

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СКМ «МАТНЕМАТИСА» ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ В БИОМАТЕРИАЛАХ

¹Чигарев А.В., ²Борисов А.В.

¹ УО Белорусский национальный технический университет

² Филиал ФГБОУ ВПО «НИУ Московский энергетический институт (ТУ)» в г. Смоленске

Введение. Используем в исследовании статистическую модель разрушения опорно-двигательного аппарата человека, предложим функции распределения размеров микротрещины в биологическом материале и получим на ее основе статистические характеристики.

Рассмотрим статистические флуктуации и механизм роста микротрещин в костной системе человека. Каждый из биологических материалов (надкостница, кость, гиалиновый слой и т.д.) имеет собственную, присущую только ему, микроструктуру. Эта микроструктура всегда неоднородна. К неоднородностям следует отнести дефекты, фазовые структуры и композиции, возникающие в процессе развития и жизнедеятельности биологических организмов. Такая структурная неоднородность обуславливает статистическую природу закона усталости и ведет к флуктуации темпа роста микротрещины. Флуктуация темпа роста микротрещины теоретически может быть получена путем учета результатов всех видов дефектов. Практически, это невозможно сделать. Типы дефектов очень сложны, их распределение неоднородно, а количество велико. В нашем случае, оценивается микроструктура материала. Получается стохастическая флуктуация неоднородности структуры, т.е. статическая пространственная флуктуация, являющаяся независимой от времени.

При движении и нагрузке в биологических тканях появляются и растут микротрещины. Положение концов микротрещин непрерывно изменяется в пространстве. Следовательно, темп роста микротрещин изменяется стохастически.

Постановка задачи определения функции плотности вероятности появления и распространения трещины. Рост трещины обуславливается двумя факторами, имеющими место в суставе человека. Во-первых, это регулярная, циклическая сила, возникающая при ходьбе, при выполнении определенных действий на работе, в быту и т.п. Подобные силы действуют на растяжение и сжатие тканей сустава, имеют значения, не превышающие предела упругости элементов сустава, не приводящие к остаточным деформациям или немедленному разрушению. Под действием таких сил происходит накопление микроповреждений, локальных микротрещин в суставе. Идет скрытая фаза разрушения, накопления микроповреждений, сустав при этом является еще здоровым и полнофункциональным. Подобная детерминированная нагрузка приводит к тому, что трещина должна расти равномерно прямолинейно.

Во-вторых, на сустав действует нерегулярная, стохастическая составляющая нагрузки, возникающая в результате случайных перегрузок, например во время падений, занятий спортом и т.п. В суставе имеют место неоднородности структуры материала, другие микротрещины и т.п. Под действием второго фактора в одномерном случае изменяется только скорость роста микротрещины, а в дву- и трехмерном случаях изменяется и направление роста микротрещины, реализуются случайные блуждания конца трещины в суставе. В реальности, в трехмерном случае трещина растет как монета, постепенно увеличивая свой радиус, ее рост в основном, происходит в плоскости, с небольшим изгибом, поэтому в модели, приближенной к реальности необходимы все три пространственные координаты.

Рассмотрим работу опорно-двигательного аппарата человека в течение всей жизни. Количество воздействий на его элементы очень велико. Нагрузки носят нестационарный, случайный характер. Так как речь идет о живом организме, то эмпирической информации о свойствах костей и суставов человека недостаточно. Их принципиально невозможно получить из-за гуманных соображений. Ткани неживого человека не отражают в полной мере свойства живой ткани. В данном случае, наиболее адекватным биологическому прототипу является вероятностный подход к описанию распространения микротрещин.

Предположим, что направление движения конца трещины и скорость ее распространения в каждый момент времени определяются только действующими нагрузками и свойствами самого мате-

риала сустава и не зависят от предыдущего направления движения в предыдущий момент времени. Тогда поведение конца движения микротрещины является марковским случайным процессом. В одномерном случае, возможно следующее описание распространения трещины с использованием уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова [1].

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[K_1(x,t)w(x,t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}[K_2(x,t)w(x,t)] \quad (1)$$

где $w(x,t)$ – функция плотности распределения значения координаты конца трещины к моменту времени t ; $K_1(x,t)$ – коэффициент сноса в биологическом материале; $K_2(x,t)$ – коэффициент диффузии в биологическом материале; t – время распространения трещины; x – координата конца трещины.

Это дифференциальное уравнение в частных производных параболического типа. На его основе опишем кинематику распространения трещины в элементах опорно-двигательного аппарата человека.

Численное решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова. Проведем численное решение исходного уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (1) в системе компьютерной математики «Mathematica» [2], встроенной функцией `NDSolve`. Опишем алгоритм и команды решения.

