УДК 539.3

ИЗГИБ С РАСТЯЖЕНИЕМ ТРЕХСЛОЙНОГО ТЕРМОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ

[1]Старовойтов Э.И., [1]Попченко А.В., [2]Тарлаковский Д.В.

[1]Белорусский государственный университет транспорта, Гомель
[2]Московский авиационный институт (госуниверситет), Москва

Введение. Неоднородные конструкции нашли широкое применение в различных областях машиностроения и в строительстве, поэтому актуальна разработка методов их прочностного расчета при различных нагрузках. В работах [1–11] приведены результаты по однократному квазистатическому и динамическому деформированию трехслойных элементов конструкций, связанных и несвязанных с винклеровым основанием. Здесь рассмотрен изгиб с растяжением несимметричного по толщине трехслойного стержня в температурном поле.

Постановка задачи. Рассмотрим трехслойный стержень с жестким заполнителем (рис. 1). Систему координат x, y, z свяжем со срединной плоскостью заполнителя. Принимаем, что в тонких несущих слоях *1*, *2* справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине сравнительно толстом заполнителе *3* нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(x)$.

На внешний слой стержня действует равномерно распределенная силовая нагрузка p, q. Температура T в стержне считается известной. Через $w(x)$ и $u(x)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя. На торцах предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев.

С помощью введенных гипотез, продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ выражаются через три искомые функции $u(x)$, $\psi(x)$ и $w(x)$:

$$u^{(1)} = u + c\text{ш} - zw,_x \quad (c \le z \le c + h_1), \quad u^{(3)} = u + z\text{ш} - zw,_x \quad (-c \le z \le c),$$

$$u^{(2)} = u - c\text{ш} - zw,_x \qquad (-c - h_2 \le z \le -c), \tag{1}$$

где z – координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате, верхний индекс k – номер слоя.

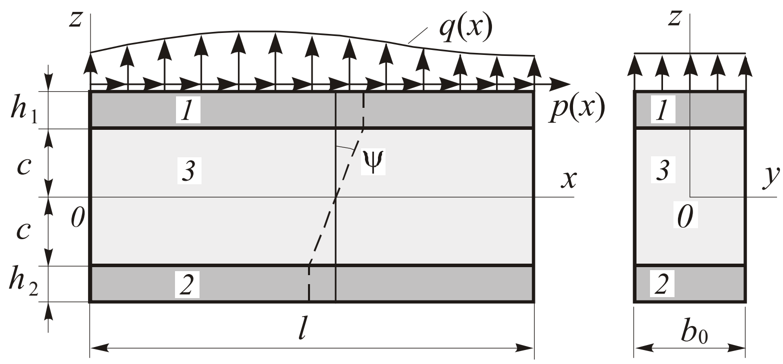

Рисунок 1 – Расчетная схема трехслойного стержня

Компоненты тензора деформаций ε_{ij} следуют из соотношений Коши и выражений (1), напряжения – из закона Гука.

Для связи напряжений и деформаций в слоях используем термоупругие соотношения закона Гука (2) в девиаторно-шаровой форме

$$s_{xx}^{(k)} = 2G_k(T_k)\text{э}_{xx}^{(k)}, \quad s_{xz}^{(3)} = 2G_3\text{э}_{xz}^{(3)},$$

$$\text{у}^{(k)} = 3K_k(T_k)(\text{e}^{(k)} - \alpha_{0k}T_k), \tag{2}$$

где $s_{xx}^{(k)}$, $\text{э}_{xx}^{(k)}$ – девиаторные, $\text{у}^{(k)}$, $\text{e}^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций, G_k, K_k – температурно зависимые модули сдвига и объемного деформирования [9, 10], α_{0k} – коэффициент линейного температурного расширения материала k-го слоя.

Уравнения равновесия трехслойного стержня получим, используя принцип возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta A = \delta W, \tag{3}$$

где δA, δW – вариации работ внешних сил и внутренних напряжений

$$\delta A = \iint_S (p\delta u + q\delta w)dS = b_0 \int_0^l (p\delta u + q\delta w)dx .$$

$$\delta W = \iint_S \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} (\text{у}_{xx}^{(k)}\delta\varepsilon_{xx}^{(k)} + 2\sigma_{xz}^{(3)}\delta\varepsilon_{xz}^{(3)}\delta_{k3})\, dz\;\; dS = b_0 \int_0^l \left[\sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)}\delta\varepsilon_{xx}^{(k)}dz + 2\int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)}\delta\varepsilon_{xz}^{(3)}dz \right] dx , \tag{4}$$

где $\sigma_{xx}^{(k)}$, $\varepsilon_{xx}^{(k)}$ – напряжения и деформации.

