УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ШАРА

Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н.

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань

Строится точное решение несимметричной задачи термоупругости для полого шара. Задача предполагается стационарной, несвязной, температура тела не зависит от времени и от деформации конструкции.

В этом случае температура тела удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta T = 0, \tag{1}$$

T – температура тела, Δ – оператор Лапласа в сферической системе координат (α, β, ρ):

$$\Delta \equiv \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right]. \tag{2}$$

Здесь ρ – расстояние от центра шара до рассматриваемой точки, α – угол между радиусом-вектором верхнего полюса сферы и радиусом-вектором этой точки, β – угол между нулевым меридианом и меридианом, на котором расположена точка, исследуемая область $0 \le \alpha \le \pi$, $-\pi \le \beta \le \pi$, $r \le \rho \le R$, R, r – внешний и внутренний радиусы шара. В примере $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$.

Рассматриваются краевые условия трех типов: 1) на граничной поверхности задано распределение температуры, 2) граничная поверхность теплоизолирована, 3) через граничную поверхность осуществляется конвективный теплообмен с внешней средой.

Уравнения равновесия в задаче термоупругости в напряжениях при отсутствии массовых сил можно записать в следующем виде

$$\frac{\partial\sigma_{\rho\rho}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\sigma_{\alpha\rho}}{\partial\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial\sigma_{\beta\rho}}{\partial\beta}+2\sigma_{\rho\rho}-\sigma_{\alpha\alpha}-\sigma_{\beta\beta}+\sigma_{\alpha\rho}ctg\alpha\right]=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha\rho}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\sigma_{\alpha\alpha}}{\partial\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial\beta}+\left(\sigma_{\alpha\alpha}-\sigma_{\beta\beta}\right)ctg\alpha+3\sigma_{\alpha\rho}\right]=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\sigma_{\beta\rho}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial\sigma_{\beta\beta}}{\partial\beta}+3\sigma_{\beta\rho}+2\sigma_{\alpha\beta}ctg\alpha\right]=0,$$

здесь $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\beta\beta}$, $\sigma_{\rho\rho}$, $\sigma_{\alpha\rho}$, $\sigma_{\beta\rho}$, $\sigma_{\alpha\beta}$ – напряжения в теле.

Напряжения связаны с перемещениями соотношениями Дюгамеля – Неймана:

$$\sigma_{\rho\rho}=\frac{E}{(1+\upsilon)}\left\{\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{\upsilon}{(1-2\upsilon)}\left[\theta-\frac{(1+\upsilon)}{\upsilon}\alpha_T T\right]\right\}, \tag{4}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}=\frac{E}{(1+\upsilon)}\left\{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}+w\right)+\frac{\upsilon}{(1-2\upsilon)}\left[\theta-\frac{(1+\upsilon)}{\upsilon}\alpha_T T\right]\right\},$$

$$\sigma_{\beta\beta}=\frac{E}{(1+\upsilon)}\left\{\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}+u\,ctg\alpha+w\right)+\frac{\upsilon}{(1-2\upsilon)}\left[\theta-\frac{(1+\upsilon)}{\upsilon}\alpha_T T\right]\right\},$$

$$\sigma_{\alpha\rho}=\frac{E}{2(1+\upsilon)}\left\{\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}-u\right)\right\}, \qquad \sigma_{\beta\rho}=\frac{E}{2(1+\upsilon)}\left\{\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}-v\right)\right\},$$

$$\sigma_{\alpha\beta}=\frac{E}{2(1+\upsilon)\rho}\left\{\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{\partial v}{\partial\alpha}-v\,ctg\alpha\right\},$$

где u, v, w – перемещения точки шара вдоль меридиана, параллели и в радиальном направлении, E, υ – модуль упругости и коэффициент Пуассона, α_T – коэффициент линейного расширения материала,

$$\theta=\frac{1}{\rho}\left[\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}+2w+\frac{\partial u}{\partial\alpha}+u ctg\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}\right]. \qquad (5)$$

