

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВУСТЕННОЙ УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ, ОСНОВАННОЕ НА НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Михасев Г.И., Шейко А.Н.

Белорусский государственный университет, Минск

Введение. Уникальные свойства углеродных нанотрубок (УНТ) вызвали огромный интерес у исследователей, занимающихся моделированием и созданием нового поколения композитных материалов. Известно, что существуют два подхода к исследованиям УНТ: на основе атомарных или молекулярных моделей и на базе моделей классической механики сплошных сред. Очевидно, что оба подхода имеют свои недостатки [1]. Атомистическое моделирование достаточно сложно провести, требует больших затрат вычислительных ресурсов и для анализа объектов относительно больших размеров не подходит. В то же время применимость методов классической механики сплошных сред к наноразмерными объектами вызывает сомнения [2, 3]. Было выполнено много работ, показавших существенные различия в результатах, полученных по атомистическим моделям и моделям классической механики. Неудачные попытки применить континуальные модели для изучения механических свойств наноразмерных структур частично объясняются тем, что эти модели не учитывают присущие низкоразмерным объектам зависимости предсказуемых свойств от микроструктуры материала.

В последнее время, в связи с ограниченностью классических континуальных моделей в исследовании наноразмерных структур, появилось достаточно много работ, в которых используется нелокальный континуальный подход, предложенный Эрингеном [4, 5]. Согласно нелокальному закону физического состояния Эрингена напряженное состояние в данной точке является функцией деформаций в каждой точке тела. В работе [6] результаты анализа динамического поведения УНТ, предсказываемые моделью нелокальной упругости, были сопоставлены с результатами, полученными на основе молекулярной динамики, и показали хорошую согласованность в широком диапазоне частот. Впоследствии появилось огромное количество работ, в которых УНТ рассматриваются с позиций нелокальной теории оболочек с учетом различных усложняющих факторов и, в частности, с учетом наличия анизотропии упругих свойств, зависящей от хиральности УНТ, зависимости эффективных модулей упругости от размеров УНТ и вида внешней нагрузки и т.п. Однако, в подавляющем числе известных работ механическое поведение УНТ, внедренной в упругую матрицу, исследовалось без учета начальных напряжений, вызванных реакцией окружающей среды. При этом, наиболее изучены оказываются одностенные УНТ, а число работ, в которых детально исследованы механические свойства многостенных и, в частности двустенных УНТ, крайне ограничено.

Целью данной работы является вывести уравнения движения двустенной УНТ, находящейся в упругой среде, с использованием нелокальной теории ортотропных оболочек Флюгге, и на их основе исследовать собственные формы колебаний в зависимости от размеров УНТ, числа волн в окружном и осевом направлениях. Особенностью данной работы, по сравнению с ранее проведенными исследованиями [7-9], является учет начальных мембранных усилий в нанооболочке, обусловленных действием внешней нагрузки и/или реакцией окружающей упругой среды.

Система координат. Для описания двустенной углеродной нанотрубки используем механическую систему состоящую из двух концентрически вложенных цилиндрических оболочек. Изображение двустенной углеродной нанотрубки лежащей в упругой среде представлено на рис. 1. Здесь $R_j, j = 1, 2$ — радиусы соответствующих слоев, x — безразмерная осевая координата, а φ — угол. Направления координатных осей указаны на рис. 1.

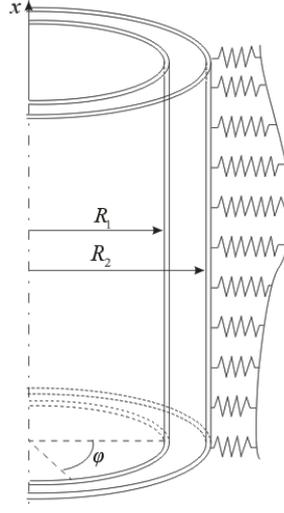


Рисунок 1 – Двустенная углеродная нанотрубка в упругой среде.

