

ИЗГИБ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОГО ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ СО СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

¹Плескачевский Ю. М., ²Старовойтова Е.Э.

¹Гомельский филиал НАН Беларуси

²Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

Введение. Тонкостенные композиционные конструкции, усиленные ребрами, накладками и вставками или же ослабленные вырезами или перфорацией, относятся к одному из самых распространенных видов комбинированных конструкций, так как они позволяют оптимально распределить материал в сооружениях при удовлетворении прочности и жесткости. В связи с этим актуальной является проблема их расчета при различных внешних воздействиях и внутренней конфигурации. Деформирование и распространение волн в неоднородных элементах конструкций с гладкой конфигурацией, исследовано в работах [1–4]. Исследование НДС однородных тонкостенных конструкций ступенчато-переменной толщины содержится в работах [5, 6]. В публикациях [7–9] рассмотрено деформирование упругого трехслойного стержня с нерегулярной границей при гладких и локальных нагрузках. Здесь исследован изгиб упругопластического трехслойного стержня со ступенчато-переменной границей.

Постановка краевой задачи. Рассматривается несимметричный по толщине упругопластический трехслойный стержень с жестким наполнителем (рис. 1). Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью наполнителя. Для описания кинематики пакета используется гипотеза «ломаной» нормали: в тонких несущих слоях 1, 2 справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине сравнительно толстом наполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$. Деформации считаются малыми. На внешний слой 1 стержня действует распределенная силовая нагрузка $q(x), p(x)$. Через $w(x)$ и $u(x)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости наполнителя. Так как материалы всех слоев несжимаемы в поперечном направлении, то прогиб во всех точках поперечного сечения стержня одинаков. На торцах предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев, но не мешающих деформированию из своей плоскости. Через h_k обозначена толщина k -го слоя ($k = 1, 2, 3$), при этом

$$h_3 = 2c, \quad h_2 = h_{20} + h_{21}H_0(x - x_0), \quad (1)$$

где $H_0(x_0)$ – функция Хевисайда

$$H_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

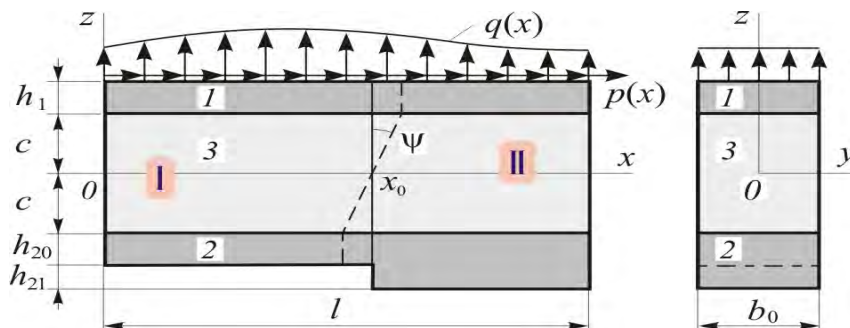


Рисунок 1 – Расчетная схема стержня с нерегулярной границей

Введенные геометрические гипотезы позволяют выразить продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ через три искомые функции $u(x), \psi(x)$ и $w(x)$:

$$u^{(1)} = u + c\psi - zw_{,x} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \quad u^{(3)} = u + z\psi - zw_{,x} \quad (-c \leq z \leq c),$$

$$u^{(2)} = u - c\psi - zw_{,x} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \quad (2)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; z – координата рассматриваемого волокна.

Компоненты тензора деформаций в слоях $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ ($i, j = x, z$) следуют из соотношений Коши и перемещений (2). В слоях стержня вводятся внутренние силы и моменты:

$$N^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz, \quad M^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz, \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz, \quad (3)$$

где $\sigma_x^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений, b_0 – ширина поперечного сечения стержня.

Уравнения равновесия трехслойного стержня в усилиях (3) и силовые граничные условия следуют из принципа возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta A = \delta W, \quad (4)$$

где δA и δW – вариации работ внешних сил и внутренних напряжений

$$\delta A = \iint_S (p\delta u + q\delta w) dS = b_0 \int_0^l (p\delta u + q\delta w) dx.$$

$$\delta W = \iint_S \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (y_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} + 2\sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} \delta_{k3}) dz dS = b_0 \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} \delta \varepsilon_x^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} dz \right] dx.$$

В результате получаем систему дифференциальных уравнений равновесия трехслойного стержня в усилиях:

$$\begin{cases} N_{,x} + b_0 p = 0 \\ H_{,x} - Q = 0 \\ M_{,xx} + b_0 q = 0 \end{cases}. \quad (5)$$