Из соотношений (4), (5) следует

$$\sigma_{\rho\rho}+\sigma_{\alpha\alpha}+\sigma_{\beta\beta}=\frac{E}{(1+\upsilon)}\left\{\frac{1}{\rho}\left[\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}+\frac{\partial u}{\partial\alpha}+w+\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}+u\, ctg\alpha+w\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{3\upsilon}{(1-2\upsilon)}\left[\theta-\frac{(1+\upsilon)}{\upsilon}\alpha_T T\right]\right\}=\frac{E}{(1-2\upsilon)}\left[\theta-3\alpha_T T\right]. \qquad (6)$$

Точные решения уравнений теории упругости проще строить, когда эти уравнения записаны относительно перемещений, так как число разрешающих уравнений становится наименьшим, кроме того, легче искать их интегрируемые комбинации. Ранее уравнения термоупругости в перемещениях не публиковались, поскольку до работы [1] их интегрирование не представлялось возможным.

Построим эти уравнения традиционным способом, исключив из системы (3) напряжения с помощью соотношений (4). Подстановка в уравнения соотношений (4), перегруппировка членов полученных уравнений, приведение их с помощью соотношений (5) и (6) к максимально удобному для интегрирования виду производится с помощью компьютерной системы «Mathematica - 5». В результате имеем

$$\left(\Delta+\frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{2}{\rho^2}\right)w+\frac{1}{(1-2\upsilon)}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\theta-2(1+\upsilon)\alpha_T T\right]-\frac{2}{\rho}\theta=0, \qquad (7)$$

$$\left(\Delta-\frac{1}{\rho^2\sin^2\alpha}\right)u-\frac{2\cos\alpha}{\rho^2\sin^2\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{1}{(1-2\upsilon)\rho}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\theta-2(1+\upsilon)\alpha_T T\right]=0,$$

$$\left(\Delta-\frac{1}{\rho^2\sin^2\alpha}\right)v+\frac{2}{\rho^2\sin\alpha}\frac{\partial\left[w+u ctg\alpha\right]}{\partial\beta}+\frac{1}{\rho\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\theta-2(1+\upsilon)\alpha_T T}{(1-2\upsilon)}\right]=0.$$

Этих уравнений вместе с соотношением (5) достаточно для определения перемещений и функции θ. После этого с помощью формул Дюгамеля-Неймана (4) определяются напряжения.

Однако интегрирование системы (7), (5) в представленном виде практически невозможно. Для улучшения ситуации выводится дополнительное уравнение относительно объемной деформации. Для этого действуем на первое уравнение этой системы (7) оператором $\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\right)$, на второе - оператором $\frac{1}{\rho\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin\alpha\right)$, на третье – оператором $\frac{1}{\rho\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}$ и затем суммируем их. После довольно громоздких вычислений, проведенных также с помощью компьютерной системы «Mathematica - 5», получаем дополнительное уравнение

$$\Delta\left[(1-\upsilon)\theta-(1+\upsilon)\alpha_T T\right]=0.$$

Поскольку температура удовлетворяет уравнению $\Delta T=0$, уравнение принимает вид

$$\Delta\theta=0. \qquad (8)$$

В результате получаем систему разрешающих уравнений (7), (8), в которой вместо уравнения (5) используется уравнение более высокого порядка (8).

Эта система уравнений может быть проинтегрирована, однако в ее решение войдет большее число постоянных интегрирования по сравнению с решением исходной системы.

Чтобы избавиться от «лишних» постоянных и привести в соответствие их количество с числом граничных условий, необходимо выполнить условие (5).

