

ПОВЫШЕНИЕ КАЧЕСТВА КООРДИНАТНОГО КОНТРОЛЯ СЛОЖНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В.Л.Соломахо, доктор технических наук, профессор кафедры СМИС;
О.А. Кротова, аспирант кафедры СМИС

Традиционный путь снижения суммарной погрешности измерения связан с уменьшением ее инструментальной составляющей, как правило, за счет разработки принципиально новых средств из-

мерения (СИ). При существующих требованиях к точности измерений незначительное снижение погрешности обычно приводит к существенному удорожанию СИ. Альтернативой является уменьшение

суммарной погрешности за счет снижения ее методической составляющей. На данном этапе, в связи с развитием электронно-вычислительной техники, разработкой множества стандартных программных продуктов, позволяющих осуществлять расчеты различной сложности, появилась возможность проектирования специализированных методик, позволяющих существенно снизить методическую погрешность.

В качестве примера рассмотрим традиционную методику контроля поперечного сечения детали типа тела вращения.

Известно аналитическое решение задачи оптимизации числа контрольных точек для нахождения центра и радиуса базовой окружности при равномерном расположении точек на профиле [1, с. 86] (методика 1). Радиус-вектор реального профиля поперечного сечения вала может быть описан рядом Фурье с ограниченным числом членов:

$$R(\varphi) = R_0 + \sum_{k=1}^{N_q} X_k \cos(\varphi_k + \varphi_{0k}),$$

где R_0 – средний радиус профиля;

X_k, φ_{0k} – соответственно амплитуда и начальная фаза k -й гармоники;

N_q – номер высшей гармоники;

φ_k – угол поворота.

Так как контрольные точки на профиле мы выбираем случайным образом, то можно положить $\varphi_{0k} = 0$. При этом профиль может быть описан выражением

$$R(\varphi) = R_0 + X_k \cos(k). \quad (1)$$

Опираясь на расчеты, представленные в работе [1, с. 88], получаем, что вероят-

ность P того, что при измерениях n координат точек профиля описываемого выражением (1), относительная погрешность измерения не превысит допустимого значения $[\delta]$:

$$P \geq \left[1 - (1 - P_1)^N\right]^2, \text{ где } N = n - 1.$$

Путем математических преобразований получим

$$N \geq \frac{\ln(1 - \sqrt{P})}{\ln(1 - P_1)}.$$

Соответственно

$$n \geq n_{\min} = \frac{\ln(1 - \sqrt{P})}{\ln\left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos(1 - [\delta])\right)} + 1.$$

Следовательно, методическая погрешность измерения и заданная вероятность условия, что погрешность измерения не превысит допустимого значения, определяют минимально необходимое количество контрольных точек, т.е.

$$n = f(P, [\delta]).$$

При решении комплекса измерительных задач мы достаточно часто сталкиваемся с поверхностями, имеющими элементы прерывания (так называемыми «неполными» поверхностями).

Экспериментальные исследования показали, что использование методики 1 для поверхностей, угловой диапазон рабочей поверхности которых менее 200° , приводит к появлению относительной методической погрешности около 200 %; при уг-

ловом диапазоне от $200^\circ \delta^*$ не превышает 30 % (т.е. допустимого значения) (рис. 1).