С помощью соотношений (1) вариации деформаций в (4) выражаются через вариации независимых перемещений δu, $\delta\psi$ и δw. Подставив полученные выражения в уравнение (3) и приравняв нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим в результате систему дифференциальных уравнений равновесия трехслойного стержня в перемещениях:

$$\begin{gathered} a_1 u,_{xx} + a_6 \text{щ},_{xx} - a_7 w,_{xxx} = -p , \\ a_6 u,_{xx} + a_2 \text{щ},_{xx} - a_3 w,_{xxx} - a_5 \text{ш} = 0 , \\ a_7 u,_{xxx} + a_3 \text{щ},_{xxx} - a_4 w,_{xxxx} = -q . \end{gathered} \tag{5}$$

Коэффициенты, входящие в систему (5) следующие

$$a_1 = K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + 2K_3^+ c \quad , \quad a_2 = c^2 \left[K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + \tfrac{2}{3} K_3^+ c \right] ,$$

$$a_3 = c \left[K_1^+ h_1 \left(c + \tfrac{1}{2} h_1 \right) + K_2^+ h_2 \left(c + \tfrac{1}{2} h_2 \right) + \tfrac{2}{3} K_3^+ c^2 \right] ,$$

$$a_4 = K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \tfrac{1}{3} h_1^2 \right) + K_2^+ h_2 \left(c + c h_2 + \tfrac{1}{3} h_2^2 \right) + \tfrac{2}{3} K_3^+ c^3 ,$$

$$a_5 = 2G_3 c \ , \ a_6 = c \left[K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2 \right] \ , \ a_7 = K_1^+ h_1 \left(c + \tfrac{1}{2} h_1 \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \tfrac{1}{2} h_2 \right) .$$

Коэффициенты a_i зависят от жесткостных параметров слоев и через них от температуры:

$$G_k(T_k) \equiv G_k(T_{0k}) , \quad K_k(T_k) \equiv K_k(T_{0k}) , \quad T_{0k}(t) = \frac{1}{h_k} \int_{h_k} T_k(z,\ t)\, dz .$$

Решение задачи термоупругости. Отметим, что температура в уравнения равновесия (5) не входит, поэтому можно воспользоваться аналитическим решением, полученным в [8, 9] при изотермической нагрузке трехслойного стержня. В результате при консольном закреплении левого торца стержня имеем:

$$\psi = C_2 \cdot \mathrm{sh}(\beta x) + C_3 \cdot \mathrm{ch}(\beta x) - \frac{1}{\beta^2}(\gamma_2 p + \gamma_1 q(x - l))$$

$$u = \gamma_3 \psi + \frac{1}{\alpha_2}(-\frac{1}{2} a_4 p x^2 + \frac{1}{6} a_7 q x^3 - \frac{1}{2} a_7 q l x^2) + C_7 x$$

$$w = \frac{1}{\alpha_2}\left[\alpha_1 \int \psi dx - \frac{1}{6} a_7 p x^3 + \frac{1}{6} a_1 q x^3 (\frac{1}{4} x - l) \right] + \frac{1}{2} C_4 x^2 + C_6 , \tag{6}$$

где

$$\int \psi dx = \frac{1}{\beta}\left(C_2 \mathrm{ch}(\beta x) + C_3 \mathrm{sh}(\beta x) \right) - \frac{x}{\beta^2}\left(\gamma_2 p + \gamma_1 q(\tfrac{1}{2} x - l) \right) ,$$

$$C_2 = \frac{1}{\beta^2 \mathrm{sh}(\text{в} l)}\left[\text{г}_2 p \left(1 - \mathrm{ch}(\text{в} l) \right) + \text{г}_1 q l \cdot \mathrm{ch}(\text{в} l) \right] , \quad C_3 = \frac{1}{\beta^2}\left[\text{г}_2 p - \text{г}_1 q l \right] ,$$

$$C_4 = \frac{1}{\alpha_2}\left[a_7 \left(p l + 3\sum_{k=1}^{3} K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k dz \right) + a_1 \left(\frac{q l^2}{2} - 3\sum_{k=1}^{3} K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k z dz \right) \right] , \ C_6 = -\frac{\alpha_1}{\beta \alpha_2} C_2 ,$$