Уравнения движения в перемещениях. Двустенная углеродная нанотрубка моделируется двумя concentрически вложенными ортотропными цилиндрическими оболочками. В качестве исходным уравнений примем уравнения типа Флюгге, учитывающие наличие начальных мембранных сил [10].

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T_{1,1}}{\partial x} + \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + \frac{T_{1,2}^0}{R_1} \left(\frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial u_{1,3}}{\partial x} \right) + \frac{T_{1,1}^0}{R_1} \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial S_1^0}{R_1} \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial x \partial \varphi} - R_1 \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 u_{1,1}}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{\partial T_{1,2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_1}{\partial x} - \frac{1}{R_1} \frac{M_{1,2}}{\partial \varphi} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{T_{1,2}^0}{R_1} \left(\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u_{1,3}}{\partial \varphi} \right) + \frac{T_{1,1}^0}{R_1} \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial x^2} + 2 \frac{S_1^0}{R_1} \left(\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial u_{1,3}}{\partial x} \right) - \\
& \quad - R_1 \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{\partial^2 M_{1,2}}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial^2 H_1}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 M_{1,1}}{\partial x^2} + R_1 T_{1,2} - T_{1,2}^0 \left(\frac{\partial u_{1,1}}{\partial x} - \frac{\partial u_{1,2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_{1,3}}{\partial \varphi^2} \right) - T_{1,1}^0 \frac{\partial^2 u_{1,3}}{\partial x^2} + 2 S_1^0 \left(\frac{\partial u_{1,2}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_{1,3}}{\partial x \partial \varphi} \right) - \\
& \quad - R_1^2 p_{12}^*(x, \varphi) + R_1 \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 u_{1,3}}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{\partial T_{2,1}}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial \varphi} + \frac{T_{2,2}^0}{R_2} \left(\frac{\partial^2 u_{2,1}}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial u_{2,3}}{\partial x} \right) + \frac{T_{2,1}^0}{R_2} \frac{\partial^2 u_{2,1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial S_2^0}{R_2} \frac{\partial^2 u_{2,1}}{\partial x \partial \varphi} - R_2 \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 u_{2,1}}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{\partial T_{2,2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial S_2}{\partial x} - \frac{1}{R_2} \frac{M_{2,2}}{\partial \varphi} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial H_2}{\partial x} + \frac{T_{2,2}^0}{R_2} \left(\frac{\partial^2 u_{2,2}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial u_{2,3}}{\partial \varphi} \right) + \frac{T_{2,1}^0}{R_2} \frac{\partial^2 u_{2,2}}{\partial x^2} + \\
& \quad + 2 \frac{S_2^0}{R_2} \left(\frac{\partial^2 u_{2,2}}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial u_{2,3}}{\partial x} \right) - R_2 \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 u_{2,2}}{\partial t^2} = 0, \\
& \frac{\partial^2 M_{2,2}}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial^2 H_2}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial^2 M_{2,1}}{\partial x^2} + R_2 T_{2,2} - T_{2,2}^0 \left(\frac{\partial u_{2,1}}{\partial x} - \frac{\partial u_{2,2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u_{2,3}}{\partial \varphi^2} \right) - T_{2,1}^0 \frac{\partial^2 u_{2,3}}{\partial x^2} + \\
& \quad + 2 S_2^0 \left(\frac{\partial u_{2,2}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_{2,3}}{\partial x \partial \varphi} \right) - R_2^2 \left[p_2^*(x, \varphi) - \frac{R_1}{R_2} p_{2,1}^*(x, \varphi) \right] + R_2 \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 u_{2,3}}{\partial t^2} = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

где $p_{12}^* = c^*(u_{2,3} - u_{1,3})$, $c^* = \frac{200}{0.16 \pi d^2} \text{ erg/cm}^2$, $d = 0.142 \text{ nm}$, $p_2^* = -\kappa^*(x, \varphi) u_{2,3}$. Здесь,