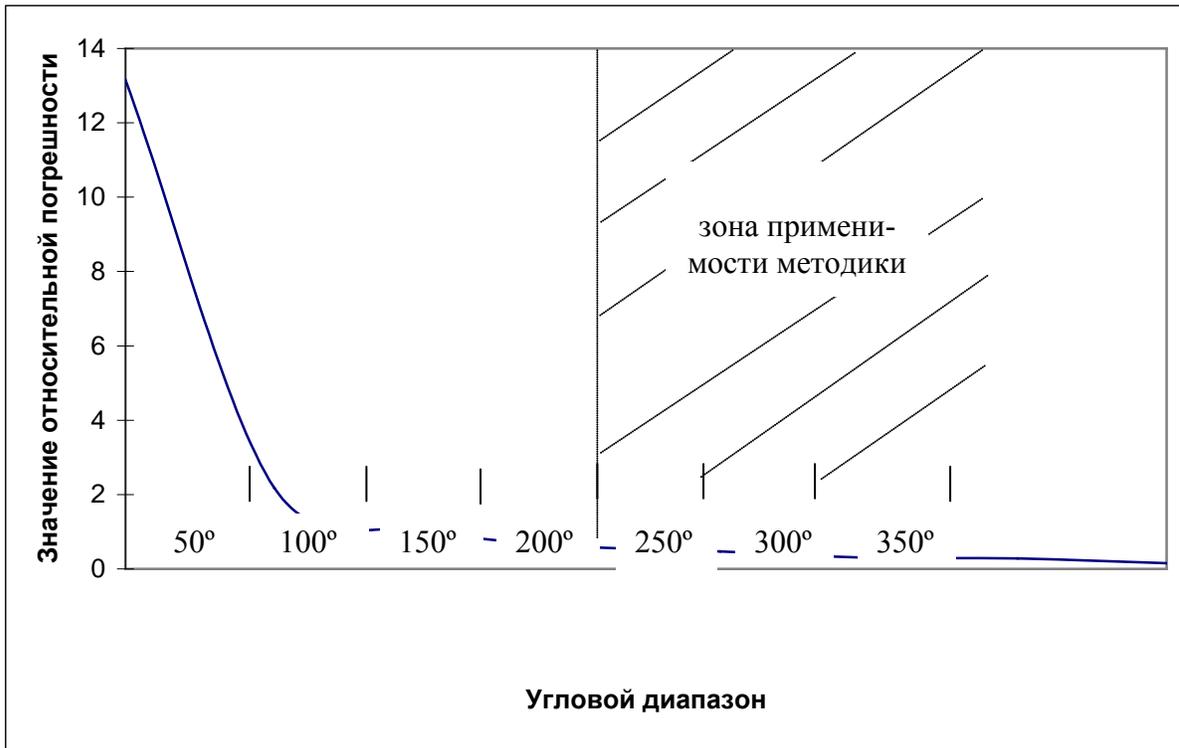


Рис. 1. Зависимость относительной методической погрешности от углового диапазона (методика 1)

Таким образом, при неравномерном расположении контрольных точек на профиле объекта измерения необходимо использовать методику, учитывающую этот фактор.

Нижеописанная методика (методика 2) выполнения координатных измерений сложных поверхностей, представленных ограниченными участками окружности, позволяет обеспечить значение относительной методической погрешности, не превышающее допустимого значения.

Радиус-вектор реального профиля поперечного сечения цилиндрической или конической поверхности может быть описан выражением

$$R_i(\varphi) = R_0 + x_k \cos(k\varphi + \alpha_i),$$

где R_0 – номинальный радиус окружности; x_k – амплитуда гармоники.

Определим относительную методическую погрешность измерения в данном сечении:

$$\delta = \frac{\Delta - \Delta^*}{\Delta} = 1 - \frac{\Delta^*}{\Delta},$$

где $\Delta = 2x_k$ – теоретическое значение погрешности измерения, а Δ^* – максимальное значение погрешности для данного сечения, полученное в ходе измерения, определяемое как $\Delta^* = \max \Delta_{i,j} = \max |R_I - R_J|$, при $\varphi = \text{const}$ и $i \neq j$,

$$\text{где } R_j(\varphi) = R_0 + x_k \cos(k\varphi + \alpha_j).$$

Выполняя математические преобразования, получим

$$\Delta_{ij} = x_k \left| \cos(k\varphi + \alpha_i) - \cos(k\varphi + \alpha_j) \right| = 2x_k \left| \sin \frac{\alpha_i - \alpha_j}{2} \right| \left| \sin \left(k\varphi + \frac{\alpha_i + \alpha_j}{2} \right) \right|. \quad (3)$$

Очевидно, что наибольшее значение Δ^* могут реализовывать только те величины Δ_{ij} , амплитуда которых максимальна, т.е. когда

$$\left| \sin \frac{\alpha_i - \alpha_j}{2} \right| = 1,$$

что равносильно условию

$$\sin \frac{\alpha_i - \alpha_j}{2} = 1.$$

$$\Delta^* \leq \max \Delta_{ij} = 2x_k \max \left| \sin \left(k\varphi + \frac{2\alpha_i + \pi}{2} \right) \right| = 2x_k \max |\cos k\varphi + \alpha_i|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Рассмотрим n функций

