

$$(-27)\frac{2}{3} + 18\frac{2}{3} + 27\frac{1}{3} = 3, \quad -18 + 12 + 9 = 3, \quad 3=3.$$

Итак, решены две прямые, и что наиболее важно, две обратные задачи теории упругости. Если решение первой обратной задачи уже апробировалось в 2013-14 и 2014-15 учебных годах на строительном факультете БНТУ, то решение второй обратной задачи приводится впервые. На этой базе могут быть составлены контрольные и самостоятельные работы для студентов, изучающих напряженное состояние в точке в курсе теории упругости или механики материалов. Авторы разработанных алгоритмов решения задач надеются, что они также принесут несомненную пользу не только студентам, но и преподавателям, а также специалистам, работающим в данном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. Учебник под ред. Г. С. Варданяна- М., Издательство АСВ, 1995.-568 стр. с илл.

УДК 624.04

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ПРОЕКЦИИ ГРАДИЕНТА В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ БАЛКИ

БОРИСЕВИЧ А.А., САБУК А.А.

Белорусский национальный технический университет
Минск, Беларусь

В настоящее время ведутся активные исследования по разработке численных методов оптимального проектирования конструкций. Цель этой работы – показать особенности поиска оптимального проекта с помощью метода проекций градиента.

Исследуется расчетная схема балки с различными, но постоянными сечениями на участках АС и СВ (рис. 1)

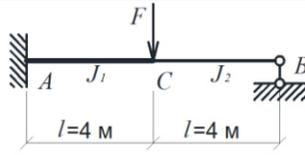


Рис. 1. Расчетная схема балки

Изгибающие моменты M_A и M_C в сечениях А и С определяются по формулам $M_A = Fl \frac{J_1 + 2J_2}{J_1 + 7J_2}$, $M_C = 2,5Fl \frac{J_2}{J_1 + 7J_2}$,

где $F = 15$ кН; $l = 4$ м;

J_1 и J_2 – моменты инерции сечений балки на отрезках АС и СВ.

Оптимизация размеров сечений на участках АС и СВ выполнялась в соответствии с сортаментом на гнутые сварные замкнутые прямоугольные профили ТУ 36-2287-80 (с изменениями №2). Для организации непрерывного движения поисковой точки к оптимальному решению в расчете использовались аппроксимирующие функции для геометрических характеристик сечений, которые соответствуют возможному ряду используемых в проекте профилей балки. Аппроксимирующие полиномы приняты в виде:

$$J_1 = -3,22189 + 0,300054x_1 + 0,239149x_1^2 + 0,0418113x_1^3;$$

$$J_2 = -3,22189 + 0,300054x_2 + 0,239149x_2^2 + 0,0418113x_2^3;$$

$$W_1 = -2,60887 + 0,405004x_1 + 0,156864x_1^2 + 0,000130208x_1^3;$$

$$W_2 = -2,60887 + 0,405004x_2 + 0,156864x_2^2 + 0,000130208x_2^3;$$

где x_1 и x_2 – площади сечений на участке АС и СВ балки, см²;

W_1, W_2 – моменты сопротивления сечений балки.

Напряжения σ_A, σ_C лев и σ_C прав выражаются через функции, у которых существуют производные по x_1 и x_2 во всех точках кривых. Напряжения во всех сечениях не должны превышать расчетного сопротивления материала на растяжение-сжатие, принятого равным 300 МПа.

Целевая функция выражает объем балки: $V = 4x_1 + 4x_2$.

Требуется найти оптимальные параметры сечений и минимальный объем материала на ее изготовление.

Решение задачи выполнялось с помощью метода проекций градиента. Рассматривались три варианта постановки и решения задачи:

- в задаче оптимизации учитываются только ограничения на напряжения в сечениях балки;
- в задаче оптимизации учитывается только ограничение на перемещение сечения С;
- в задаче оптимизации учитываются ограничения на напряжения и на перемещения сечения С.

А. Нахождение оптимального решения с учетом только функций напряжений.

Примем площадь сечения на участке АС равной 50 см^2 , а на участке СВ – 25 см^2 . Для этих данных объем материала балки и напряжения в сечениях приведены в таблице 1.

Таблица 1

Напряжения в сечениях балки

Площадь сечения на участке АС $x_1, \text{ см}^2$	Площадь сечения на участке СВ $x_2, \text{ см}^2$	Объем балки $V, \text{ см}^3$	Напряжения в сечении А $\sigma_A, \text{ МПа}$	Напряжения в сечении С слева $\sigma_{C \text{ лев}}, \text{ МПа}$	Напряжения в сечении С справа $\sigma_{C \text{ прав}}, \text{ МПа}$
50	25	30000	91,34	24,74	97,96

Наибольшее нормальное напряжение, как видно из Таблицы 1, возникает в сечении С справа и равно $97,96 \text{ МПа}$. Определив значения первых производных по x_1 и x_2 от функции напряжения в сечении С справа, получим уравнение прямой, являющейся нормалью к функции $\sigma_{C \text{ прав}}$ в исходной точке: $x_1 - 1,346 x_2 = 16,357$.

Проекция s'' антиградиента целевой функции $s = -\nabla f = [-4 \quad -4]^T$ на эту прямую показывает направление спуска (рис. 2).