1. Задаем исходное уравнение (1) с определенными коэффициентами [3-8], и записываем его в переменную `Eq`.

```
Eq=D[w[x,t],t]==-
-D[(0.7*x+0.8)*w[x,t],x]+(1/2)D[0.5*w[x,t],{x,2}]
```

2. Численно решаем записанное дифференциальное уравнение в частных производных с нормальным начальным и соответствующими граничными условиями. Его решение записываем в переменную `SolEq`.

```
SolEq=NDSolve[{Eq,w[x,0]==(1/Sqrt[2*\[Pi]])*Exp[-
x^2],w[0,t]==(1/Sqrt[2*\[Pi]])*Exp[-t^2],w[6,t]==
(1/Sqrt[2*\[Pi]])*E^-36},w,{x,0,6},{t,0,6}]
```

3. Строим график полученного решения, который представлен поверхностью в трехмерном пространстве.

```
Plot3D[Evaluate[w[x,t]/.First[SolEq]],{x,0,6},
{t,0,6},Boxed->False,AxesLabel->{"x","t","w"}]
```

В результате получаем следующий график (рис. 1) Таким образом, найдена функция плотности вероятности роста трещины в твердых тканях человека численно. Описано поведение функции плотности вероятности. Установлено, что наиболее вероятно появление трещин небольшого размера в начальный период и рост размера трещин с увеличением времени процесса.

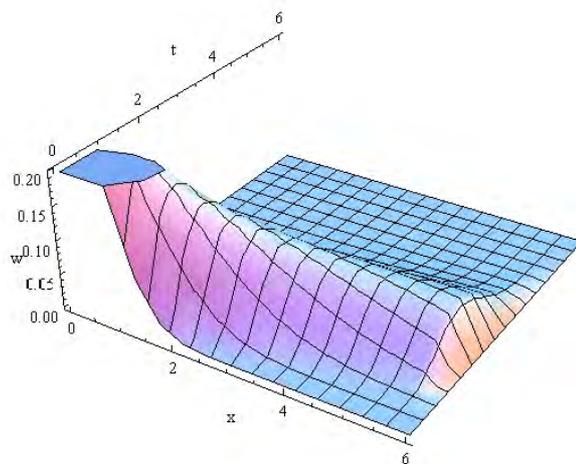


Рисунок 1 – Результат численного решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова

Анализируя график процесса (рис. 1), видно, что наиболее вероятно появление микротрещин в первой половине времени процесса. По рис. 1 видно, что вероятность появления трещины зависит от длины трещины. С ростом длины трещины вероятность ее появления уменьшается. Рост длины тре-

щины имеет сопротивление и, чтобы трещина росла, необходимо прикладывать дополнительное внешнее усилие.

Физический смысл данного решения заключается в том, что микротрещины малого размера возникают на начальной стадии процесса и вероятность их возникновения достаточно высока, тогда как трещины более значительные по размеру возникают на последующих стадиях процесса и с ростом времени их размер увеличивается, но при этом значительно снижается вероятность появления больших трещин.

С точки зрения биомеханики это означает, что вначале идет скрытая фаза накопления микроповреждений, а затем, с возрастом, возникают макроскопические трещины, которые приводят к нарушению функционирования опорно-двигательного аппарата человека.

Таким образом, сначала идет инкубационный период, потом накопление локальных микроповреждений в биологических тканях. Затем микротрещины сливаются в магистральную трещину и, когда она достигает границ материала, то происходит его разрушение.

Определение среднего времени достижения трещиной границ сустава. Найдем среднее время первого достижения трещиной границ сустава. Уравнение для времени достижения границы процессом $T(a, x_0, b)$ получено в предположении о стационарности процесса.

$$-1 = K_1(x_0) \frac{dT}{dx_0} + \frac{1}{2} K_2(x_0) \frac{d^2T}{dx_0^2} \quad (2)$$

Проводя численные расчеты при значениях границ, соответствующим характерным размерам в суставе $a = 0$, $b = 6$, для времени достижения границы из соответствующего начального положения, решим численно исходное дифференциальное уравнение (2) при тех же значениях параметров и нормальными граничными условиями.

Решение проведем в СКМ Mathematica. Задаем исходное уравнение:

```
Eq=-1==D[w[x],x]+(1/2)D[2*w[x],{x,2}]
```

Решаем его:

```
SolEq=NDSolve[{Eq,w[0]==(1/Sqrt[2*\[Pi]])*Exp[-1^2],w[6]==(1/Sqrt[2*\[Pi]])*E^-36},w,{x,0,6}]
```

В качестве результата строим график (рис. 2):

```
Plot[Evaluate[w[x]/.First[SolEq]],{x,0,6},AxesLabel->{"x0","T"}]
```

