УДК 51 (07.07)

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМ

Кленовская И.С., старший преподаватель
Белорусский национальный технический университет
Минск, Республика Беларусь

При решении некоторых тригонометрических уравнений бывает очень удобно перейти от решения уравнения к решению системы. Говорят, что уравнение равносильно системе, если множество всех решений уравнения совпадает с множеством всех решений системы. Идея данного метода состоит в замене сложного тригонометрического уравнения двумя или несколькими более простыми.

<u>Пример.</u> Решить уравнение:

$$\cos 4x \cdot \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

Решение. Т.к. $|\cos 4x| \le 1$ и $\left|sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \le 1$, то исходное уравнение равносильно совокупности систем уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} cos\, 4x = 1, \\ sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} cos\, 4x = -1, \\ sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Для уравнений первой системы получим

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z, \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi n}{3}, \quad n \in Z. \end{cases}$$

Следовательно, решений нет.

Для уравнений второй системы имеем

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi n}{3}, \quad n \in Z. \end{cases}$$

Обоим уравнениям данной системы удовлетворяют значения $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z$.

Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z$.

Пример. Решить уравнение:

$$\left|tgx - \sqrt{3}\right| + \left|2sinx + \sqrt{3}\right| = tgx + 2sinx.$$

Решение. При решении можно сначала воспользоваться свойством модуля, что данное уравнение $|f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Тогда вместо исходного уравнения будем решать систему неравенств

$$\begin{cases} tgx \geq \sqrt{3}, \\ sinx \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Имеем $\begin{cases} \frac{\pi}{3} + \pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k \quad, k \in Z, \\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi m \leq x \leq \frac{4\pi}{3} + 2\pi m \quad, m \in Z. \end{cases}$

Следовательно, все решения системы и равносильного ей уравнения

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad, k \in Z, \\ \quad x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z. \end{array} \right. .$$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in Z; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Пример. Решить уравнение:

$$sin^{32}x + cos^{11}x = 1.$$

Решение. При решении можно сначала воспользоваться основным тригонометрическим тождеством

$$sin^{32}x + cos^{11}x = sin^2x + cos^2x.$$

Перегруппируем слагаемые

$$sin^{32}x - sin^2x = cos^2x - cos^{11}x$$

и разложим на множители

$$sin^2x(sin^{30}x - 1) = cos^2x(1 - cos^9x).$$

Если оценить и левую и правую части данного уравнения, то получим систему двух неравенств

$$\begin{cases} sin^2x(sin^{30}x - 1) \le 0, \\ cos^2x(1 - cos^9x) \ge 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} sin^2x(sin^{30}x - 1) = 0, \\ cos^2x(1 - cos^9x) = 0. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} sin^2x = 0, \\ 1 - cos^9x = 0, \end{cases} (1), \\ \begin{cases} sin^{30}x - 1 = 0, \\ cos^2x = 0. \end{cases} (2) \end{array}\right.$$

Решение системы (1): $x = 2\pi n, n \in Z$, а системы (2): $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

Ответ: $2\pi n, n \in Z; \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

Список использованных источников

1. Веременюк, В.В. Практикум по математике: подготовка к тестированию и экзамену / В.В. Веременюк, В.В. Кожушко. – 8-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2009.
2. Математика: пособие для подготовки к экзамену и централизованному тестированию за курс средней школы / А.И. Азаров [и др.]. – Минск, 2003.
3. Мерзляк, А.Г. Алгебраический тренажер: пособие для школьников и абитуриентов / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – М.: Илекса, 2005.
4. Процко, С.В. Интенсивный курс подготовки к тестированию и экзамену. Математика / С.В. Процко, А.И. Азаров, С.А. Барвенов. – Минск, 2004.