При этом должны выполняться следующие силовые граничные условия:

$$\begin{aligned} x = 0: & N = N_0, M = M_0, M_{,x} = Q_0, H = 0, \\ x = l: & N = N_l, M = M_l, M_{,x} = Q_l, H = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В слоях стержня используются физические уравнения состояния теории малых упругопластических деформаций Ильюшина ($k=1, 2, 3$; $i, j = x, y, z$):

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= 2G_k (1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)})) \varepsilon_{ij}^{(k)}, \\ \sigma^{(k)} &= 3K_k \varepsilon^{(k)} \quad (k = 1, 2, 3; i, j = x, y, z), \end{aligned} \quad (7)$$

где $s_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k , K_k – модули сдвиговой и объемной деформации; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – при $k = 1, 2$ это функции пластичности Ильюшина, которые в случае $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ следует положить равными нулю, $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций в k -м слое, $\varepsilon_y^{(k)}$ – предел текучести материалов несущих слоев, $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность заполнителя, причем $\omega^{(3)} \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}$, $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности заполнителя.

Рассмотрим методику решения задачи. Компоненты тензора напряжений в слоях, используя (7), выразим через девиатор и шаровую часть тензора деформаций в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)} &= s_x^{(k)} + \sigma^{(k)} = 2G_k \varepsilon_x^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} - 2G_k \varepsilon_x^{(k)} \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}), \\ \sigma_{xz}^{(3)} &= s_{xz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} - 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}). \end{aligned}$$

Выделим в тензоре напряжений упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «ω») слагаемые:

$$\sigma_x^{(k)} = \sigma_x^{(k)e} - \sigma_x^{(k)\omega}, \quad \sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xz}^{(3)e} - \sigma_{xz}^{(3)\omega},$$

где

$$\sigma_x^{(k)e} = 2G_k \varepsilon_x^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)}, \quad \sigma_x^{(k)\omega} = 2G_k \varepsilon_x^{(k)} \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}),$$

$$\sigma_{xz}^{(3)e} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}, \quad \sigma_{xz}^{(k)\omega} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega^{(3)} (\varepsilon_u^{(3)}). \quad (8)$$

Проведя подобную операцию с внутренними усилиями (2.8), получим:

$$N^{(k)} = N^{(k)e} - N^{(k)\omega}, \quad M^{(k)} = M^{(k)e} - M^{(k)\omega}, \quad Q^{(3)} = Q^{(3)e} - Q^{(3)\omega}. \quad (9)$$

Упругие (индекс «e») и неупругие (индекс «ω») составляющие в (9) следующие:

$$\begin{aligned} N^{(k)e} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)e} dz, \quad N^{(k)\omega} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)\omega} dz, \quad M^{(k)e} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)e} z dz, \\ M^{(k)\omega} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)\omega} z dz, \quad Q^{(3)e} = b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)e} dz, \quad Q^{(3)\omega} = b_0 \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)\omega} dz, \end{aligned} \quad (10)$$

Подставив внутренние усилия (9) в уравнения равновесия (5), приводим систему к виду:

$$\begin{cases} N_{,x}^e = -b_0 p + N_{,x}^\omega \\ H_{,x}^e - Q^e = H_{,x}^\omega - Q^\omega, \\ M_{,xx}^e = -b_0 q + M_{,xx}^\omega \end{cases} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} N^e &= \sum_{k=1}^3 N^{(k)e}, \quad M^e = \sum_{k=1}^3 M^{(k)e}, \quad Q^e = Q^{(3)e}, \quad H^e = c(N^{(1)e} - N^{(2)e}) + M^{(3)e}, \\ N^\omega &= \sum_{k=1}^3 N^{(k)\omega}, \quad M^\omega = \sum_{k=1}^3 M^{(k)\omega}, \quad Q^\omega = Q^{(3)\omega}, \quad H^\omega = c(N^{(1)\omega} - N^{(2)\omega}) + M^{(3)\omega}. \end{aligned}$$

Нелинейность материалов слоев учитывают добавки в правых частях уравнений с индексом «ω». Окончательные формулы для вычисления неупругих составляющих в (11) получим, используя соотношения (8) и (10):

$$\begin{aligned} N^\omega &= \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 G_k \int_{h_k} \omega_k \varepsilon_x^{(k)} dz, \\ M^\omega &= \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 G_k \int_{h_k} \omega_k \varepsilon_x^{(k)} z dz, \quad Q^\omega = 2b_0 G_3 \int_{-c}^c \omega_3 \psi dz. \end{aligned} \quad (12)$$