Итак, система разрешающих уравнений задачи термоупругости принимает вид

$$\Delta T=0, \qquad \Delta\theta=0, \qquad (9)$$

$$\left(\Delta+\frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{2}{\rho^2}\right)w+\frac{1}{(1-2\upsilon)}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\theta-2(1+\upsilon)\alpha_T T\right]-\frac{2}{\rho}\theta=0,$$

$$\left(\Delta-\frac{1}{\rho^2\sin^2\alpha}\right)u-\frac{2\cos\alpha}{\rho^2\sin^2\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{1}{(1-2\upsilon)\rho}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\theta-2(1+\upsilon)\alpha_T T\right]=0,$$

$$\left(\Delta-\frac{1}{\rho^2\sin^2\alpha}\right)v+\frac{2}{\rho^2\sin\alpha}\frac{\partial\left[w+uctg\alpha\right]}{\partial\beta}+\frac{1}{(1-2\upsilon)\rho\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\theta-2(1+\upsilon)\alpha_T T\right]=0$$

при дополнительном условии

$$\theta=\frac{1}{\rho}\left[\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}+2w+\frac{\partial u}{\partial\alpha}+uctg\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}\right]. \tag{10}$$

Периодическое по координате β решение ищется в виде

$$T(\alpha,\beta,\rho)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[T_m(\alpha,\rho)\cos(m\beta)+T_m^*(\alpha,\rho)\sin(m\beta)\right],$$

$$\theta(\alpha,\beta,\rho)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\theta_m(\alpha,\rho)\cos(m\beta)+\theta_m^*(\alpha,\rho)\sin(m\beta)\right], \tag{11}$$

$$w(\alpha,\beta,\rho)=-\frac{1}{(1-2\upsilon)}\sum_{m=0}^{\infty}\left[w_m(\alpha,\rho)\cos(m\beta)+w_m^*(\alpha,\rho)\sin(m\beta)\right],$$

$$u(\alpha,\beta,\rho)=-\frac{1}{(1-2\upsilon)}\sum_{m=0}^{\infty}\left[u_m(\alpha,\rho)\cos(m\beta)+u_m^*(\alpha,\rho)\sin(m\beta)\right],$$

$$v(\alpha,\beta,\rho)=-\frac{1}{(1-2\upsilon)}\sum_{m=0}^{\infty}\left[v_m(\alpha,\rho)\sin(m\beta)+v_m^*(\alpha,\rho)\cos(m\beta)\right].$$

Тогда относительно коэффициентов рядов (11) получаем систему

$$\Delta_m T_m=0,\quad \Delta_m\theta_m=0,$$

$$\left(\Delta_m+\frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{2}{\rho^2}\right)w_m=\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\theta_m-2(1+\upsilon)\alpha_T T_m\right]-\frac{2(1-2\upsilon)}{\rho}\theta_m, \tag{12}$$

$$\left(\Delta_m-\frac{1}{\rho^2\sin^2\alpha}\right)u_m-\frac{2m\cos\alpha}{\rho^2\sin^2\alpha}v_m=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\theta_m-2(1+\upsilon)\alpha_T T_m\right]-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial w_m}{\partial\alpha},$$

$$\left(\Delta_m-\frac{1}{\rho^2\sin^2\alpha}\right)v_m-\frac{2m\cos\alpha}{\rho^2\sin^2\alpha}u_m=-\frac{m}{\rho\sin\alpha}\left[\theta_m-2(1+\upsilon)\alpha_T T_m\right]+\frac{2m}{\rho^2\sin\alpha}w_m,$$

Здесь

$$\Delta_m\equiv\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\alpha}\right]. \tag{13}$$

Приведем систему уравнений (12) к пяти отдельным уравнениям относительно искомых функций

$$\Delta_m T_m=0,\quad \Delta_m\theta_m=0,$$

$$\left(\Delta_m+\frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{2}{\rho^2}\right)w_m=\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\theta_m-2(1+\upsilon)\alpha_T T_m\right]-\frac{2(1-2\upsilon)}{\rho}\theta_m, \tag{14}$$

$$\left(\Delta_m-\frac{1+2m\cos\alpha}{\rho^2\sin^2\alpha}\right)(u_m+v_m)=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}-\frac{m}{\sin\alpha}\right)\left[\theta_m-2(1+\upsilon)\alpha_T T_m-\frac{2}{\rho}w_m\right],$$

$$\left(\Delta_m-\frac{1-2m\cos\alpha}{\rho^2\sin^2\alpha}\right)(u_m-v_m)=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{m}{\sin\alpha}\right)\left[\theta_m-2(1+\upsilon)\alpha_T T_m-\frac{2}{\rho}w_m\right]$$