$$C_7 = \frac{1}{\alpha_2}\left[a_4\left(pl + 3\sum_{k=1}^{3} K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k dz\right) + a_7\left(\frac{ql^2}{2} - 3\sum_{k=1}^{3} K_k \alpha_k \int_{h_k} T_k z dz\right)\right].$$

$$\beta^2 = \frac{a_1 a_5 \alpha_2}{\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1^2} > 0, \quad г_1 = \frac{a_1\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1^2}, \; г_2 = \frac{a_6\alpha_2 - a_7\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1^2}, \; г_3 = \frac{a_3 a_7 - a_4 a_6}{\alpha_2}.$$

Выражения обобщенной внутренней продольной силы и изгибающего момента через перемещения (6) и температуру будут

$$N = b_0 \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} у_{xx}^{(k)} dz = b_0\left(a_1 u,_x + a_6 \psi,_x - a_7 w,_{xx} - 3\sum_{k=1}^{3} K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T_k dz\right),$$

$$M = b_0 \sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z\, dz = b_0\left(a_7 u,_x + a_3 \psi,_x - a_4 w,_{xx} - 3\sum_{k=1}^{3} K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T_k z dz\right).$$

Числовые результаты получены для трехслойного стержня, слои которого выполнены из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т. Термомеханические характеристики этих материалов приведены в таблицах 1, 2. Параметры слоев: $h_1 = h_2 = 0{,}03$, $c = 0{,}09$; интенсивность распределенной нагрузки $q = -0{,}15$·МПа, $p = 10$ МПа. Температуру принимаем одинаковой во всех слоях стержня. Изменение параметров упругости несущих слоев описывается известной линейной формулой Белла [2]:

$$\{G(T), K(T), E(T)\} = \{G(0), K(0), E(0)\}\, \phi(T),$$

$$\phi(T) = \begin{cases} 1, & 0 < T/T_m \le 0{,}06, \\ 1{,}03(1 - T/(2T_m)), & 0{,}06 < T/T_m \le 0{,}57, \end{cases}$$

где T_m – температура плавления материала; $G(0)$, $K(0)$, $E(0)$ – значения модулей упругости при так называемом нулевом напряжении, которые можно определить, зная G_0 при некоторой температуре (например, при $T_0 = 293$ К), тогда $G(0) = G_0 / \phi(T_0)$.

Таблица 1 – Термомеханические характеристики сплава Д16Т

Параметр	Значение	Параметр	Значение
$G(0)$, МПа	$0{,}3075 \cdot 10^5$	α_0, 1/K	$24{,}3 \cdot 10^{-6}$
$K(0)$, МПа	$0{,}9214 \cdot 10^5$	T_0, K	293
G_0, МПа	$0{,}267 \cdot 10^5$	T_m, K	933
K_0, МПа	$0{,}8 \cdot 10^5$		

Таблица 2 – Термомеханические характеристики политетрафторэтилена

Параметр	Значение	Параметр	Значение
G_0, МПа	90	γ	1,27
K_0, МПа	4700	T_m, K	600
B	24,44	α_0,1/K	$1{,}78 \cdot 10^{-5}$

В полимерном заполнителе зависимость параметров упругости от температуры принимается в виде, предложенном в [10]:

$$G_3(T_3) = \frac{G_3(T_0)}{\phi_3(T_3)}, \; K_3(T_3) = \frac{K_3(T_0)}{\phi_3(T_3)}, \; \phi_3(T) = 1 + B\left(\frac{T - T_0}{T_m}\right)^{\gamma}.$$

На рисунке 2 показано изменение вдоль оси стержня (*а*) – продольного перемещения $u(x)$, (*б*) – прогиба $w(x)$, (*в*) – относительного сдвига $\psi(x)$: *1* – изотермический изгиб ($T_1 = 293$ К), *2* – термосиловое нагружение ($T_2 = 343$ К), *3* – термосиловое нагружение ($T_3 = 393$ К). Нагревание стержня на 50 К приводит к увеличению максимальных перемещений на 68–71 % по сравнению с изотермическим деформированием. При нагревании на 100 К подобное увеличение достигнет 132–138 %.