Система уравнений для определения искоемых функций следует из уравнений (11), если в ней внутренние усилия и моменты, выразить через искоемые перемещения u , ψ и w . В результате получим систему нелинейных дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами. Для ее решения применим метод упругих решений Ильюшина [10]. В итерационном виде система уравнений равновесия в перемещениях будет следующей:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_{10} H(x-x_0)) u_{,xx}^{(n)} + (a_6 + a_{60} H(x-x_0)) \psi_{,xx}^{(n)} - (a_7 + a_{70} H(x-x_0)) w_{,xxx}^{(n)} &= -p + p_\omega^{(n-1)}, \\ (a_6 + a_{60} H(x-x_0)) u_{,xx}^{(n)} + (a_2 + a_{20} H(x-x_0)) \psi_{,xx}^{(n)} - (a_3 + a_{30} H(x-x_0)) w_{,xxx}^{(n)} - a_5 \psi &= h_\omega^{(n-1)}, \\ (a_7 + a_{70} H(x-x_0)) u_{,xxx}^{(n)} + (a_3 + a_{30} H(x-x_0)) \psi_{,xxx}^{(n)} - (a_4 + a_{40} H(x-x_0)) w_{,xxx}^{(n)} &= -q + q_\omega^{(n)}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= K_1^+ h_1 + K_2^+ h_{20} + 2K_3^+ c, \quad a_{10} = K_2^+ h_{21}, \quad K_k^+ \equiv K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad a_2 = c^2 \left[K_1^+ h_1 + K_2^+ h_{20} + \frac{2}{3} K_3^+ c \right], \\ a_{20} &= c^2 K_2^+ h_{21}, \quad a_3 = c \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) + K_2^+ h_{20} \left(c + \frac{1}{2} h_{20} \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right], \quad a_{30} = c K_2^+ h_{21} \left(c + h_{20} + \frac{1}{2} h_{21} \right), \\ a_4 &= K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) + K_2^+ h_{20} \left(c^2 + c h_{20} + \frac{1}{3} h_{20}^2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3, \\ a_{40} &= K_2^+ h_{21} \left(c \left(c + 2h_{20} + h_{21} \right) + h_{20} h_{21} + h_{20}^2 + \frac{1}{3} h_{21}^2 \right), \quad a_5 = 2G_3 c, \quad a_6 = c \left[K_1^+ h_1 - K_2^+ h_{20} \right], \\ a_{60} &= -c K_2^+ h_{21}, \quad a_7 = K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) - K_2^+ h_{20} \left(c + \frac{1}{2} h_{20} \right), \quad a_{70} = -K_2^+ h_{21} \left(c + h_{20} + \frac{1}{2} h_{21} \right), \end{aligned}$$

G_k, K_k – модули сдвиговой и объемной деформации k -го слоя,

$$p_\omega^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} N_{,x}^{\omega(n-1)}, \quad h_\omega^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} (H_{,x}^{\omega(n-1)} - Q^{\omega(n-1)}), \quad q_\omega^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} M_{,xx}^{\omega(n-1)},$$

$$\begin{aligned}
N^{\omega(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 N^{(k)(n-1)} = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega^{(k)} (\varepsilon_u^{(k)(n-1)}) \varepsilon_x^{(k)(n-1)} dz, \\
H^{\omega(n-1)} &= c(N^{(1)\omega(n-1)} - N^{(2)\omega(n-1)}) + M^{(3)\omega(n-1)}, \quad Q^{\omega(n-1)} = 2b_0 \int_{-c}^c G_3 \omega^{(3)} (\varepsilon_u^{(3)(n-1)}) \Psi^{(n-1)} dz, \\
M^{\omega(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 M^{(k)(n-1)} = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega^{(k)} (\varepsilon_u^{(k)(n-1)}) \varepsilon_x^{(k)(n-1)} z dz. \tag{14}
\end{aligned}$$

Рассмотрим систему уравнений (13) в двух областях: I – до точки нерегулярности ($x \leq x_0$); II – после нее ($x > x_0$). В первой из них функция Хевисайда обращается в ноль и $h_2 = h_{20}$, в силу (1). Искомые перемещения в этой области пометим индексом «1» внизу. Система (13) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
a_1 u_{1,xx}^{(n)} + a_6 \Psi_{1,xx}^{(n)} - a_7 w_{1,xxx}^{(n)} &= -p + p_{\omega}^{(n-1)}, \\
a_6 u_{1,xx}^{(n)} + a_2 \Psi_{1,xx}^{(n)} - a_3 w_{1,xxx}^{(n)} - a_5 \Psi_1 &= h_{\omega}^{(n-1)}, \\
a_7 u_{1,xxx}^{(n)} + a_3 \Psi_{1,xxx}^{(n)} - a_4 w_{1,xxxx}^{(n)} &= -q + q_{\omega}^{(n-1)}. \tag{15}
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим систему уравнений (13) во второй области, где функция Хевисайда равна единице ($x > x_0$, после ступеньки) и $h_2 = h_{20} + h_{21}$. Искомые перемещения в этой области пометим индексом «2» внизу. В результате имеем:

$$\begin{aligned}
a_{11} u_{2,xx}^{(n)} + a_{61} \Psi_{2,xx}^{(n)} - a_{71} w_{2,xxx}^{(n)} &= -p + p_{\omega}^{(n-1)}, \\
a_{61} u_{2,xx}^{(n)} + a_{21} \Psi_{2,xx}^{(n)} - a_{31} w_{2,xxx}^{(n)} - a_5 \Psi_2 &= h_{\omega}^{(n-1)}, \\
a_{71} u_{2,xxx}^{(n)} + a_{31} \Psi_{2,xxx}^{(n)} - a_{41} w_{2,xxxx}^{(n)} &= -q + q_{\omega}^{(n-1)}, \tag{16}
\end{aligned}$$

где

$$a_{11} = a_1 + a_{10}, \quad a_{21} = a_2 + a_{20}, \quad a_{31} = a_3 + a_{30}, \quad a_{41} = a_4 + a_{40}, \quad a_{61} = a_6 + a_{60}, \quad a_{71} = a_7 + a_{70}.$$

В случае жесткой заделки левого конца стержня при свободном правом торце должны выполняться условия (нижний индекс указывает область применения искомого решения):

$$\begin{aligned}
x=0: \quad w_1^{(n)} = w_{1,x}^{(n)} = u_1^{(n)} = \Psi_1^{(n)} &= 0; \\
x=l: \quad \Psi_2^{(n)} = 0, \quad N_2^{(n)} = N_2^{\omega(n-1)}, \quad M_2^{(n)} = M_2^{\omega(n-1)}, \quad M_{2,x}^{(n)} = M_{2,x}^{\omega(n-1)}. \tag{17}
\end{aligned}$$

Для шарнирно опертого по обоим торцам стержня граничные условия будут:

$$\begin{aligned}
x=0: \quad w_1^{(n)} = u_1^{(n)} = \Psi_1^{(n)} = 0, \quad M_1^{(n)} = M_1^{\omega(n-1)}; \\
x=l: \quad w_2^{(n)} = u_2^{(n)} = \Psi_2^{(n)} = 0, \quad M_2^{(n)} = M_2^{\omega(n-1)}. \tag{18}
\end{aligned}$$

Если стержень зашцеplen по обоим торцам, то

$$\begin{aligned}
x=0: \quad w_1^{(n)} = w_{1,x}^{(n)} = u_1^{(n)} = \Psi_1^{(n)} &= 0; \\
x=l: \quad w_2^{(n)} = w_{2,x}^{(n)} = u_2^{(n)} = \Psi_2^{(n)} &= 0. \tag{19}
\end{aligned}$$

Выпишем алгебраическую систему восьми уравнений, сшивающих решения систем (15), (16) в точке нерегулярности $x = x_0$. Для этого потребуем выполнения восьми условий сопряжения: равенства в этой точке перемещений и их производных. В результате:

$$\begin{aligned}
\left\langle \Psi_2^{(n)}(x) - \Psi_1^{(n)}(x) \right\rangle_{x=x_0} &= 0, \quad \left\langle \Psi_{2,x}^{(n)}(x) - \Psi_{1,x}^{(n)}(x) \right\rangle_{x=x_0} = 0, \quad \left\langle \Psi_{2,xx}^{(n)}(x) - \Psi_{1,xx}^{(n)}(x) \right\rangle_{x=x_0} = 0, \\
\left\langle w_2^{(n)}(x) - w_1^{(n)}(x) \right\rangle_{x=x_0} &= 0, \quad \left\langle w_{2,x}^{(n)}(x) - w_{1,x}^{(n)}(x) \right\rangle_{x=x_0} = 0, \quad \left\langle w_{2,xx}^{(n)}(x) - w_{1,xx}^{(n)}(x) \right\rangle_{x=x_0} = 0, \\
\left\langle u_2^{(n)}(x) - u_1^{(n)}(x) \right\rangle_{x=x_0} &= 0, \quad \left\langle u_{2,x}^{(n)}(x) - u_{1,x}^{(n)}(x) \right\rangle_{x=x_0} = 0. \tag{20}
\end{aligned}$$

Таким образом, итерационная краевая задача по определению перемещений в упругопластическом трехслойном стержне с нерегулярной границей замыкается присоединением к системе уравнений (13) граничных условий (17), (19) и условий сопряжения (20).