при условии при условии

$$\left(1-2\upsilon\right)\theta_m+\frac{1}{\rho}\left[\rho\frac{\partial w_m}{\partial\rho}+2w_m+\frac{\partial u_m}{\partial\alpha}+u_m ctg\alpha+\frac{m}{\sin\alpha}v_m\right]=0\,. \tag{15}$$

Система уравнений относительно T_m^*, θ_m^*, u_m^*, v_m^*, w_m^* отличается от (14) только тем, что последние два уравнения «меняются местами» – последнее уравнение из (14) становится уравнением относительно суммы перемещений $\left(u_m^*+v_m^*\right)$, а предпоследнее относительно их разности.

Пусть

$$T_m(\alpha\,,\rho)=\sum_{n=m}^{\infty}T_{mn}P_n^m(\cos\alpha),\quad \theta_m(\alpha\,,\rho)=\sum_{n=m}^{\infty}\theta_{mn}P_n^m(\cos\alpha),\quad w_m=\sum_{n=m}^{\infty}w_{mn}(\rho)P_n^m(\cos\alpha), \tag{16}$$

$$u_m+v_m=\sum_{n=m}^{\infty}g_{mn}(\rho)\left[\frac{d}{d\alpha}-\frac{m}{\sin\alpha}\right]P_n^m(\cos\alpha),\qquad u_m-v_m=\sum_{n=m}^{\infty}e_{mn}(\rho)\left[\frac{d}{d\alpha}+\frac{m}{\sin\alpha}\right]P_n^m(\cos\alpha).$$

Здесь $P_n^m(\cos\alpha)$ – шаровая функция [2], суммирование по n проводится от $n = m$, поскольку $P_n^m(\cos\alpha)=0$ при $n < m$, $P_n(\cos\alpha)=P_n^0(\cos\alpha)$. Нетрудно установить, что при $\alpha=0$ и $m\geq 0$ соотношения $\left[\dfrac{d}{d\alpha}\pm\dfrac{m}{\sin\alpha}\right]P_n^m(\cos\alpha)$, а, следовательно, u_m, v_m принимают конечные значения.

В монографии [1] доказана теорема, что функция $\Phi=\left(\dfrac{d}{d\alpha}-\dfrac{m}{\sin\alpha}\right)P_n^m(\cos\alpha)$ при любом m удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+n\,(n+1)-\frac{m^2+1+2m\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right]\Phi=0\,.$$

Из теоремы следует, что функция $\overline{\Phi}=\left(\dfrac{d}{d\alpha}+\dfrac{m}{\sin\alpha}\right)P_n^{-m}(\cos\alpha)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+n\,(n+1)-\frac{m^2+1-2m\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right]\overline{\Phi}=0\,.$$

Поскольку $P_n^m(\cos\alpha)=\dfrac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)}P_n^{-m}(\cos\alpha)$ [2], функция $\widetilde{\Phi}=\left(\dfrac{d}{d\alpha}+\dfrac{m}{\sin\alpha}\right)P_n^m(\cos\alpha)$ удовлетворяет тому же, что $\overline{\Phi}$, уравнению. Итак,

$$\left[\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)+n\,(n+1)-\frac{m^2+1\pm 2m\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right]\left(\frac{d}{d\alpha}\mp\frac{m}{\sin\alpha}\right)P_n^m(\cos\alpha)\equiv 0\,. \tag{17}$$

Кроме того, имеет место уравнение

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{dP_n^m(\cos\alpha)}{d\alpha}\sin\alpha\right)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{\sin^2\alpha}\right]P_n^m(\cos\alpha)\equiv 0 \tag{18}$$