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1^* &= 2x_k [\cos(k\varphi + \alpha_1)]; \\ \Delta_2^* &= 2x_k [\cos(k\varphi + \alpha_2)]; \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta_n^* &= 2x_k [\cos(k\varphi + \alpha_n)]. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Введем обозначение

$$\gamma_i(\varphi) = \left| \frac{\Delta_i^*}{\Delta} \right| = |\cos(k\varphi + \alpha_i)|, \quad i = 1, \dots, n,$$

Это достигается для тех α_i и α_j , для которых разность $|\alpha_i - \alpha_j|$ достаточно близка к π .

Введем ряд условий.

1. Будем считать, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$.

2. Точки α_{i+1} и α_i будем считать различными только в том случае, когда $\alpha_{i+1} - \alpha_i > \alpha^*$, где $\alpha^* = \frac{2\pi z}{360}$, z – угловой шаг измерения.

Подставляя в формулу (3) вместо α_j величину $\alpha_i + \pi$, получаем

где γ_i – значение относительной погрешности в i -й точке.

Нас интересуют максимальные значения γ_i на i -промежутке. В этом случае кривая γ_i на i -промежутке будет совпадать с $\Delta_{i \max}^*$ (рис. 2).

Считаем, что функции $\gamma_i(\varphi)$ определены формулами (2) на всем множестве действительных чисел.

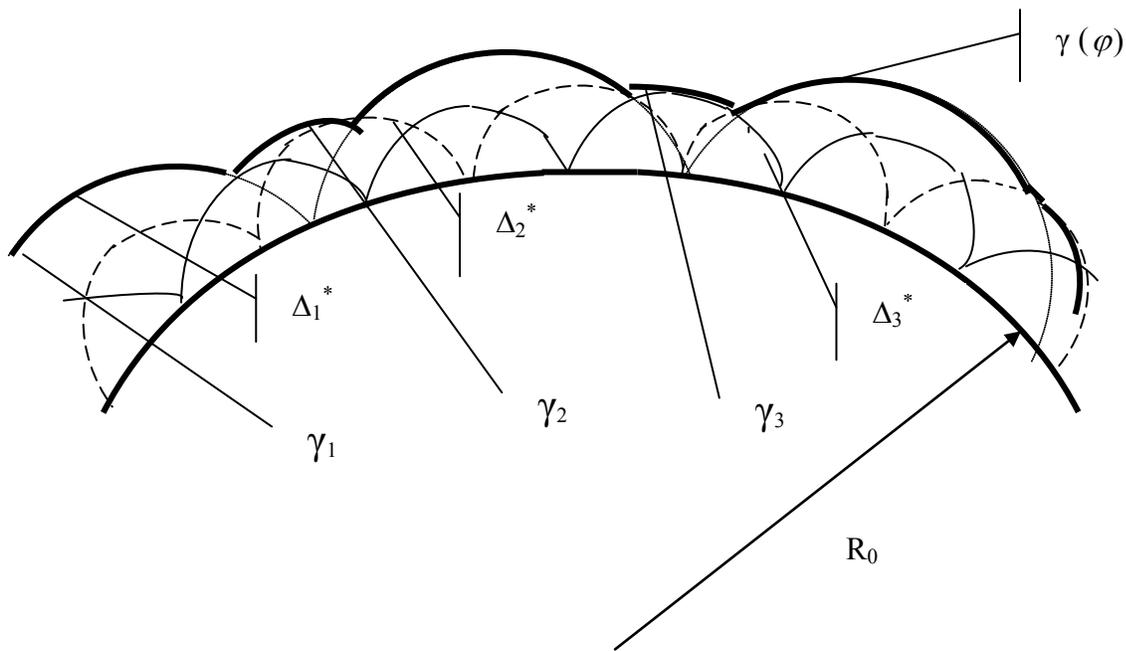


Рис. 2. Графики функций Δ_i и γ_i

Функция $\gamma(\varphi) = \max\{\gamma_1(\varphi), \dots, \gamma_n(\varphi)\}$ имеет локальные максимумы в точках вида $\frac{m\pi - \alpha_i}{k}$, $i = 1, \dots, n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Число таких точек на отрезке $\left[0, \frac{2\pi}{k}\right]$ не более $2n$. Обозначим точки локального максимума, попавшие в $\left[0, \frac{2\pi}{k}\right]$ символами t_1, \dots, t_{2n} так, что $t_l \leq t_{l+1}$, $l = 1, \dots, 2n - 1$.