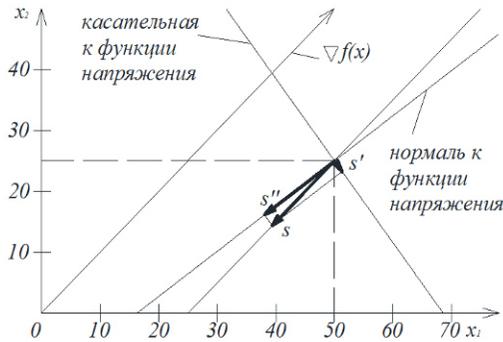


Рис. 2. Проекция вектора антиградиента целевой функции на касательную и нормаль к функции напряжения

Проекционная матрица P вычисляется по выражению:

$$P = (I - a(a^T a)^{-1} a^T).$$

Вектор a имеет компоненты $a = [1; -1,346]^T$.

$$P = \begin{pmatrix} 0,644254 & 0,478739 \\ 0,478739 & 0,355746 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Проекция } s'' = P(-\nabla f) = \begin{pmatrix} -4,49197 \\ -3,33794 \end{pmatrix}.$$

Координата точки, в которой целевая функция имеет меньшее значение, находится по выражению:

$$x^{t+1} = x^t + \alpha s'',$$

где x^{t+1} - новая точка; x^t - начальная точка; α - длина шага.

Принимая $\alpha = 0.25$, получим $x^{t+1} = [48,877; 24,166]^T$.

При новых значениях площадей сечений объем балки равен $29\,217\text{ см}^3$. Напряжение в сечении А равно $96,37\text{ МПа}$, а в сечении С оно составляет $25,50\text{ МПа}$ (слева) и $103,18\text{ МПа}$ (справа). Наибольшее напряжение наблюдается снова в сечении С справа.

Принимая точку $(48,877; 24,1655)$ за начальную, повторим все вышеуказанные действия до тех пор, пока напряжение в одном из сечений не станет равным 300 МПа или близким к этому значению.

В результате при движении из точки $(50; 25)$ были получены значения площадей $x_1 = 29,842\text{ см}^2$ и $x_2 = 12,781\text{ см}^2$. Объем балки

оказался равным $17\,049\text{ см}^3$. Напряжение в сечении А равно $280,62\text{ МПа}$, а в сечении С оно составляет $56,24\text{ МПа}$ (слева) и $301,59\text{ МПа}$ (справа). Граница области допустимых значений достигнута, и дальнейшее движение вдоль вектора s'' не представляется возможным.

Дальнейшее движение поисковой точки вдоль вектора s' (вдоль границы области допустимых решений) позволяет найти оптимальное решение: $x_1 = 34,354\text{ см}$ и $x_2 = 0\text{ см}^2$. Объем балки равен 13742 см^3 . Напряжение в сечении А равно $299,9\text{ МПа}$.

Б. Нахождение оптимального решения с учетом только функции перемещения сечения С.

Ограничение на вертикальное перемещение сечения С вычисляется по выражению:

$$\Delta_C = \frac{Fl^3}{6EJ_1} \cdot \frac{2J_1 + 1,5J_2}{J_1 + 7J_2}.$$

При начальных исходных данных вертикальное перемещение сечения С составляет $1,49\text{ см}$.

Определив значения первых производных по x_1 и x_2 от функции перемещения в сечении С в исходной точке ($\frac{\partial \Delta_C}{\partial x_1} = -0,052$;

$\frac{\partial \Delta_C}{\partial x_2} = -0,067$) и проведя вычисления, аналогичные изложенным

ранее, получили, что при $\Delta_c = 7\text{ см}$ оптимальными являются значения площадей $x_1 = 36,023\text{ см}^2$ и $x_2 = 0\text{ см}^2$. Объем балки равен 14409 см^3 . Вертикальное перемещение сечения С составляет $6,9\text{ см}$. Напряжение в сечении А равно $272,67\text{ МПа}$.

В. Нахождение оптимального решения с учетом функций напряжений и функции перемещения сечения С.

Задача решается практически аналогично п. А и Б.

В этом случае в расчет вводится вместо вектора a матрица $a = \begin{pmatrix} 1,282 & 0,743 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Проекционная матрица Р получается в виде:

$$P = \begin{pmatrix} -6,55083 & 6,96177 \\ 6,96177 & -5,87383 \end{pmatrix}.$$

Проекция $s'' = P(-\nabla f) = (-1,644; -4,352)^T$.

Дальнейшие шаги в задаче оптимизации соответствуют методу, изложенному в п. А.

В результате при движении из точки (50; 25) были получены значения площадей $x_1 = 29,801 \text{ см}^2$ и $x_2 = 13,587 \text{ см}^2$. Объем балки равен $17\,355 \text{ см}^3$, вертикальное перемещение сечения С составляет 7,099 см. Напряжение в сечении А равно 269,75 МПа, а в сечении С оно составляет 62,22 МПа (слева) и 294,32 МПа (справа). Наибольшее напряжение наблюдается также в сечении С справа и почти достигает расчетное сопротивление материала $R = 300 \text{ МПа}$.

Заключение.

1. Предлагаемая к использованию методика применения метода проекций градиента позволяет найти оптимальные параметры балки. Неотрицательность переменных отслеживается на каждом шаге движения поисковой точки.

2. Изложенная методика может быть распространена, как показано в п. В, на случай задачи оптимизации со множеством ограничений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисевич А.А., Воробей А.А. Формирование области допустимых решений для балки и применение полученных результатов в задачах оптимизации // Вопросы внедрения норм проектирования и стандартов Европейского союза в области строительства. Сборник научно-технических статей: материалы научно-методического семинара, Минск, 29 мая 2012 г. / В 2-х частях. Часть 1. – Минск: БНТУ, 2012. – с. 175-183.

2. Борисевич, А.А. Строительная механика: учебное пособие для вузов / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – 2-е изд., перераб. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с.

3. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: В 2-х кн. Кн.2. Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 320 с.