В результате подстановки соотношений (16) в уравнения (14) с учетом тождеств (17) и (18) относительно коэффициентов рядов имеем следующие уравнения

$$\left[\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d}{d\rho}\right)-n(n+1)\right]T_{mn}=0\,,\qquad \left[\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d}{d\rho}\right)-n(n+1)\right]\theta_{mn}=0\,,$$

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{4}{\rho}\frac{d}{d\rho}-\frac{n^2+n-2}{\rho^2}\right]w_{mn}=\frac{d}{d\rho}\left[\theta_{mn}-2(1+\upsilon)\alpha_T T_{mn}\right]-\frac{2(1-2\upsilon)}{\rho}\theta_{mn}\,,$$

$$\left[\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{d}{d\rho}\right)-n(n+1)\right]\begin{Bmatrix}g_{mn}\\ e_{mn}\end{Bmatrix}=\left(\rho\theta_{mn}-2w_{mn}\right)-2(1+\upsilon)\alpha_T\rho T_{mn}\,.$$

Нетрудно проверить подстановкой в уравнения, что их решение имеет вид

$$T_{mn} = B_{mn}^1\rho^n + B_{mn}^2\rho^{-(n+1)}, \quad \theta_{mn} = C_{mn}^1\rho^n + C_{mn}^2\rho^{-(n+1)}, \tag{19}$$

$$w_{mn} = C_{mn}^3\rho^{n-1} + C_{mn}^4\rho^{-(n+2)} + \frac{\left[nL_{mn}^1 - 2(1-2\upsilon)C_{mn}^1\right]}{2(2n+3)}\rho^{n+1} + \frac{\left[(n+1)L_{mn}^2 + 2(1-2\upsilon)C_{mn}^2\right]}{2(2n-1)}\rho^{-n},$$

$$g_{mn} = C_{mn}^5\rho^n + C_{mn}^6\rho^{-(n+1)} + \frac{1}{n}C_{mn}^3\rho^{n-1} - \frac{1}{(n+1)}C_{mn}^4\rho^{-(n+2)} +$$

$$+\frac{(n+3)L_{mn}^1 + 2(1-2\upsilon)C_{mn}^1}{2(n+1)(2n+3)}\rho^{n+1} - \frac{(n-2)L_{mn}^2 - 2(1-2\upsilon)C_{mn}^2}{2n(2n-1)}\rho^{-n},$$

$$e_{mn} = C_{mn}^7\rho^n + C_{mn}^8\rho^{-(n+1)} + \frac{1}{n}C_{mn}^3\rho^{n-1} - \frac{1}{(n+1)}C_{mn}^4\rho^{-(n+2)} +$$

$$+\frac{(n+3)L_{mn}^1 + 2(1-2\upsilon)C_{mn}^1}{2(n+1)(2n+3)}\rho^{n+1} - \frac{(n-2)L_{mn}^2 - 2(1-2\upsilon)C_{mn}^2}{2n(2n-1)}\rho^{-n},$$

где $$L_{mn}^1 = C_{mn}^1 - 2(1+\upsilon)\alpha_T B_{mn}^1, \qquad L_{mn}^2 = C_{mn}^2 - 2(1+\upsilon)\alpha_T B_{mn}^2. \tag{20}$$

Здесь B_{mn}^1 , B_{mn}^2 , $C_{mn}^1 \div C_{mn}^2$ – постоянные интегрирования.

Отметим, что первые три формулы (19) справедливы при $n \ge m \ge 0$, последние две для $n \ge m > 0$.

