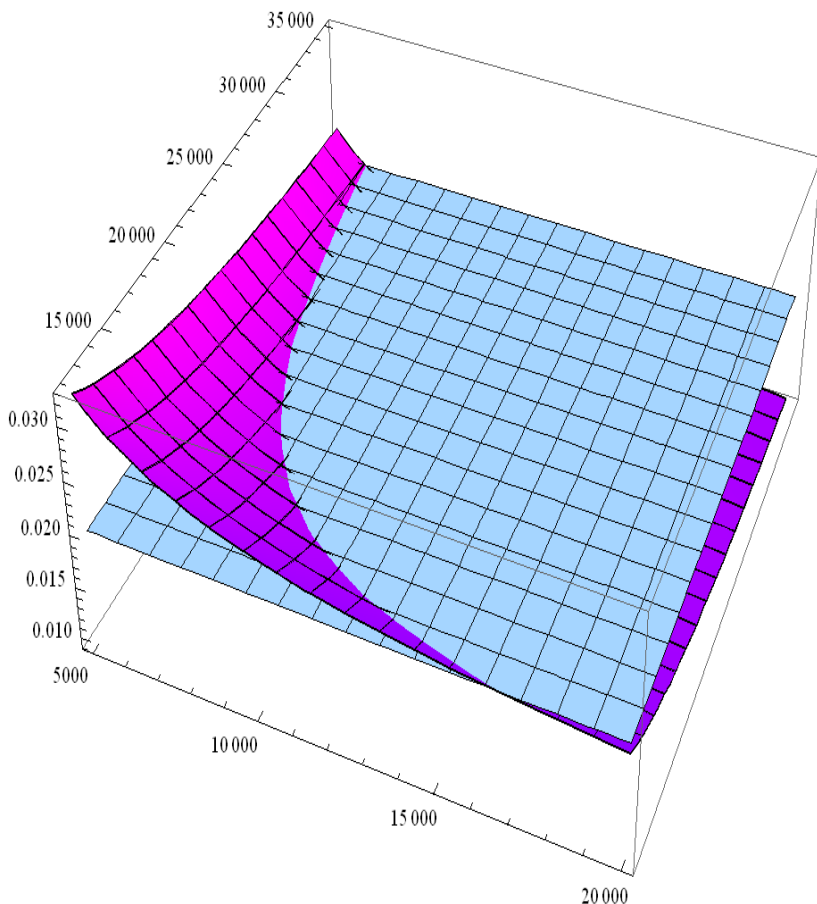


Рис. 3. Функциональная зависимость между жесткостями

Для определения оптимальных значений жесткостей элементов (оптимальных значений площадей сечений, если материал для всех стержней один и тот же), в соответствии с физическим смыслом задачи оптимизации, можно записать систему из двух уравнений. Одним из них фиксируется максимальное перемещение Z_2^{BEPT} узла, предполагая, что это ограничение в оптимальном проекте наиболее активно. Второе уравнение – это уравнение прямой, соответствующей градиенту целевой функции $V = 6 \cdot A_1 + 8,2082 \cdot A_2$ (в этом примере

$$k_1 = dEA_2 / dEA_1 = -0.73098,$$

следовательно $k_2 = -1 / k_1 = 1.36803$). Решив систему, получим: $EA_1 = 10864$ кН, $EA_2 = 14863$ кН. Площади сечений равны: $A_1 = 5,432 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$, $A_2 = 7,4315 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$. Однако максимальное напряжение в некоторых стержнях фермы при этих площадях превышает расчетное.

Можно утверждать, что для систем с унифицированными (по площади сечений) стержнями такие особенности будут наблюдаться часто. При заданных малых значениях перемещений узлов (эти ограничения являются активными) показанный способ расчета, ориентированный на учет только ограничений по перемещениям, будет приводить к невыполнению условий прочности.

Если отслеживать ограничения по прочности, то надо иметь в виду следующее. Рассматриваемая расчетная схема фермы, при условии разделения жесткостей сечений стержней на две группы, имеет особенность: при одном и том же соотношении жесткостей усилия в системе остаются неизменными. Контурный график функции N_4 показан на рис. 4. Усилие N_4 изменяется в интервале $23,5 < N_4 < 27,8$ (с точностью до 0,1). Подтверждением этому является график изменения напряжения в 4-м, наиболее напряженном стержне (рис. 5). На этом графике значения EA_1 изменяются в интервале $[5000 \dots 20\ 000]$, $EA_2 - [12\ 000 \dots 25\ 000]$. Горизонтальная плоскость соответствует напряжению $\sigma_{2-4} = 2 \cdot 10^5$ кН/м².