Решение в общем случае деформирования. Величины (14) с индексом $(n-1)$, соответствующие неупругим составляющим в (15)–(20), на первом шаге ($n=1$) принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения и носят название *дополнитель-*

ных внешних нагрузок. Процедура решения сформулированной краевой задачи не отличается от примененной для упругих стержней в работах [7–9]. Поступая подобным образом, в результате искомое решение выписываем в рекуррентном виде:

$$\begin{aligned}\mathfrak{w}^{(n)}(x) &= \mathfrak{w}_1^{(n)}(x) + (\mathfrak{w}_2^{(n)}(x) - \mathfrak{w}_1^{(n)}(x))H(x - x_0), \\ u^{(n)}(x) &= u_1^{(n)}(x) + (u_2^{(n)}(x) - u_1^{(n)}(x))H(x - x_0), \\ w^{(n)}(x) &= w_1^{(n)}(x) + (w_2^{(n)}(x) - w_1^{(n)}(x))H(x - x_0).\end{aligned}\quad (21)$$

Здесь перемещения с нижним индексом 1 соответствуют решению в первой области, перемещения с индексом 2 – решение во второй области:

$$\begin{aligned}\mathfrak{w}_1^{(n)}(x) &= C_{21}^{(n)} \operatorname{sh}(\mathfrak{b}_1 x) + C_{31}^{(n)} \operatorname{ch}(\mathfrak{b}_1 x) + \\ &+ \frac{1}{\beta_1} \left[\operatorname{sh}(\mathfrak{b}_1 x) \int g_1^{(n)}(x) \operatorname{ch}(\mathfrak{b}_1 x) dx - \operatorname{ch}(\mathfrak{b}_1 x) \int g_1^{(n)}(x) \operatorname{sh}(\mathfrak{b}_1 x) dx \right], \\ w_1^{(n)}(x) &= \frac{1}{\alpha_{21}} \left[\alpha_{11} \int \mathfrak{w}_1^{(n)} dx - a_7 L_3^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + a_1 L_4^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_1 C_{11}^{(n)}}{6} x^3 \right] + \\ &\quad \frac{C_{41}^{(n)}}{2} x^2 + C_{51}^{(n)} x + C_{61}^{(n)}, \\ u_1^{(n)}(x) &= \gamma_{31} \mathfrak{w}_1^{(n)} + \frac{1}{\alpha_{21}} \left[-a_4 L_2^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + a_7 L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_7}{2} C_{11}^{(n)} x^2 \right] + C_{71}^{(n)} x + C_{81}^{(n)}, \\ \mathfrak{w}_2^{(n)}(x) &= C_{22}^{(n)} \operatorname{sh}(\beta_2 x) + C_{32}^{(n)} \operatorname{ch}(\beta_2 x) + \\ &\quad \frac{1}{\beta_2} \left[\operatorname{sh}(\beta_2 x) \int g_2^{(n)}(x) \operatorname{ch}(\beta_2 x) dx - \operatorname{ch}(\beta_2 x) \int g_2^{(n)}(x) \operatorname{sh}(\beta_2 x) dx \right], \\ w_2^{(n)}(x) &= \frac{1}{\alpha_{22}} \left[\alpha_{12} \int \mathfrak{w}_2^{(n)} dx - a_{71} L_3^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + a_{11} L_4^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_{11} C_{12}^{(n)}}{6} x^3 \right] + \\ &\quad \frac{C_{42}^{(n)}}{2} x^2 + C_{52}^{(n)} x + C_{62}^{(n)}, \\ u_2^{(n)}(x) &= \gamma_{32} \mathfrak{w}_2^{(n)} + \frac{1}{\beta_{22}} \left[-a_{41} L_2^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + a_{71} L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_{71}}{2} C_{12}^{(n)} x^2 \right] + C_{72}^{(n)} x + C_{82}^{(n)},\end{aligned}\quad (22)$$

где $L_2^{-1}, L_3^{-1}, L_4^{-1}$ – линейные интегральные операторы

$$L_1^{-1}(g) \equiv \int g dx, \quad L_2^{-1}(g) \equiv \iint g dx dx, \quad L_3^{-1}(g) \equiv \iiint g dx dx dx, \quad L_4^{-1}(g) \equiv \iiint g dx dx dx dx;$$

$$\mathfrak{b}_1^2 = \frac{a_1 a_5 \bar{\mathfrak{b}}_{21}}{\bar{\mathfrak{b}}_{21} \bar{\mathfrak{b}}_{31} - \bar{\mathfrak{b}}_{11}^2} > 0, \quad \Gamma_{11} = \frac{a_1 \bar{\mathfrak{b}}_{11}}{\bar{\mathfrak{b}}_{21} \bar{\mathfrak{b}}_{31} - \bar{\mathfrak{b}}_{11}^2}, \quad \Gamma_{21} = \frac{a_6 \bar{\mathfrak{b}}_{21} - a_7 \bar{\mathfrak{b}}_{11}}{\bar{\mathfrak{b}}_{21} \bar{\mathfrak{b}}_{31} - \bar{\mathfrak{b}}_{11}^2}, \quad \Gamma_{31} = \frac{a_3 a_7 - a_4 a_6}{\bar{\mathfrak{b}}_{21}},$$

