УДК 51.(07.07)

ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Чернявская С.В., канд. физ.-мат. наук, доцент
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Задачи с обратными тригонометрическими функциями традиционно представляют значительную трудность практически для всех учащихся, поскольку в курсе математики средней школы не предусматривается изучение этой темы в достаточном объеме и учащиеся не имеют навыка работы с такими функциями. В данной статье рассматриваются уравнения и неравенства, которые можно решить с использованием простейших свойств или графиков обратных тригонометрических функций, что является посильной задачей для значительной части обучаемых. Задания представляют интерес для разбора их на факультативных занятиях для углубления знаний и расширения спектра учебных навыков по математике.

Задача 1. Решить уравнение

$$\operatorname{arcctg} x = \arcsin x.$$

Решение.

Функция $y = \arcsin x$ определена при $x \in [-1; 1]$ и возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. При этом же $x \in [-1; 1]$ функция $y = \operatorname{arcctg} x$ убывает от $\frac{3\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4}$. Поэтому исходное уравнение имеет не более одного корня при $x \in (0; 1)$ и равносильно системе:

$$\begin{cases} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arcsin x \\ x \in (0; 1) \end{cases}.$$

Так как функция $y = \arcsin x$ монотонна на области определения, то

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = x \\ 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Решив уравнение, получим, что $x = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{1}}$ – единственный корень.

Ответ: $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Задача 2. Решить уравнение

$$\arcsin(\sin x) = x - 2\pi.$$

Решение.

1 способ. Построим графики левой и правой частей уравнения:

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2\pi k; \ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi - x + 2\pi k; \ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \ \ k \in Z \end{cases}.$$

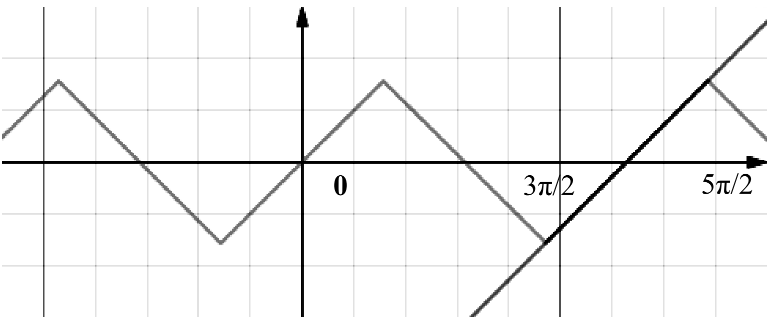

Рисунок 1

Из графика (рис.1) видно, что решением уравнения будет отрезок $\left[\frac{3\pi}{2}; \ \frac{5\pi}{2}\right]$.

2способ. Так как

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2\pi k; \ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi - x + 2\pi k; \ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z \end{cases},$$

то исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x - 2\pi k = x - 2\pi; \ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ \pi - x + 2\pi k = x - 2\pi; \ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z \end{array}\right..$$

Первое уравнение совокупности имеет вид 0 = 0 при $k = 1$, то есть $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$. При других значениях k оно является неверным числовым равенством. Второе уравнение совокупности имеет вид $x = \frac{3\pi}{2}; \ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z$. Оно имеет два решения при $k = 0, x_1 = \frac{3\pi}{2}$; $k = 1, x_2 = \frac{5\pi}{2}$. Решением всей совокупности будет отрезок $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Задача 3. Решить неравенство

$$\arcsin x < \arccos x.$$

Решение.

1 способ. Рассмотрим три случая. Пусть $0 \le x \le 1$, тогда $\arcsin x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$; $\arccos x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$. Применим к обеим частям исходного неравенства на данном промежутке функцию синус, получим

$$\begin{cases} 0 < x \le 1 \\ \sin(\arcsin x) < \sin(\arccos x) \end{cases} \text{или} \begin{cases} 0 < x \le 1 \\ x < \sqrt{1 - x^2} \end{cases},$$

то есть $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Пусть теперь $-1 \le x < 0$, тогда $\arcsin x < 0; \arccos x > 0$, следовательно, неравенство верно для любого $x \in [-1; 0)$. Наконец, пусть $x = 0$, тогда неравенство примет вид $0 < \frac{\pi}{2}$, следовательно, $x = 0$ является его решением. Окончательно получим $x \in \left[-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2 способ. Построим графики левой и правой частей неравенства:

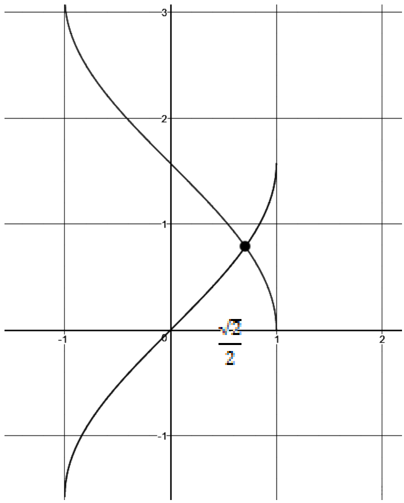

Рисунок 2

Из рисунка 2 следует, что решением неравенства является промежуток $x \in \left[-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ответ: $\left[-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Приведенные примеры иллюстрируют применение функциональных способов решения нестандартных задач, использующих свойства монотонных функций или графический подход. Такие способы решения являются эффективным инструментом не только в задачах с обратными тригонометрическими функциями, но и для других комбинированных уравнений и неравенств, содержащих модульные, иррациональные, показательные, логарифмические выражения.