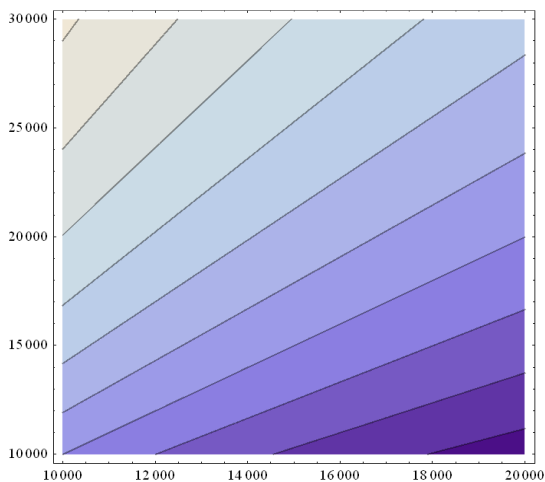


Рис. 4. Контурный график функции N_4

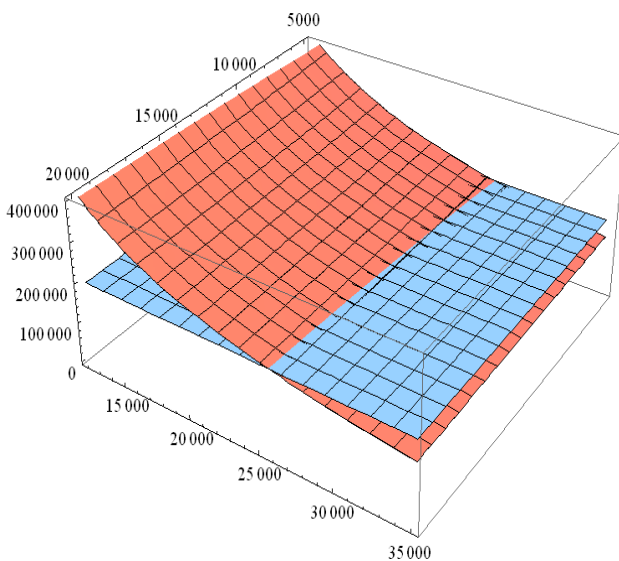


Рис. 5. График изменения напряжения в 4-м стержне

Принимая $dA_2 / dA_1 = 1,36803$ (угловой коэффициент прямой, соответствующий градиенту целевой функции) и напряжение в 4-м

стержне равным расчетному сопротивлению $R = 2 \cdot 10^5 \text{ кН/м}^2$, получим из решения системы уравнений значения жесткостей стержней: $EA_1 = 18\,683 \text{ кН}$, $EA_2 = 25\,559 \text{ кН}$.

Соответствующие площади сечений равны: $A_1 = 9,3415 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$, $A_2 = 12,7795 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$. Объем материала $V = 16,0946 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$. При этих значениях перемещение узла 4 по вертикали равно $0,012855 \text{ м}$. Напряжения в стержнях будут равны или меньше расчетных значений.

Рассмотрим особенности поиска оптимального проекта рассматриваемой системы в случае трех переменных. В первую группу включим стержни 1–2 и –4, во вторую – стержни 1–3 и 2–4, в третью – стержень 2–4. Направляющим вектором гиперплоскости, которой в рассматриваемом примере является плоскость, порождаемая функцией цели, является вектор $\vec{V} = [6,0; 6,7082; 1,5]^T$. Найдя выражения для определения перемещений узлов и усилий в стержнях, перейдем к определению оптимальных параметров исследуемой системы. Если ограничение на прочность по одному из стержней, например стержню 4, будет активным, то из решения системы трех уравнений (два других определяют направления градиента (или антиградиента) целевой функции) найдем площади сечений стержней и соответствующие им жесткости:

$$A_1 = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, A_2 = 1,3416 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, A_3 = 0,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \\ EA_1 = 24000 \text{ кН}, EA_2 = 26832 \text{ кН}, EA_3 = 6000 \text{ кН}.$$

Объем материала $V = 16,6497 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$.

Напряжение в стержне 4 равно $\sigma_{2-4} = 200 \text{ МПа}$, перемещение узла 2 по вертикали $Z_2^{BEPT} = 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Если активным будет ограничение на перемещение узла 2 ($Z_2^{BEPT} = 0,02 \text{ м}$), то из решения системы трех уравнений получим

$$A_1 = 0,66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, A_2 = 0,7379 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, A_3 = 0,165 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2, \\ EA_1 = 13\,200 \text{ кН}, EA_2 = 14\,758 \text{ кН}, EA_3 = 3\,300 \text{ кН}.$$

Однако напряжения в стержнях окажутся значительно больше расчетных значений.