Глобальный максимум функция $\gamma(\varphi)$ принимает в точке $\frac{t_{2p} + t_{2p+1}}{2}$ такой, что $|t_{p+1} - t_p| = \max\{t_{l+1} - t_l\}$. Введем обозначение $A = |t_{p+1} - t_p|$.

На рис. 3 представлен пример неравномерного расположения точек («неполная» окружность, ограниченная сектором $\left[A, \frac{2\pi}{k}\right]$).

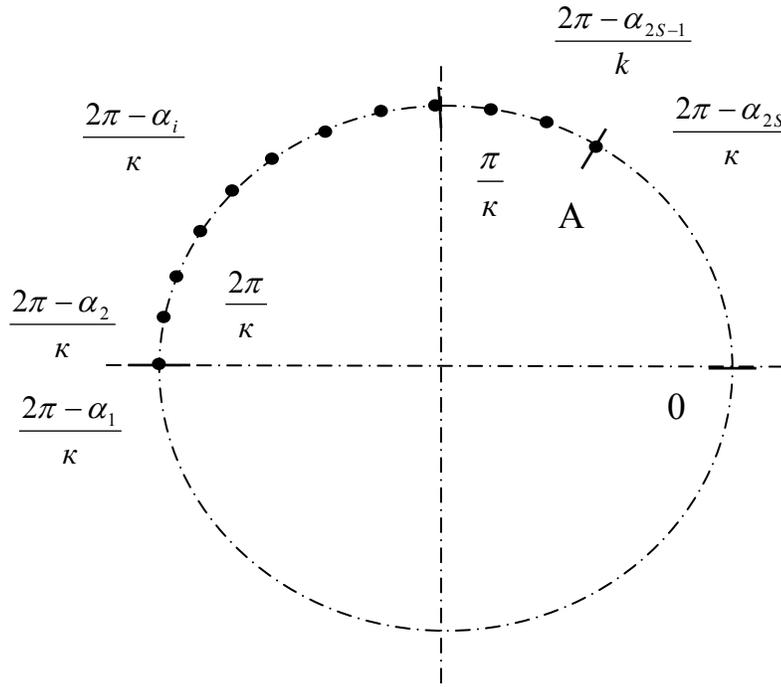


Рис. 3. Расположение точек на «неполной» окружности

В данном случае на $\left[A, \frac{2\pi}{\kappa}\right]$ расположены $2S$ точек с равномерным шагом (шаг α^*), начиная от точки $\frac{2\pi}{\kappa}$.

При этом дуга, ограниченная сектором $\left[A, \frac{2\pi}{\kappa}\right]$, определяется как

$$A = \frac{2\pi}{\kappa} - (2S - 1)\alpha^*.$$

Очевидно, что $\delta_{\max} = 1 - \left|\cos \frac{A}{2}\right|$.

Поскольку $0 < a < A < \frac{\pi}{\kappa}$, то соответственно $0 < k \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2}$ и, следовательно,

$$\left|\cos k \frac{A}{2}\right| = \cos k \frac{A}{2}, \text{ т.е.}$$

$$\delta_{\max} = 1 - \cos k \frac{A}{2}. \quad (4)$$

Определим уравнение, описывающее функцию $\delta(\varphi)$ на $[0, A]$.

$$\delta(\varphi) = \begin{cases} 1 - |\cos k\varphi|, & 0 \leq \varphi \leq \frac{A}{2}; \\ 1 - |\cos k(\varphi - A)|, & \frac{A}{2} \leq \varphi \leq A. \end{cases},$$

Нас интересует именно этот интервал, т.к. значения $\delta(\varphi)$ на нем могут быть получены только косвенно (контрольные точки на $[0, A]$ отсутствуют). Таким образом, анализируя имеющуюся информацию о поведении функции $\delta(\varphi)$ на $\left[A, \frac{2\pi}{k}\right]$, мы должны с достаточной вероятностью получить значения $\delta(\varphi)$ на $[0, A]$.

