УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ СОВМЕСТНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ТЕПЛОВЫХ И СИЛОВЫХ НАГРУЗОК, ПРИЛОЖЕННЫХ НА ВНЕШНЕЙ И ВНУТРЕННЕЙ ГРАНИЦАХ

[1]Миронов Д.Н., [1]Чигарев В.А., [2]Гончаренко В.П.

[1] УО «Белорусский национальный технический университет», Минск
[2] УО «Военная академия Республики Беларусь», Минск

Термоупругая деформация тела, возникающая от нестационарных механических и тепловых воздействий, сопровождается обратным эффектом - изменением его температурного поля на внешних и внутренних границах. Задача термоупругости, в которой учитывается указанный выше эффект, называется связанной динамической задачей термоупругости [1, 3]. Но в данное задаче практически не рассматривается влияние напряжений от совместного воздействия температурных и силовых воздействий и нет математических зависимостей, позволяющих численно оценить данное воздействие. Поэтому задачей работы является получение описанных выше зависимостей. Законы термодинамики гласят, что изменение деформаций упругого тела сопровождается изменением его температуры, при котором возникает теплопоток, обуславливающий увеличение энтропии термодинамической системы и, следовательно, термоупругое рассеяние энергии [4]. В металлических телах эффект связанности поля деформации и температурного поля обычно мало влияет на термическое возмущение и распределение тепловых напряжений. Но это не значит, что подобное положение сохранится и для новых материалов, обладающих большим параметром связанности [5, 6].

При учете эффекта связанности устанавливаются новые качественные особенности распространения упругих волн, которые под влиянием тепловых эффектов распространяются с затуханием и дисперсией. В частности, существенно отличается решение динамической задачи термоупругости о тепловом ударе на поверхности полупространства без учета связи полей деформации и температуры от решения с учетом этой связи; в случае «несвязанного» решения разрыв напряжения αx остается неизменным, тогда как при «связанном» он с течением времени быстро уменьшается. В работе, связанная задача термоупругости рассматривается при малом термическом возмущении, т.е. при

$$\frac{T-T_0}{T_0} << 1. \tag{1}$$

В этом случае связанная задача становится линейной и при формулировке ее в перемещениях сводится к решению системы уравнений

$$\mu\nabla^2\vec{u} + (\lambda+\mu)\ \mathrm{grad\,div}\ \vec{u} + \vec{F} - (3\lambda+2\mu)\alpha_T\ \mathrm{grad}\ (T-T_0) - \rho\ddot{\vec{u}} = 0, \tag{2}$$
$$\nabla^2 T + \frac{\omega_0}{\lambda_q} - \frac{1}{a}T - \frac{(3\lambda+2\mu)\alpha_T T_0}{\lambda_q}\mathrm{div}\,\dot{\vec{u}} = 0,$$

где μ – коэффициент динамической вязкости; u – деформация; F – поверхностная площадь; λ – коэффициент теплопроводности; α_T – коэффициент теплоотдачи; λ_q – коэффициент теплоотдачи потока; ρ – плотность, ω – скорость течения теплового потока, ∇ - оператор Лапласа.

Представления общих решений этой системы обобщают представления общих решений уравнения

$$\mu\nabla^2 u + (\lambda+\mu)\ \mathrm{grad\,div}\ \vec{u} - (3\lambda+2\mu)\alpha_T\ \mathrm{grad}\ (\mathrm{T}-\mathrm{T}_0) - \rho\ddot{\vec{u}} = 0, \tag{3}$$

описывающего динамическую задачу термоупругости. Известные представления решения уравнений классической теории упругости Б.Г. Галеркина и П.Ф. Папковича обобщаются на случай связанной задачи термоупругости. Применение прямых методов для решения связанных задач термоупругости в общем случае встречает большие математические трудности; перспективной является разработка приближенных методов решения связанных задач термоупругости на основе вариационных принципов, аналогичных таковым для статических и квазистатических задач термоупругости.

Представления общего решения. Связанная задача термоупругости при малом термическом возмущении описывается системой уравнений (2) при начальных и граничных условиях.