$T_{1,1}^0$, $T_{1,2}^0$, S_1^0 – начальные усилия, действующие в срединной поверхности оболочки; $p_{j(j+1)}^*$ ($p_{j(j-1)}^*$) – силы Ван-дер-Ваальса, значение которых зависит от величины взаимных перемещений слоев, при

этом в во внимание принимаются лишь радиальные составляющие сил; p_2^* - реакция окружающей упругой среды, определяемая в рамках модели упругого основания Винклера. В данной работе считаем, что окружающая среда является неоднородной так, что коэффициент постели k^* есть функция криволинейных координат на поверхности оболочки.

Уравнения физического *локального* состояния (с позиций макроскопической континуальной теории) для ортотропной оболочки примем в виде [11]:

$$\begin{aligned} T_{j,1}^{(m)} &= C_{j,11} e_{j,1} + C_{j,12} e_{j,2}, \quad T_{j,2}^{(m)} = C_{j,22} e_{j,2} + C_{j,12} e_{j,1}, \quad S_j^{(m)} = C_{j,66} \psi_j, \quad H_{j,1}^{(m)} = D_{j,66} \Phi_j, \\ C_{j,ik} &= h_j B_{j,ik}, \quad M_{j,1}^{(m)} = D_{j,11} \square_{j,1} + D_{n,12} \square_{n,2}, \quad M_{n,2}^{(m)} = D_{n,22} \square_{n,2} + D_{n,12} \square_{n,1}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $C_{n,ik}, D_{n,ik}$ выражаются через упругие постоянные ортотропного материала [11] по формулам:

$$D_{j,ik} = \frac{h_j^3}{12} B_{j,ik}, \quad B_{j,ii} = \frac{E_{j,i}}{1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2}}, \quad B_{j,66} = G_j, \quad B_{j,12} = \frac{\nu_{j,2} E_{j,1}}{1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2}} = \frac{\nu_{j,1} E_{j,2}}{1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2}}, \quad (3)$$

а деформации $e_{j,i}, \psi_j, \square_{j,i}, \Phi_j$ ($j=1,2$) выражены через перемещения следующим образом [12]:

$$\begin{aligned} e_{j,1} &= \frac{1}{R_j} \frac{\partial u_{j,1}}{\partial x}, \quad e_{j,2} = \frac{1}{R_j} \left(\frac{\partial u_{j,2}}{\partial \rho} + u_{j,3} \right), \quad \psi_j = \frac{1}{R_j} \left(\frac{\partial u_{j,1}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_{j,2}}{\partial x} \right), \quad \square_{j,1} = \frac{1}{R_j^2} \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x^2}, \\ \square_{j,2} &= \frac{1}{R_j^2} \left(\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial \rho^2} + u_{j,3} \right), \quad \Phi_j = -\frac{2}{R_j^2} \left[\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x \partial \rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{j,1}}{\partial \rho} - \frac{\partial u_{j,2}}{\partial x} \right) \right], \quad j=1,2. \end{aligned} \quad (4)$$

После подстановки (4) и (3) в (2) выражения для макроскопических усилий запишутся в виде:

$$\begin{aligned} T_{j,1}^{(m)} &= \frac{h_j E_{j,1}}{(1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2}) R_j} \left(\frac{\partial u_{j,1}}{\partial x} + \nu_{j,2} \frac{\partial u_{j,2}}{\partial \rho} + \nu_{j,2} u_{j,3} \right), \quad S_j^{(m)} = \frac{h_j G_j}{R_j} \left(\frac{\partial u_{j,1}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_{j,2}}{\partial x} \right), \\ T_{j,2}^{(m)} &= \frac{h_j E_{j,2}}{(1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2}) R_j} \left(\frac{\partial u_{j,2}}{\partial \rho} + u_{j,3} + \nu_{j,1} \frac{\partial u_{j,1}}{\partial x} \right), \quad H_j^{(m)} = -\frac{h_j^3 G_j}{6 R_j^2} \left(\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x \partial \rho} - \frac{\partial u_{j,2}}{\partial x} \right), \\ M_{j,1}^{(m)} &= \frac{h_j^3 E_{j,1}}{12 (1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2}) R_j^2} \left[\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x^2} + \nu_{j,2} \left(\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial \rho^2} - \frac{\partial u_{j,2}}{\partial \rho} \right) \right], \\ M_{j,2}^{(m)} &= \frac{h_j^3 E_{j,2}}{12 (1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2}) R_j^2} \left[\frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial \rho^2} - \frac{\partial u_{j,2}}{\partial \rho} + \nu_{j,1} \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x^2} \right], \quad j=1,2. \end{aligned} \quad (5)$$