Теперь $$u_m = \frac{1}{2}\sum_{n=m}^{\infty}\left\{g_{mn}(\rho)\left[\frac{d}{d\alpha} - \frac{m}{\sin\alpha}\right]P_n^m(\cos\alpha) + e_{mn}(\rho)\left[\frac{d}{d\alpha} + \frac{m}{\sin\alpha}\right]P_n^m(\cos\alpha)\right\}, \tag{21}$$

$$v_m = \frac{1}{2}\sum_{n=m}^{\infty}\left\{g_{mn}(\rho)\left[\frac{d}{d\alpha} - \frac{m}{\sin\alpha}\right]P_n^m(\cos\alpha) - e_{mn}(\rho)\left[\frac{d}{d\alpha} + \frac{m}{\sin\alpha}\right]P_n^m(\cos\alpha)\right\}.$$

Выполняя условие (15), получаем $C_{mn}^7 = -C_{mn}^5$, $C_{mn}^8 = -C_{mn}^6$.

Отдельно рассмотрим случай $m = 0$, очевидно, перемещение $v_0 \equiv 0$, пусть

$$u_0 = \sum_{n=0}^{\infty} u_{0n}\frac{dP_n(\cos\alpha)}{d\alpha}, \tag{22}$$

Тогда при $n > 0$ с учетом условия (15) имеем

$$T_{0n} = B_{0n}^1\rho^n + B_{0n}^2\rho^{-(n+1)}, \quad \theta_{0n} = C_{0n}^1\rho^n + C_{0n}^2\rho^{-(n+1)},$$

$$w_{0n} = C_{0n}^3\rho^{n-1} + C_{0n}^4\rho^{-(n+2)} + \frac{1}{2(2n+3)}\left[nL_{0n}^1 - 2(1-2\upsilon)C_{0n}^1\right]\rho^{n+1} +$$

$$+\frac{1}{2(2n-1)}\left[(n+1)L_{0n}^2 + 2(1-2\upsilon)C_{0n}^2\right]\rho^{-n},$$

$$u_{0n} = \frac{\left[(n+3)L_{0n}^1 + 2(1-2\upsilon)C_{0n}^1\right]}{2(n+1)(2n+3)}\rho^{n+1} -$$

$$-\frac{\left[(n-2)L_{0n}^2 - 2(1-2\upsilon)C_{0n}^2\right]}{2n(2n-1)}\rho^{-n} + \frac{1}{n}C_{0n}^3\rho^{n-1} - \frac{1}{(n+1)}C_{0n}^4\rho^{-(n+2)}.$$

Наконец, при $m = n = 0$

$$\theta_{00} = C_{00}^1, \quad u_{00} \equiv 0, \quad w_{00} = -\frac{1}{3}(1-2\upsilon)C_{00}^1\rho + C_{00}^4\rho^{-2}.$$

Напряжения вычисляются по формулам (4).

В качестве примера рассматривается сферический купол, представляющий половину полого шара. На внешней его поверхности задана температура, внутренняя поверхность теплоизолирована.

Для решения задачи температуру внешней поверхности купола запишем через шаровые функции, тогда краевые условия задачи теплопроводности имеют вид

$$T(\alpha\,,\beta\,,R)=t_0+t_2+t_1\,P_1(\cos\alpha)-t_2P_1^1(\cos\alpha)\cos\beta\,,\qquad \left.\frac{\partial T(\alpha\,,\beta\,,\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho=r}=0\,. \tag{23}$$

Решение уравнения теплопроводности принимает вид

$$T(\alpha\,,\beta\,,\rho)=\left(B_{00}^1+B_{00}^2\rho^{-1}\right)P_0(\cos\alpha)+\left(B_{01}^1\rho+B_{01}^2\rho^{-2}\right)P_1(\cos\alpha)+\left(B_{11}^1\rho+B_{11}^2\rho^{-2}\right)P_1^1(\cos\alpha)\cos\beta\,.$$

Выполняя условия (2), получаем

$$B_{00}^1=t_0\,,\;\; B_{00}^2=0\,,\qquad B_{01}^1=\frac{2R^2t_1}{\left(2R^3+r^3\right)},\quad B_{01}^2=\frac{R^2r^3t_1}{\left(2R^3+r^3\right)}, \tag{24}$$

$$B_{11}^1=-\frac{2R^2t_2}{\left(2R^3+r^3\right)},\quad B_{11}^2=-\frac{R^2r^3t_2}{\left(2R^3+r^3\right)}.$$