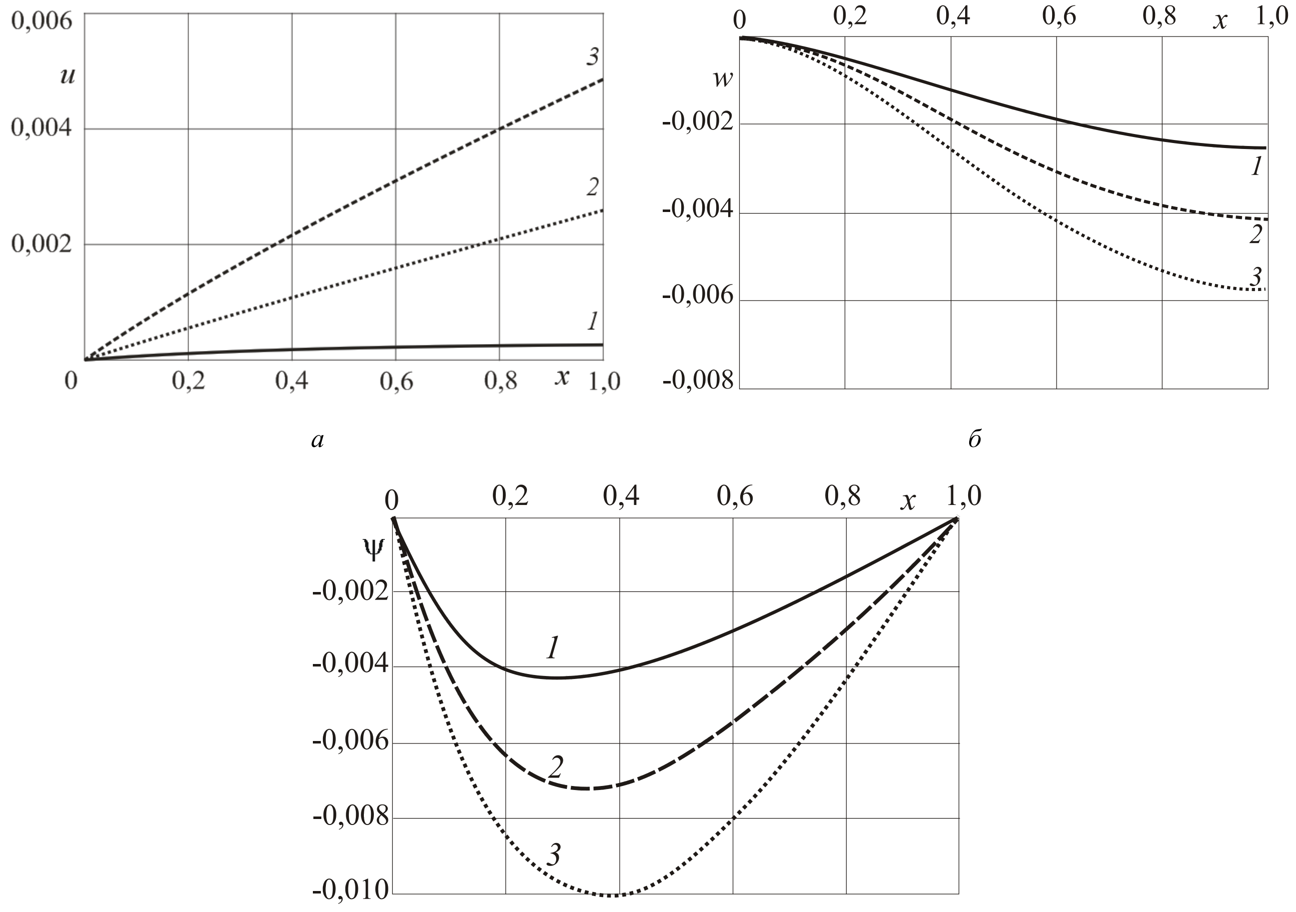

Рисунок 2 – Изменение перемещений вдоль оси стержня

Распределение по поперечному сечению $x = 0$ линейной деформации ε_{xx} и нормальных напряжений σ_{xx} показано на рис. 3, 4. Нумерация кривых прежняя. Деформации на склейках слоев непрерывны, при нагревании стержня графики смещаются практически параллельно в положительную область. Напряжения достигают максимума в заделке. Воздействие температуры приводит к увеличению экстремумов напряжений во внешних слоях на 14–43 %, в заполнителе – на 20–60 %.

