УДК 51.(07.07)

ПЕРЕСТАНОВКИ, РАЗМЕЩЕНИЯ И СОЧЕТАНИЯ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Сенькова Е.В., преподаватель
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

Задачи комбинаторики являются традиционно сложной темой математики, особенно для учащихся общеобразовательных школ, поскольку это задачи на логику и креативное мышление, и лишь отчасти на применение алгоритмов и формул. Рассмотрим применение основных понятий комбинаторики в задачах, предлагаемых учащимся. В этих задачах ответ определяется по формуле $P(A) = m/n$, но для подсчета числа n всех возможных событий и числа m благоприятствующих событий используют правила сложения и умножения вариантов, а также готовые рецепты комбинаторики: формулы для числа перестановок, сочетаний, размещений, что значительно облегчает решение задач.

Правило умножения («И-правило»): если элемент A можно выбрать n способами, и при любом выборе A элемент B можно выбрать m способами, то пару A и B можно выбрать $n{\cdot}m$ способами.

Правило сложения («ИЛИ-правило»): если элемент A можно выбрать n способами, а элемент B можно выбрать m способами, то выбрать A или B можно $n + m$ способами.

Перестановками называются такие выборки элементов, которые отличаются только порядком расположения элементов, но не самими элементами.

Если перестановки производятся на множестве из n элементов, их число определяется по формуле $\boldsymbol{P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)...3\cdot2\cdot1 = n!}$

Задача 1

На книжной полке стояло 30 томов. Ребенок уронил книги с полки, а затем расставил их в случайном порядке. Какова вероятность того, что он не поставил 1-й и 2-й тома рядом?

Решение.

Сначала определим вероятность события A, состоящего в том, что ребенок поставил 1-й и 2-й тома рядом.

Элементарное событие – некая расстановка книг на полке. Понятно, что общее число всех элементарных событий будет равно общему числу всех возможных перестановок $P_{30} = 30!$

Число элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно числу перестановок, в которых 1-й и 2-й тома стоят рядом. Чтобы вычислить число «лишних» перестановок, сначала определим, сколько вариантов, в которых 2-й том находится рядом с 1-ым справа от него. В таких перестановках 1-ый том может занимать места с первого по 29-е, а 2-й со второго по 30-е – всего 29 мест для этой пары книг. И при каждом таком положении первых двух томов остальные 28 книг могут занимать остальные 28 мест в произвольном порядке. Вариантов перестановки 28 книг $P_{28} = 28!$ Всего «лишних» вариантов при расположении 2-го тома справа от 1-го получится $29 \cdot 28! = 29!$

Аналогично рассмотрим случай, когда 2-й том расположен рядом с 1-ым, но слева от него. Получается такое же число вариантов $29 \cdot 28! = 29!$

Значит, получили всего перестановок $2 \cdot 29!$

Вероятность определяем делением числа благоприятствующих элементарных событий на число всех возможных элементарных событий: $P(A) = 2 \cdot 29!/30! = 2 \cdot 29!/(29! \cdot 30) = 2/30 = 1/15$.

Событие B – ребенок не поставил 1-й и 2-й тома рядом – противоположно событию A, значит его вероятность

$P(B) = 1 - P(A) = 1 - 1/15 = 14/15 = 0{,}9333$.

Ответ: 0,9333.

Размещениями из n элементов по m (мест) называются такие выборки, которые имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n по m обозначается A_n^m и определяется по формуле $\boldsymbol{A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = n!/(n-m)!}$

Задача 2

На книжной полке находится собрание сочинений одного автора в 6 томах. Книги одинакового формата расположены в произвольном порядке. Читатель, не глядя, берет 3 книги. Какова вероятность того, что он взял первые три тома?

Решение.

Событие A – у читателя первые три тома. С учетом порядка выбора он мог взять их 6-ю способами. (Это перестановки из 3-ёх элементов $P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$, которые легко перечислить 123, 132, 213, 231, 312, 321.)

Таким образом, число благоприятствующих элементарных событий равняется 6.

Общее число возможных элементарных событий равно числу размещений из 6-ти по 3, т.е. $A_6^3 = 6\cdot ...\cdot(6-3+1) = 6\cdot 5\cdot 4 = 120$.

$P(A) = 6/120 = 1/20 = 0{,}05$.

Ответ: 0,05.

Неупорядоченные выборки называются **сочетаниями** из n элементов по m и обозначаются C_n^m. Число сочетаний определяется по формуле $\boldsymbol{C_n^m = n!/(n-m)!}$

В теории вероятностей задачи на сочетания встречаются чаще всего, потому что группировка без порядка следования важнее именно для неразличимых элементов. Если какие-то элементы существенно различаются между собой, их трудно выбрать случайно, есть ориентиры для неслучайного выбора.

Задача 3

На книжной полке находится собрание сочинений одного автора в 6 томах. Книги одинаково оформлены и расположены в произвольном порядке. Читатель берет наугад 3 книги. Какова вероятность того, что он взял первые три тома?

Решение.

Событие A – у читателя первые три тома. Это 1-й, 2-й и 3-й тома. Без учета порядка, в котором он выбирал книги, а только по конечному результату, он мог взять их одним способом. Число благоприятствующих элементарных событий – 1.

Общее число возможных элементарных событий равно числу групп из 6-ти по 3, образованных без учета порядка следования элементов в группе, т.е. равно числу сочетаний:

$C_6^3 = 6!/3!/(6 - 3)! = 4\cdot 5\cdot 6/(1\cdot 2\cdot 3) = 4\cdot 5 = 20$.

$P(A) = 1/20 = 0{,}05$.

Ответ: 0,05.

Из приведенных примеров очевидно, что при решении задач с применением методов комбинаторики необходимо тщательно анализировать предлагаемую ситуацию.