Пусть условия закрепления основания купола $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$

$$u\left(\frac{\pi}{2},\beta\,,\rho\right)\equiv 0\,,\quad w\left(\frac{\pi}{2},\beta\,,\rho\right)\equiv 0\,,\quad \sigma_{\alpha\beta}\left(\frac{\pi}{2},\beta\,,\rho\right)\equiv 0\,, \tag{25}$$

что соответствует условию скользящего защемления основания, допускающего свободное проскальзывание вокруг оси. Решение задачи термоупругости имеет вид

$$\theta(\alpha\,,\beta\,,\rho)=\theta_{01}(\rho)P_1(\cos\alpha)+\theta_{11}(\rho)P_1^1(\cos\alpha)\cos\beta\,,\; w(\alpha\,,\beta\,,\rho)=w_{01}(\rho)P_1(\cos\alpha),$$

$$u(\alpha\,,\beta\,,\rho)=u_1(\alpha\,,\rho)\cos\beta,\quad v(\alpha\,,\beta\,,\rho)=v_1(\alpha\,,\rho)\sin\beta,$$

$$\theta_{01}=2(1+\upsilon)\alpha_T\left[\frac{2}{(3-2\upsilon)}B_{01}^1\rho+\frac{1}{(3-4\upsilon)\rho^2}B_{01}^2\right],$$

$$\theta_{11}=(1+\upsilon)\alpha_T\left[\frac{2}{(1-4\upsilon)}B_{11}^1\rho+\frac{1}{(1-\upsilon)\rho^2}B_{11}^2\right], \tag{26}$$

$$w_{01}=(1+\upsilon)\alpha_T\left[\frac{\rho^2}{(3-2\upsilon)}B_{01}^1+\frac{2}{(3-4\upsilon)\rho}B_{01}^2\right],$$

$$u_1(\alpha\,,\rho)=(1+\upsilon)\alpha_T\left\{\frac{\rho^2}{(1-4\upsilon)}B_{11}^1-\frac{1}{2(1-\upsilon)\rho}B_{11}^2\right\}\frac{dP_1^1(\cos\alpha)}{d\alpha},$$

$$v_1(\alpha\,,\rho)=-(1+\upsilon)\alpha_T\left\{\frac{\rho^2}{(1-4\upsilon)}B_{11}^1-\frac{1}{2(1-\upsilon)\rho}B_{11}^2\right\}\frac{1}{\sin\alpha}P_1^1(\cos\alpha).$$

Рассмотрим другие условия закрепления основания купола

$$u\left(\frac{\pi}{2},\beta\,,\rho\right)\equiv 0\,,\quad v\left(\frac{\pi}{2},\beta\,,R\right)=0\,,\quad v\left(\frac{\pi}{2},\beta\,,r\right)=0\,,$$

$$w\left(\frac{\pi}{2},\beta\,,R\right)=0\,,\quad w\left(\frac{\pi}{2},\beta\,,r\right)=0\,, \tag{27}$$

что соответствует жесткому защемлению внешнего и внутреннего контуров основания купола. В этом случае некоторые из постоянных интегрирования определяются в явном виде:

$$C_{00}^1=C_{00}^4=0\,,$$

$$C_{01}^1=\frac{4(1+\upsilon)}{(3-2\upsilon)}\alpha_TB_{01}^1\,,\;C_{01}^2=\frac{2(1+\upsilon)}{(3-4\upsilon)}\alpha_TB_{01}^2\,,\;C_{01}^3=0\,,\;\;C_{01}^4=0\,,\;C_{11}^5=0\,,\;C_{11}^6=0\,,$$