Для рассматриваемых углов φ косинусы положительны, поэтому

$$\delta(\varphi) = \begin{cases} 1 - \cos k\varphi, & 0 \leq \varphi \leq \frac{A}{2}; \\ 1 - \cos k(\varphi - A), & \frac{A}{2} \leq \varphi \leq A. \end{cases}$$

Функция $\delta(\varphi)$ меняется на участке $[0, \delta_{\max}]$ немонотонно. Плотность распределения случайной величины φ определяется как

$$f(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{A}, & 0 \leq \varphi \leq A; \\ 0, & \varphi \notin [0, A]. \end{cases}$$

Найдем функцию распределения $G(\delta)$ случайной величины δ :

$$G(\delta) = \frac{2}{Ak} \arccos(1 - \delta).$$

Плотность вероятности $g(\varphi)$ задается формулой

$$g(\varphi) = G(\delta) = \begin{cases} \frac{2}{Ak} \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - \delta)^2}}, & 0 < \delta \leq \delta_{\max}; \\ 0, & \delta \notin]0, \delta_{\max}[. \end{cases}$$

Используя это, можно вычислить вероятность того, что относительная методическая погрешность δ не будет превосходить некоторой допустимой величины $\delta_{\text{дон}}$.

$$P(\delta \leq \delta_{\text{дон}}) = \int_0^{\delta_{\text{дон}}} g(\delta) d\delta = \int_0^{\delta_{\text{дон}}} \frac{2}{\kappa A} \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - \delta)^2}} d\delta = \frac{2}{\kappa A} \arccos(1 - \delta) \Big|_{\delta=0}^{\delta=\delta_{\text{дон}}},$$

т.е.
$$P = \frac{2}{\kappa A} \arccos(1 - \delta_{\text{дон}}).$$

Отсюда находим

$$A = \frac{2}{\kappa P} \arccos(1 - \delta_{\text{дон}}).$$

Используя формулу (4), находим число измерений $n = 2S$, обеспечивающее (с вероятностью P) погрешность измерения в пределах допуска.

$$\frac{2\pi}{\kappa} - (2S - 1)a^* = \frac{2}{\kappa P} \arccos(1 - \delta_{\text{дон}}).$$

Откуда

$$2S = 1 + \frac{2\pi}{\kappa a^*} - \frac{2}{\kappa P a^*} \arccos(1 - \delta_{\text{дон}}).$$

Поскольку $a = \frac{2\pi z}{360\kappa}$, то

$$n = 2S = 1 + \frac{360}{z} \left(1 - \frac{2}{\pi P} \arccos(1 - \delta_{\text{дон}})\right).$$

Для удобства проектирования МВИ введем классификацию [2, с. 30], для чего используем «коэффициент целостности» (ξ), который рассчитывается как отношение углового диапазона измеряемой поверхности к угловому диапазону полной окружности, т.е.

$$\xi = \frac{\alpha_i}{360^\circ}.$$

В результате анализа экспериментальных данных получены рекомендации по применимости методик при контроле действительных размеров, которые представлены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Наименование методики	Коэффициент целостности (ξ)		
	0,14-0,22	0,22-0,56	0,56-1,0
Методика 1	Использование методики невозможно		Значение относительной погрешности не превышает допустимого
Методика 2	Необходимо использование поправочных коэффициентов		

При контроле погрешностей расположения при коэффициенте целостности $\xi \geq 0,3$ возможно использование методики 1, при $\xi < 0,3$ необходимо использовать методику, учитывающую фактор неравномерного расположения контрольных точек на профиле поверхности.

Литература

1. Соломахо В.Л. Метрологическое обеспечение координатных измерений в машиностроении. – Мн.: ООО «Реклама – Факсбелар», 2001. – 131 с.
2. Соломахо В.Л., Кротова О.А. Анализ применимости методик выполнения координатных измерений к сложным поверхностям, имеющим элементы прерывания // Метрология и приборостроение. – 2003. – № 3. – С. 26.