$$\alpha_{21} \alpha_{31} - \alpha_{11}^2 \neq 0, \quad \alpha_{11} = a_1 a_3 - a_6 a_7, \quad \alpha_{21} = a_1 a_4 - a_7^2, \quad \alpha_{31} = a_1 a_2 - a_6^2,$$

$$\beta_2^2 = \frac{a_{11} a_{51} \alpha_{21}}{\alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{12}^2} > 0, \quad \gamma_{12} = \frac{a_{11} \alpha_{12}}{\alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{12}^2}, \quad \gamma_{22} = \frac{a_{61} \alpha_{22} - a_{71} \alpha_{12}}{\alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{12}^2}, \quad \gamma_{32} = \frac{a_{31} a_{71} - a_{41} a_{61}}{\alpha_{22}},$$

$$\alpha_{22} \alpha_{32} - \alpha_{12}^2 \neq 0, \quad \alpha_{12} = a_{11} a_{31} - a_{61} a_{71}, \quad \alpha_{22} = a_{11} a_{41} - a_{71}^2, \quad \alpha_{32} = a_{11} a_{21} - a_{61}^2.$$

$$g_1^{(n)}(x) = \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} \gamma_{11} h_\omega^{(n-1)} + \gamma_{21} (p - p_\omega^{(n-1)}) + \gamma_{11} \left(\int (q - q_\omega^{(n-1)}) dx + C_{11}^{(n)} \right),$$

$$g_2^{(n)}(x) = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{12}} \gamma_{12} h_\omega^{(n-1)} + \gamma_{22} (p - p_\omega^{(n-1)}) + \gamma_{12} \left(\int (q - q_\omega^{(n-1)}) dx + C_{12}^{(n)} \right).$$

Константы интегрирования $C_{11}^{(n)}, \dots, C_{81}^{(n)}; C_{12}^{(n)}, \dots, C_{82}^{(n)}$ следуют из 8 условий закрепления стержня (17)–(19) и требований (20) по сопряжению решений в точке нерегулярности.

Таким образом, общее рекуррентное решение задачи о деформировании упругопластического трехслойного стержня с нерегулярной нижней границей представлено выражениями (21), (22). Константы интегрирования находятся из систем (17)–(20).

Численные результаты получены для металлополимерного стержня единичной длины с материалами слоев Д16Т–фторопласт–Д16Т.

В стандартном пакете геометрические характеристики $c = 0,09$, $h_1 = h_2 = 0,03$, $h_{20} = 0,02$, $h_{21} = 0,01$. Координата начала ступеньки $x_0 = 0,5$.

Интенсивности нагрузок $p = 0$, $q = -10$ МПа.

Торцы стержня жестко заделаны.

Функция пластичности для несущих слоев ($k = 1, 2$) и функция физической нелинейности для заполнителя приняты в виде [2]:

$$\omega(\varepsilon_u) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_y; \\ A(1 - \varepsilon_y/\varepsilon_u)^\alpha, & \varepsilon_u > \varepsilon_y. \end{cases} \quad (23)$$

Входящие сюда константы для сплава Д16Т: $A = 0,96$, $\alpha = 2,34$, $\varepsilon_y = 0,735$. Для фторопласта: $A_3 = 0,905$, $\alpha_3 = 1,48$, $\varepsilon_s = 3,3\%$, ε_s – аналог предела текучести.

Рис. 2 иллюстрирует сходимость процесса последовательных приближений a – прогиб w (м), b – относительного сдвига ψ . Номер кривой соответствует номеру итерации. Здесь второе приближение отличается от первого примерно на 10 % для прогиба и сдвига. За искомое решение принято 6-е приближение, которое отличается от предыдущего менее чем на 1 %. Результирующий упругопластический прогиб и сдвиг стержня превосходят упругий на 23 % и 25 % соответственно.