остальные получаются из решения системы

$$\frac{(3-2\upsilon)R^2}{10}C_{11}^1+\frac{(3-4\upsilon)}{2R}C_{11}^2-C_{11}^3+\frac{1}{2R^3}C_{11}^4=(1+\upsilon)\alpha_T\left\{\frac{2R^2}{5}B_{11}^1+\frac{1}{R}B_{11}^2\right\},.$$

$$\frac{(3-2\upsilon)r^2}{10}C_{11}^1+\frac{(3-4\upsilon)}{2r}C_{11}^2-C_{11}^3+\frac{1}{2r^3}C_{11}^4=(1+\upsilon)\alpha_T\left\{\frac{2r^2}{5}B_{11}^1+\frac{1}{r}B_{11}^2\right\},$$

$$\frac{(1-4\upsilon)R^2}{10}C_{11}^1-\frac{2(1-\upsilon)}{R}C_{11}^2+C_{11}^3+\frac{1}{R^3}C_{11}^4=-2(1+\upsilon)\alpha_T\left\{\frac{R^2}{10}B_{11}^1+\frac{1}{R}B_{11}^2\right\},$$

$$\frac{(1-4\upsilon)r^2}{10}C_{11}^1-\frac{2(1-\upsilon)}{r}C_{11}^2+C_{11}^3+\frac{1}{r^3}C_{11}^4=-2(1+\upsilon)\alpha_T\left\{\frac{r^2}{10}B_{11}^1+\frac{1}{r}B_{11}^2\right\}$$

В таблицах, приведены результаты вычислений при следующих значениях параметров

$$R=10м.,\quad r=9.9м.,\qquad \upsilon=0.3,\qquad t_0=25^0C,\quad t_2=5^0C,\quad t_1=50^0C.$$

α	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
$w(\alpha,0,R)/\alpha_T$	418.3	386.4	295.8	209.1	108.3	0
$w(\alpha,0,r)/\alpha_T$	417.0	385.3	294.9	208.5	107.9	0

α	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
$u(\alpha,0,R)/\alpha_T$	–234.0	–216.2	–165.5	–117.0	–60.6	0
$u(\alpha,0,r)/\alpha_T$	–229.8	–212.3	–162.5	–114.9	–59.5	0

α	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
$\sigma_{\alpha\rho}(\alpha,0,R)/(\alpha_T E)$	–7.4 –0.1	–12.9 –6.1	–16.5 –11.3	–17.6 –13.9	–17.4 –15.5	–16.1 –16.1
$\sigma_{\alpha\rho}(\alpha,0,r)/(\alpha_T E)$	–7.3 –0.2	–12.8 –6.3	–16.5 –11.5	–17.6 –14.0	–17.5 –15.7	–16.2 –16.2

В первых двух таблицах приведены результаты для скользящего защемления основания. При жесткой его заделке эти перемещения не отличаются от приведенных в таблице, перемещения u, v мало отличаются от нуля. Верхняя строка в последней таблице соответствует скользящему защемлению, нижняя – жесткой заделке.

Резюме

Строится точное решение трехмерной задачи теории упругости для полого шара, находящегося в температурном поле. Решение представлено в виде рядов из комбинаций степенных, тригонометрических и шаровых функций. В качестве примера рассматривается сферический купол, основание которого находится в условиях жесткого или скользящего защемления. Решение получено с помощью компьютерной системы «Mathematica - 5»

Литература

1. Гурьянов Н.Г. Краевые задачи теории упругости для шара и цилиндра / Н.Г. Гурьянов, О.Н. Тюленева – Казань: Изд-во Казанского университета, 2008. – 207 с.
2. Бэйтмен Г. Высшие трансцендентные функции. Том 1. / Г.Бэйтмен, А. Эрдейи. – М.: Наука, 1973. – 294 с.

Summary

Exact solution of three-dimensional problem of elasticity theory for a spherical shell located in temperature pattern, is developed. The solution is represented by series of combinations of power, trigonometric and spherical functions. Spherical cap the basal part of which is located in terms of rigidly or gliding fixing, is considered as an example. The solution is derived with the help of "Mathematica – 5" computer program.

Поступила в редакцию 12.11.2012