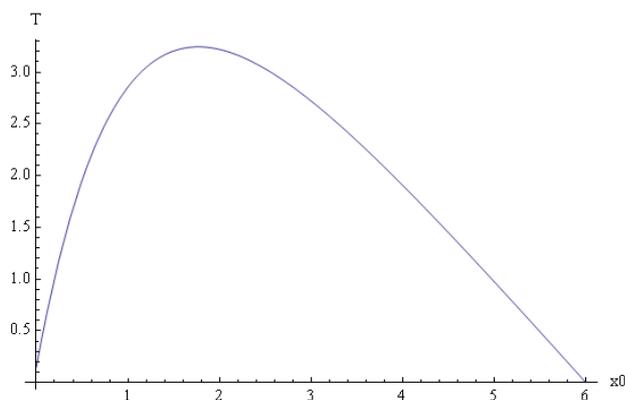


Рисунок 2 – Зависимость среднего времени первого достижения трещиной границы от начального положения начальной микротрещины

Таким образом, нами получены оценки среднего времени достижения трещиной границы сустава.

Так как выше была получена плотность распределения двумерной случайной величины, $w(x, t)$, математическое ожидание и дисперсия определяются соотношениями:

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t w(x, t) dx dt, \quad D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (t - M(t))^2 w(x, t) dx dt. \quad (3)$$

Так как функция плотности вероятности получается в результате численного решения дифференциального уравнения в частных производных на заданном отрезке интегрирования. Следовательно функцию плотности вероятности необходимо рассматривать как кусочную функцию, определен-

ную только в на отрезке интегрирования. Следовательно, пользуясь аддитивностью интеграла относительно отрезка интегрирования (свойство выполняется и для кратных интегралов), разбиваем несобственные интегралы на три интеграла, два из которых, несобственные, записанные вне отрезка интегрирования равны нулю, т.к. до рождения и после окончания жизни человека функцию плотности вероятности можно считать нулем, и определенного интеграла на отрезке интегрирования. Тогда вычисления по формулам (30) для $w(x, t)$ с данными, соответствующими модели суставов человека и с нормированными размерами сустава и продолжительностью жизни приводят к следующим значениям:

$$M(t) = 0,15, D(t) = 0,06.$$

Полученные математические ожидания показывают, что среднее время достижения подобных размеров 15% от продолжительности жизни, далее размер микротрещин (см. рис. 1) в течение жизни увеличивается, вероятность их появления снижается, что и наблюдается на практике. Далеко не все люди к старости имеют заболевания опорно-двигательного аппарата, связанные с накоплением микроразрушений.

Выводы.

1. Построено численное решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова применительно к одномерной задаче распространения трещины в биологическом материале в среде системы компьютерной математики.

2. Решена задача нахождения среднего времени первого достижения трещиной границы от начального положения микротрещины.

Резюме

В статье рассмотрена предложенная авторами стохастическая модель на основе марковских цепей, описывающая накопление повреждений в элементах опорно-двигательного аппарата человека. Проводится численное решение стохастического уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова в СКМ «Mathematica» и графическая визуализация решения дифференциального уравнения. На основании полученного решения рассчитано среднее время достижения трещиной границ сустава

Литература

1. Казаков В.А. Введение в теорию Марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. – М.: «Советское радио», 1973. – 232 с.
2. Дьяконов В.П. Mathematica 5.1/5.2/6 в математических и научно-технических расчетах. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2008. – 744 с.
3. Чигарев А.В., Борисов А.В. Предельные нагрузки в суставах человека. // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева Серия: Механика предельного состояния. 2010. №2 (8). С. 548–552.
4. Чигарев А.В., Михасев Г.И. Борисов А.В. Биомеханика. – Минск: Изд-во Гревцова, 2010. – 284 с.
5. Чигарев А.В., Борисов А.В. Биомеханика ходьбы человека. Учебное пособие. – М.: Издательство Спутник+, 2009. – 200 с.
6. Чигарев А.В., Борисов А.В. Диффузионная модель разрушения элементов опорно-двигательного аппарата человека. // Российский журнал биомеханики. 2012. Т. 16, № 1 (55). С. 22-37.
7. Чигарев А.В., Борисов А.В. Математическая модель взаимодействия деформируемых твердых тел применительно к оценке нагруженности коленного сустава человека. // Механика машин, механизмов и материалов. Международный научно-технический журнал. № 2 (7), Минск, 2009. С. 83-86.
8. Chigarev A.V., Borisov A.V. Mathematical Modeling of Human Posture Balance When Standing on One Foot. // CET Vol. 1 No. 1, 2012 PP.12-17.

Summary

The work deals with the proposed by the authors stochastic model based on Markovian chains which describes damage accumulation in the elements of a human locomotorium. The numerical solution of Fokker-Plank-Kolmogorov equation in the computer mathematics system “Mathematica” and the graphical visualization of the obtained solution are carried out. On the basis of the obtained solution the average time of achieving the joint-border by the crack is calculated.

Поступила в редакцию 03.10.2012