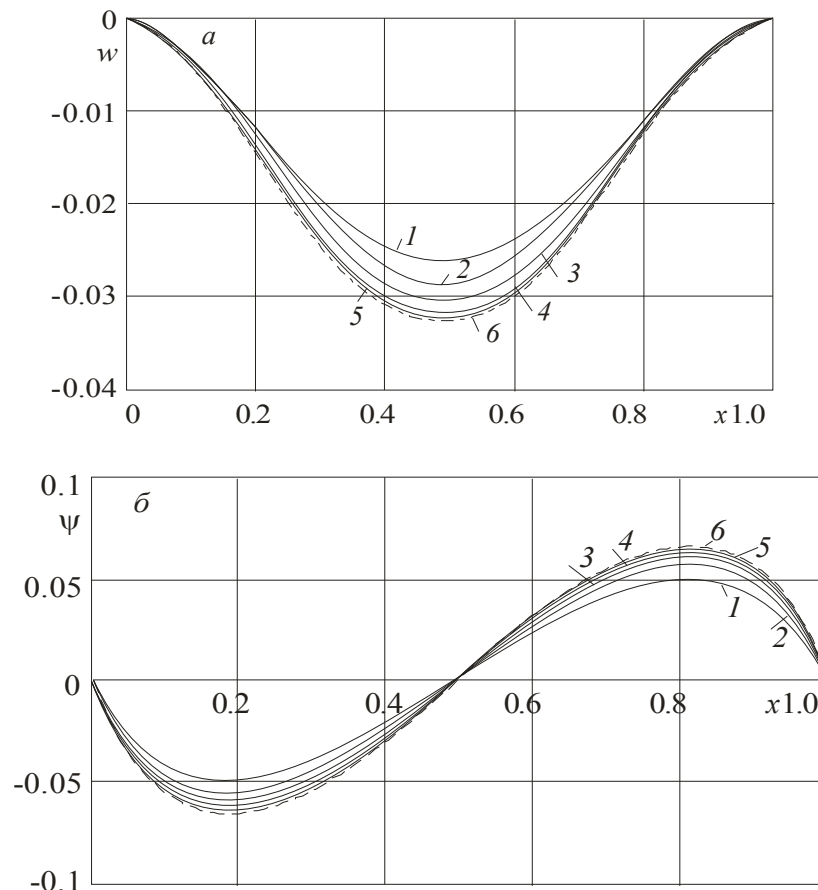


Рисунок 2 – Сходимость метода последовательных приближений

На рис. 3 показаны области пластичности и физической нелинейности в слоях стержня (темная заливка). В несущих слоях области пластичности занимают около 45 % объема, в заполнителе зоны физической нелинейности – 76%.

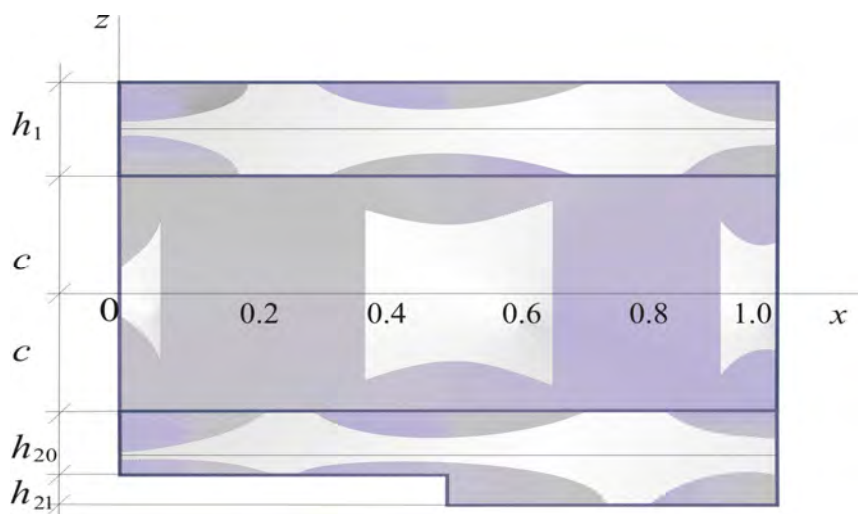


Рисунок 3 – Распределение физической нелинейности в слоях стержня

Изменение нормальных напряжений $\sigma_x^{(k)}$ по толщине пластины на левом торце при упругом и физически нелинейном деформировании иллюстрирует рис. 4: 1 – упругий стержень; 2 – упругопластический. Здесь напряжения во внешних слоях отнесены к $q_1 = 10^8$ Па, в заполнителе – к $q_2 = 10^7$ Па. Их распределение по высоте стержня линейное. За счет наличия ступеньки максимальные напряжения в левом торце на нижней поверхности слоя 2 превосходят напряжения слоя 1 практически на 33 %.