В соответствии с нелокальной континуальной теорией Эрингена [4,5], адаптированной для цилиндрической оболочки, *микроскопические* и *макроскопические* напряжения связаны соотношениями:

$$\mathfrak{T}_j(T_{j,i}, S_j, M_{j,2}, H_j) = (T_{j,i}^{(m)}, S_j^{(m)}, M_{j,i}^{(m)}, H_j^{(m)}) \quad (6)$$

где \mathfrak{T}_j - дифференциальный оператор, действующий по формуле:

$$\mathfrak{T}_j = 1 - \left(\frac{e_0 a}{R_j} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) = 1 - e_0^2 m_j^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right), \quad m_j = \frac{a}{R_j}, \quad j=1,2. \quad i=1,2,3. \quad (7)$$

Здесь $a = 0,142 \text{ нм}$ - внутренний характерный размер решетки нанотрубки, R_j - радиус соответствующего слоя, а e_0 - материальная константа нелокальности.

Примем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} K_{j,1} &= \frac{h_j E_{j,1}}{(1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2})}, \quad K_{j,2} = \frac{h_j E_{j,2}}{(1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2})}, \quad K_{j,2} = h_j G_j, \\ D_{j,12} &= \frac{h_j^3 G_j}{6}, \quad D_{j,1} = \frac{h_j^3 E_{j,1}}{12 (1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2})}, \quad D_{j,2} = \frac{h_j^3 E_{j,2}}{12 (1 - \nu_{j,1} \nu_{j,2})}, \quad j=1,2. \end{aligned} \quad (8)$$

Перейдем к безразмерным перемещениям по формулам: $u_{j,i} = R_j \tilde{u}_{j,i}$. Далее, опуская волну, примем обозначение $u_{j,i}$ для безразмерных перемещений.

Введем операторы $L_{j,i}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3})$, $j = 1, 2$, $i = 1, 2, 3$, по формулам:

$$\begin{aligned} L_{j,1}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) &= \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x^2} + h_{j,2} \left(\frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x \partial u} + \frac{\partial u_{j,3}}{\partial x} \right) + k_{j,112} \left(\frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x \partial u} \right), \\ N_{j,1}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) &= t_{j,21}^0 \left(\frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial u^2} - \frac{\partial u_{j,3}}{\partial x} \right) + t_{j,11}^0 \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x^2} + 2s_{j,1}^0 \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x \partial u}, \\ L_{j,2}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) &= \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial u^2} + \frac{\partial u_{j,3}}{\partial u} + h_{j,1} \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x \partial u} + k_{j,212} \left(\frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial x \partial u} + \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x^2} \right) - \\ &\quad - \mathcal{K}_j^4 \left(\frac{\partial^3 u_{j,3}}{\partial u^3} + h_{j,1} \frac{\partial^3 u_{j,3}}{\partial x^2 \partial u} \right) - \mathcal{K}_j^4 k_{j,212} \frac{\partial^3 u_{j,3}}{\partial x^2 \partial u}, \\ N_{j,2}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) &= t_{j,22}^0 \left(\frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial u^2} - \frac{\partial u_{j,3}}{\partial u} \right) + t_{j,12}^0 \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x^2} + 2s_{j,1}^0 \left(\frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial x \partial u} + \frac{\partial u_{j,3}}{\partial x} \right), \\ L_{j,3}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) &= \mathcal{K}_j^4 \left\{ \left(\frac{\partial^4 u_{j,3}}{\partial x^4} + 2h_{j,2} \frac{\partial^4 u_{j,3}}{\partial x^2 \partial u^2} \right) + e_{j,21} \frac{\partial^4 u_{j,3}}{\partial u^4} + 4k_{j,112} \frac{\partial^4 u_{j,3}}{\partial x^2 \partial u^2} \right\} + \\ &\quad + e_{j,21} \left(\frac{\partial u_{j,3}}{\partial u} + u_{j,3} + h_{j,1} \frac{\partial u_{j,1}}{\partial x} \right), \\ N_{j,3}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) &= -t_{j,21}^0 \left(\frac{\partial u_{j,1}}{\partial x} - \frac{\partial u_{j,2}}{\partial u} + \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial u^2} \right) - t_{j,11}^0 \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x^2} + 2s_{j,1}^0 \left(\frac{\partial u_{j,2}}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial x \partial u} \right). \end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned} k_{j,112} &= \frac{K_{j,12}}{K_{j,1}} = \frac{G_j (1 - h_{j,1} h_{j,2})}{E_{j,1}}, \quad t_{j,21}^0 = \frac{T_{j,2}^0}{K_{j,1}}, \quad t_{j,11}^0 = \frac{T_{j,1}^0}{K_{j,1}}, \quad s_{j,1}^0 = \frac{S_j^0}{K_{j,1}}, \quad k_{j,212} = \frac{K_{j,12}}{K_{j,2}} = \frac{G_j (1 - h_{j,1} h_{j,2})}{E_{j,2}}, \\ I_{j,1} &= \frac{R_j^2 c_j h_j}{K_{j,1}} = \frac{R_j^2 c_j (1 - h_{j,1} h_{j,2})}{E_{j,1}}, \quad d_{j,22} = \frac{D_{j,2}}{R_j^2 K_{j,2}} = \frac{1}{12} \left(\frac{h_j}{R_j} \right)^2, \quad \mathcal{K}_j^4 = \frac{h_j^2}{12 R_j^2}, \quad s_{j,1}^0 = \frac{S_j^0}{K_{j,1}}, \quad \partial_2 = \frac{R_1}{R_2}, \\ t_{j,22}^0 &= \frac{T_{j,2}^0}{K_{j,2}} = \frac{(1 - h_{j,1} h_{j,2}) T_{j,2}^0}{h_j E_{j,2}}, \quad t_{j,12}^0 = \frac{T_{j,1}^0}{K_{j,2}} = \frac{(1 - h_{j,1} h_{j,2}) T_{j,1}^0}{h_j E_{j,2}}, \quad \kappa_0 = \kappa_0^* \frac{R_2^2 (1 - h_{j,1} h_{j,2})}{h_2 E_{2,1}}, \quad (9) \\ I_{j,2} &= \frac{R_j^2 c_j h_j}{K_{j,2}} = \frac{R_j^2 c_j (1 - h_{j,1} h_{j,2})}{E_{j,2}}, \quad e_{j,21} = \frac{E_{j,2}}{E_{j,1}}, \quad I_{j,2} = I_{j,1} \frac{K_{j,1}}{K_{j,2}} = I_{j,1} \frac{E_{j,1}}{E_{j,2}} = I_{j,1} e_{j,12} = \frac{I_{j,1}}{e_{j,21}}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Действуя на каждое из уравнений (1), соответствующих движению j -го слоя, оператором \mathfrak{F}_j . После несложных преобразований получим систему уравнений движения двустенной нанооболочки:

$$\begin{aligned} L_{j,1}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) + \mathfrak{F}_j \left[N_{j,1}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) - I_{j,1} \frac{\partial^2 u_{j,1}}{\partial t^2} \right] &= 0, \quad j = 1, 2, \\ L_{j,2}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) + \mathfrak{F}_j \left[N_{j,2}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) - I_{j,2} \frac{\partial^2 u_{j,2}}{\partial t^2} \right] &= 0, \quad j = 1, 2, \quad (10) \\ L_{j,3}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) + \mathfrak{F}_j \left[N_{j,3}(u_{j,1}, u_{j,2}, u_{j,3}) - p_{j(j+1)} + \partial_2 p_{(j-1)j} + I_{j,3} \frac{\partial^2 u_{j,3}}{\partial t^2} \right] &= 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

где $p_{12} = c_1 (u_{2,3} - u_{1,3})$, $p_{21} = c_2 (u_{2,3} - u_{1,3})$, $p_{23} = p_2 = -\kappa_0 u_{2,3}$, $p_{01} = 0$.

Погрешность теории тонких ортотропных оболочек имеет порядок $\sim h_N/R$ [11, 12], а погрешность континуальной модели УНТ $\sim (e_0 a/R_1)^2$ [13]. Таким образом, погрешность уравнений (10) для моделирования УНТ составляет величину порядка $\sim \max_{j=1,2} \{h_j/R_j, (e_0 a/R_1)^2\}$.

Пример. В качестве примера рассмотрим шарнирно опертую двустенную УНТ. В данном случае будем моделировать УНТ изотропной оболочкой, а влияние внешней упругой среды во внимание не принимаем. Изучим зависимость собственных частот колебаний УНТ от ее длины, числа полу-волн в осевом (m) и окружном направлениях (n). В данной упрощенной постановке примем следующие значения физических и геометрических параметров УНТ [14]:

$$E_1 = E_2 = 1.058 \times 10^{12} \text{ Н/м}^2, \quad \nu_1 = \nu_2 = 0.27, \quad \rho_1 = \rho_2 = 1.341 \times 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad (11)$$

$$h_1 = h_2 = 0.34 \times 10^{-9} \text{ м}, \quad R_1 = 1.735 \times 10^{-9} \text{ м}, \quad R_2 = 2.415 \times 10^{-9} \text{ м}, \quad e_0 = 0.39, \quad \kappa^* = 0.$$

Перемещения, удовлетворяющие условиям шарнирного опирания, ищем в виде:

$$u_{j,1} = A_{j,1} \cos\left(\frac{p m x}{l_j}\right) \sin(n \pi) \cos(\Omega t), \quad u_{j,2} = A_{j,2} \sin\left(\frac{p m x}{l_j}\right) \cos(n \pi) \cos(\Omega t), \quad (12)$$

$$u_{j,3} = A_{j,3} \sin\left(\frac{p m x}{l_j}\right) \sin(n \pi) \cos(\Omega t), \quad l_j = \frac{L}{R_j}, \quad j = 1, 2.$$

Подстановка (12) в уравнения движения (10) приводит к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных величин $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}, A_{2,1}, A_{2,2}, A_{2,3}$. Из условия существования нетривиального решения данной системы получаем уравнение относительно неизвестной частоты Ω .

В таблицах 1-6 приведены частоты для шести форм колебаний УНТ. Частоты, приведенные в таблицах 1 и 2, отвечают формам изгибных колебаний. Частоты из таблиц 3 и 4 соответствуют формам тангенциальных колебаний, когда перемещения в осевом направлении являются преобладающими. И наконец, данные, приведенные в таблицах 5 и 6, отвечают тангенциальному движению стенок с большой амплитудой перемещений в окружном направлении. При этом в таблицах с нечетными номерами приведены частоты, соответствующие случаю, когда стенки двигаются в одном направлении (фазы колебаний совпадают), а в таблицах 2, 4, 6 – частоты для форм колебаний, когда движения стенок происходят в разных направлениях.