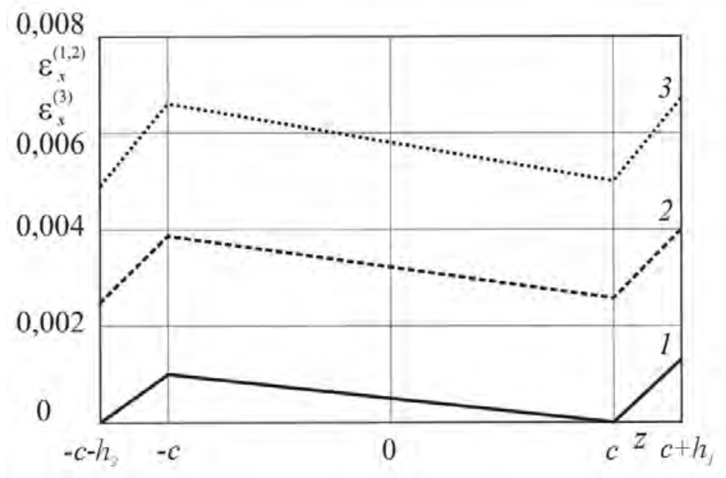

Рисунок 3 – Линейные деформации в поперечном сечении

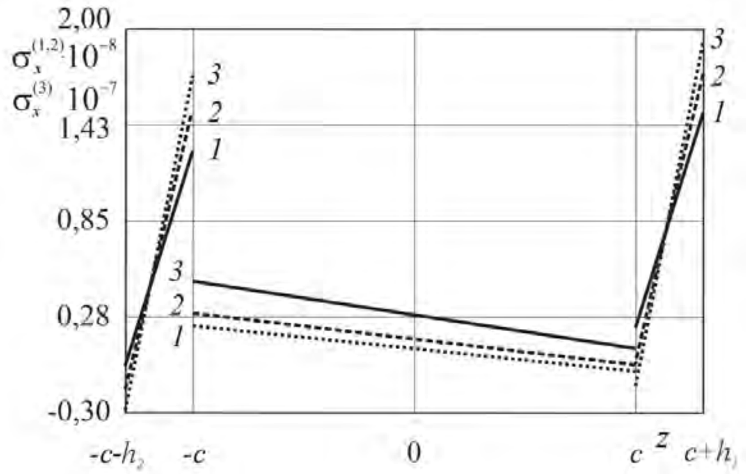

Рисунок 4 – Нормальные напряжения в поперечном сечении

Выводы. Приведенная методика и решение краевой задачи позволяют проводить анализ напряженно-деформированного состояния трехслойного стержня при изгибе в температурном поле.

Литература

1. Cheng, Z. Theory for multilayered anisotropic plates with weakened interfaces / Cheng Z., Jemah A.K., Williams F.W. // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1996. – 63, N 4. P. – 1019–1026.
2. Горшков, А.Г. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2000. № 6. С. 91-98.
3. Starovoitov, E.I. Vibrations of circular sandwich plates under resonance loads / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. 2003. T. 39. № 12. С. 1458-1463. 7
4. Горшков, А.Г. Колебания трехслойных стержней под действием нагрузок различных форм / А.Г. Горшков, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. № 1. С. 45-52.
5. Старовойтов, Э.И. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Е.П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2006. № 3. С. 45-50.
6. Старовойтов, Э.И. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко, М. Сулейман // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 4. С. 55-62.
7. *Leonenko, D.V.* Thermoplastic strain of circular sandwich plates on en elastic base / *D. V. Leonenko, E.I. Starovoitov* // Mechanics of Solids. – 2009, Vol. 44, N 5. – P. 744–755.
8. Starovoitov, E.I. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, № 2. – P. 291–298.
9. Плескачевский, Ю. М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
10. Starovoitov, E. I. Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity / E. I. Starovoitov, F.B. Nagiyev – Apple Academic Press, Toronto, New Jersey, Canada, USA, 2012. – 346 p.
11. Поленов, В.С. Распространение волн в насыщенной жидкостью неоднородной пористой среде / В.С. Поленов, А.В. Чигарев // Прикладная математика и механика. – 2010. –Т. 74, № 2. – С. 276-284.

Summary

The bending with tension of three-layer elastic beam in a temperature field is considered. To describe kinematics of asymmetrical over thickness core pack the hypotheses of the broken normal are accepted. A system of equilibrium equations in terms of displacements has been derived. Analytical deciding a problem are received and their numeric analysis are conducted.

Поступила в редакцию 23.10.2012