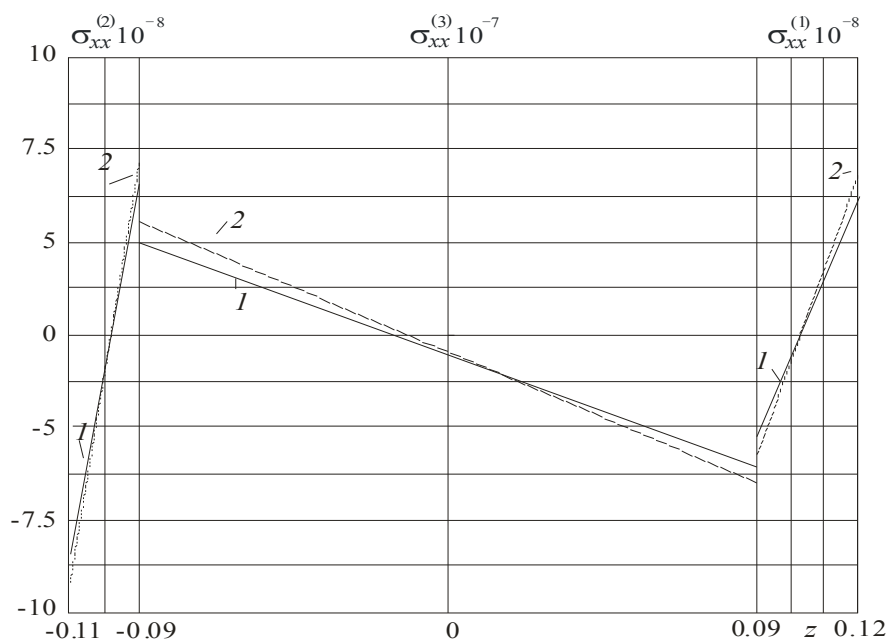


Рисунок 4 – Изменение нормальных напряжений по толщине стержня

Выводы. Приведенная постановка краевой задачи об изгибе упругопластического трехслойного стержня с нерегулярной границей и полученное общее решение (21), (22) позволяют проводить анализ напряженно-деформированного состояния соответствующих элементов конструкций при различных нагрузках, в зависимости от прочностных и геометрических параметров слоев, вида нерегу-

лярности границы. При отсутствии «ступеньки» все приведенные аналитические результаты совпадают с соответствующими решениями для трехслойного стержня постоянной толщины [2].

Резюме

Рассмотрен изгиб упругопластического трехслойного стержня со ступенчато-переменной границей одного из несущих слоев. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета стержня приняты гипотезы ломаной нормали. Деформирование материалов несущих слоев описывается соотношениями теории малых упругопластических деформаций, наполнитель – нелинейно упругий. Получена система уравнений равновесия в перемещениях и ее аналитическое рекуррентное решение. Проведен численный анализ решения.

Литература

1. Поленов, В.С. Распространение волн в насыщенной жидкостью неоднородной пористой среде / В.С. Поленов, А.В. Чигарев // Прикладная математика и механика. – 2010. – Т. 74, № 2. – С. 276–284.
2. Плескачевский, Ю.М. Деформирование металлополимерных систем / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Минск: Бел. наука. 2004. – 386 с.
3. Cheng Zhenqiang, Jemah A.K., Williams F.W. Theory for multilayered anisotropic plates with weakened interfaces // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1996. 63, N 4. P. 1019–1026.
4. Ebsioglu J. K. On the theory on sandwich panels in the reference state // Internal. J. Eng-ng Sci. 1966. N 6. P. 166–194.
5. Белосточный, Г.Н. Оболочки и геометрически нерегулярные пластинки с термочувствительной толщиной / Г.Н. Белосточный, Е.А. Русина // Докл. Росс. Акад. естественных наук. Поволжское межрегиональное отд. Саратов. СГТУ. – №1. 1999. – С. 28–37.
6. Игнатъев, О. В. Вариационно-разностный метод в нелинейной теории оболочек ступенчато-переменной толщины // О. В. Игнатъев, В. В. Карпов, В. Н. Филатов. – Волгоград. 2001. – 210 с.
7. Плескачевский, Ю. М. Изгиб трехслойного стержня с нерегулярной границей / Ю.М. Плескачевский., Е.Э. Старовойтова // Механика машин, механизмов и материалов. 2008. – № 3 (4). – С. 52–55.
8. Плескачевский, Ю. М. Изгиб трехслойного металлополимерного стержня ступенчато-переменной толщины / Ю.М. Плескачевский., Е.Э. Старовойтова // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Сборник научных работ / Днепропетровский национальный университет. Днепропетровск: ІМА-пресс. 2009. – Вып 13. – С. 186–192.
9. Старовойтова, Е.Э. Изгиб трехслойного стержня с нерегулярной границей локальными нагрузками / Е.Э. Старовойтова // Материалы, технологии, инструменты. 2009. – № 1 (14). – С. 10–16.
10. Ильюшин, А.А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации / А.А. Ильюшин.– М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.

Summary

The bending of three-layer elastic-plastic beam with stepped variable thickness of one of two stiff shells is considered. To describe kinematics of asymmetrical over thickness core pack the hypotheses of the broken normal are accepted. Stiff shells deformation is circumscribed by correlations of small elastic-plastic deformations theory, filler is elastic nonlinear. A system of equilibrium equations and its analytical iterative solution in terms of displacements have been derived. Numerical results were adduced.

Поступила в редакцию 11.12.2012