Таблица 1 – Собственные частоты УНТ соответствующие первой форме колебаний.

n	$m \backslash L/(R_j)$	$\Omega (\times 10^{13} \text{ Гц})$				
		1	5	10	15	20
1	5	0.3455	1.5241	3.9183	8.2182	11.863
	10	0.1184	0.9559	1.5241	2.451	3.9183
	20	0.03419	0.4641	0.9559	1.2427	1.5241
5	5	1.3104	2.196	4.9004	9.145	12.2401
	10	1.286	1.4945	2.196	3.3411	4.9004
	20	1.2801	1.329	1.4945	1.7857	2.196

Таблица 2 – Собственные частоты УНТ соответствующие второй форме колебаний.

n	$m \backslash L/(R_j)$	$\Omega (\times 10^{13} \text{ Гц})$				
		1	5	10	15	20
1	5	0.6475	1.8765	4.1239	8.3291	11.8759
	10	0.5605	1.2018	1.8762	2.7376	4.1239
	20	0.5667	0.7304	1.2018	1.5666	1.8765
5	5	2.3776	3.2187	5.8817	9.8163	12.5838
	10	2.3534	2.5531	3.2187	4.3432	5.8817
	20	2.3474	2.3959	2.5531	2.8264	3.2187

Таблица 3 – Собственные частоты УНТ соответствующие третьей форме колебаний.

n	m $L/(R_1)$	$\Omega (\times 10^{13} \text{ Гц})$				
		1	5	10	15	20
1	5	1.1791	3.277	6.301	9.1965	14.0308
	10	0.8961	1.8776	3.277	4.7943	6.301
	20	0.7815	1.3146	1.8776	2.5399	3.277
5	5	3.7123	4.8827	7.2346	9.8898	15.05
	10	3.6649	4.0162	4.8828	5.996	7.2346
	20	3.6529	3.7471	4.0162	4.4075	4.8827

Таблица 4 – Собственные частоты УНТ соответствующие четвертой форме колебаний.

n	m $L/(R_1)$	$\Omega (\times 10^{13} \text{ Гц})$				
		1	5	10	15	20
1	5	1.4068	3.4061	6.3489	9.2322	14.1163
	10	1.1415	2.1772	3.4061	4.8641	6.34893
	20	1.05052	1.5525	2.1772	2.7423	3.4061
5	5	5.1251	6.0563	8.10243	10.7961	16.07
	10	5.0906	5.35481	6.0563	7.0045	8.1024
	20	5.0819	5.15078	5.3548	5.6654	6.0563

Таблица 5 – Собственные частоты УНТ соответствующие пятой форме колебаний.

n	m $L/(R_1)$	$\Omega (\times 10^{13} \text{ Гц})$				
		1	5	10	15	20
1	5	1.905	5.4053	10.4318	15.2235	19.647
	10	1.788	2.9498	5.4053	7.9339	10.4318
	20	1.763	2.009	2.9498	4.1519	5.4053
5	5	6.2142	8.0029	11.928	16.236	20.3949
	10	6.1519	6.6424	8.0029	9.8543	11.928
	20	6.1353	6.2612	6.6424	7.2388	8.0029

Таблица 6 – Собственные частоты УНТ соответствующие шестой форме колебаний.

n	m $L/(R_1)$	$\Omega (\times 10^{13} \text{ Гц})$				
		1	5	10	15	20
1	5	2.5301	5.5489	10.5013	15.2694	19.6818
	10	2.4528	3.2714	5.5489	8.0274	10.5013
	20	2.4352	2.5951	3.2714	4.3497	5.5489
5	5	8.5544	9.9003	13.22	17.16	21.0967
	10	8.5094	8.8643	9.9003	11.4178	13.220
	20	8.4981	8.588	8.8643	9.3090	9.9003

Анализируя полученные данные, заключаем: увеличение длины нанотрубки приводит к снижению собственных частот, а увеличение числа полувольт в осевом направлении и волн в окружном направлениях приводит к увеличению собственных частот всех форм колебаний. Отметим также, что рост n снижает влияние длины УНТ на значение частот.

Резюме

В данной работе на основе теории тонких ортотропных оболочек Флюгге, а также нелокальной теории Эрингена выведены уравнения движения двустенной углеродной нанотрубки (УНТ), введённой в упругую среду. Предложенная модель УНТ позволяет учитывать начальные напряжения и влияние окружающей упругой среды. В качестве примера изучена зависимость собственных частот УНТ от ее длины и количество волн в осевом и окружном направлениях. Выполнен анализ собственных форм колебаний двустенной УНТ.

Литература

1. Xu, M. Free transverse vibrations of nano-to-micron scale beams/M. Xu// Proc. R. Soc. A.-2006. V. 462. –P. 2977 - 2995.
2. Sun, C.T. Size-dependent elastic moduli of platelike nanomaterials/C.T. Sun, H.Zhang//, J. Appl. Phys. - 2003. V. 93. – P. 1212–1218.
3. Lu, J. Elastic properties of carbon nanotubes and nanoropes/J. Lu// Phys. Rev. Lett.-1997. V. 79 (1297).-P.1607–1616.
4. Eringen, A.C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves/ A.C. Eringen// J. Appl. Phys.-1983. V. 54. P. 4703--4710.
5. Eringen, A.C. Nonlocal continuum field theories/A.C. Eringen. - New-York: Springer.- 2002.
6. Wang, L. Validation of the non-local elastic shell model for studing longitudinal waves in single-walled carbon nanotubes/L. Wang, H, Hu, W. Guo//Nanotechnology.-2006.V. 17. P. 1408–1415.
7. Михасев, Г.И. Уравнения движения многостенной углеродной нанотрубки. основанные на нелокальной теории ортотропных оболочек/Г.И. Михасев//Докл. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 6. – С. 119-123.
8. Михасев, Г.И. Вывод уравнений движения многостенной углеродной нанотрубки с использованием нелокальной континуальной теории ортотропных цилиндрических оболочек/Г.И. Михасев, А.Н. Шейко//Теоретическая и прикладная механика: Международный научно-технический журнал.-Мн.:БНТУ-2012. Вып. 27. –С. 70-77.
9. Mikhasev, G. Governing Equations for Multi-Walled Carbon Nanotubes Derived From Orthotropic Flügge Shell Theory and elastic Nonlocality/G. Mikhasev//Book of Abstracts of the 38th Solid Mechanics Conference. Warsaw, Poland, August 27-31.-2012. – P. 254-255.
10. W. Flügge, Statik und Dynamik der Schalen (Springer, Berlin, 1934). 54, 4703–4710 (1983).
11. Амбарцумян, С.А. Общая теория анизотропных оболочек/ С.А. Амбарцумян.- М.: Наука. 1974.- 448с.
12. Михасев, Г. И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках / Г. И. Михасев, П.Е. Товстик// Асимптотические методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2009. – 292с.
13. Peng, J. Can a single-wall carbon nanotube be modeled as a thin shell./J. Peng, J. Wu, K.C. Hwang, J. Song, Y. Huang // J. Mech. Phys. Solids. - 2008. V. 56. - P. 2213-2224.
14. T. Usuki and K. Yogo, Beam equations for multi-walled carbon nanotubes derived from Flügge shell theory, Proc. R. Soc. A 465, 1199–1226 (2009).

Summary

On the basis of Flügge theory for thin orthotropic shells and the non-local theory of Eringen, governing equations of motion of a two-walled carbon nanotube (CNT) embedded in an elastic medium have been derived in this paper. The proposed model of a CNT allows taking into account initial stresses and influence of a surrounding elastic medium. As an example, the dependence of natural frequencies of the CNT on its length and a number of waves in the axial and circumferential directions has been studied. The analysis of the two-walled CNT eigenmodes has been performed.

Поступила в редакцию 23.11.2012