При объемной силе

$$\vec{F} = \mathrm{grad}\,\Pi + \mathrm{rot}\,\vec{\chi} \tag{4}$$

известно следующее представление общего решения уравнений (2):

$$\mathrm{u} = \mathrm{grad}\ \Phi + \mathrm{rot}\ A \tag{5}$$

$$T - T_0 = \frac{1}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T}\left[(\lambda + 2\mu)\,\Pi_1^2 \varPhi + \varPi\ \right], \tag{6}$$

в котором скалярная Φ и векторная $\vec{A}$ функции удовлетворяют уравнениям

$$\mathrm{A}^2\left[\ \varepsilon_1^2 \Phi + \frac{1}{\lambda + 2\mu}\Pi\ \right] - \frac{\varepsilon}{\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\Phi = -\frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T}{(\lambda + 2\mu)\lambda_q}\omega_0\ ; \tag{7}$$

$$\vec{A} = -\frac{\vec{\chi}}{\mu} \qquad \Pi^2 = \nabla^2 - \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\ \varepsilon^{2}_{n} = \nabla^2 - \frac{1}{c_n^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ \ (n = 1{,}2); \tag{8}$$

где ε – параметр связанности, имеющий значение, $\vec{\chi}$ – термоупругая постоянная, c_1 и c_2 – скорость распространения упругой волны соответственно расширения и искажения (9).

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho},\ c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}. \tag{9}$$

При ε = 0 и П = 0 уравнение (7) на основании уравнения

$$\nabla^2 T + \frac{\omega_0}{\lambda_q} - \frac{1}{a}T = 0 \tag{10}$$

переходит в
$$A_1^2\,\Phi = \frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T}{\lambda + 2\mu}(T - T_0) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu}\alpha_T(T - T_0), \tag{11}$$

а при $\vec{\chi}$ = 0 уравнение (7) переходит в уравнение (12) динамической задачи термоупругости.

$$\varepsilon_2^2\,\vec{A} = 0 \tag{12}$$

Найдено также обобщение известного представления решения уравнений классической теории упругости Б. Г. Галеркина [2] (на случай связанной задачи термоупругости):

$$\vec{u} = \mathrm{grad}\ \Phi + \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\varepsilon_1^2\ \vec{A} - \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \vec{A},\ T - T_0 = \frac{\lambda + 2\mu}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T}\varepsilon_1^2\ \Phi, \tag{13}$$

где функция Φ и $\vec{A}$ удовлетворяют уравнениям

$$A^2\Pi_1^2\,\Phi - \frac{\varepsilon}{a}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\Phi - \frac{\mu}{\lambda + \mu}\cdot\frac{\varepsilon}{a}\varepsilon_2^2\frac{\partial}{\partial t}\ \ \mathrm{div}\,\vec{A} = -\frac{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T}{(\lambda + 2\mu)\lambda_q}\omega_0 \tag{14}$$

$$\Phi^2\,\Pi_2^2\,\vec{A} = -\frac{\lambda + \mu}{(\lambda + 2\mu)\mu}\vec{F} \tag{15}$$

Как и в динамической задаче термоупругости, представление (13) при отсутствии объемных сил можно преобразовать к представлению (5). Действительно, если в представление (13) и уравнение (14) внести выражения

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}_1 + \vec{A}_2, \qquad \Phi = \Phi' + \mathrm{div}\ \vec{A}_1 \tag{16}$$

в которых $\vec{A}_0$ – частное решение неоднородного уравнения (15), $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ – решения уравнений

$$\Pi_1^2\ \bar{A}_1 = 0\,,\ \Pi_2^2,\ \bar{A}_2 = 0 \tag{17}$$

где Φ'– новая скалярная функция, то форма их не изменится, но вместо Φ и $\vec{A}$ в представлении (13) возникают Φ' и $\vec{A}_1 + \vec{A}_2$, а в уравнении (14) Φ' и $\vec{A}_0$. На основании второго уравнения (17) и тождества

$$\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,\vec{A}_2 = \nabla^2\vec{A}_2 + \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \vec{A}_2 \tag{18}$$

при подстановке – rot $\vec{A}_2 = \vec{A}'$ такое представления при $\vec{A}_0 = 0$, П = 0, Х = 0 (отсутствие объемных сил) переходит в представление (5). Вводя в представление (13) и в уравнения (14) и (15) новые функции

$$\mathrm{B}_0 = \operatorname{div}\vec{A} - \vec{\mathrm{B}}\cdot\vec{r}, \ \vec{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\Pi_1^2\vec{A} \qquad (19)$$

где r – радиус-вектор, получаем обобщение известного представления П. Ф Папковича на случай связанной задачи термоупругости (19)

$$\vec{u} = \operatorname{grad}\Phi + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\vec{\mathrm{B}} - \operatorname{grad}\vec{\mathrm{B}}\cdot\vec{r} + \mathrm{B}_0; \qquad \mathrm{T} - \mathrm{T}_0 = \frac{\lambda+2\mu}{(3\lambda+2\mu)\alpha_T}\varepsilon_1^2\Phi, \qquad (20)$$

в котором функция Ф, $\vec{B}$, B_0 удовлетворяют уравнениям

$$\mathrm{A}^2\Pi_1^2\Phi - \frac{\varepsilon}{a}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\Phi - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{\varepsilon}{a}\square_2^2\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}\cdot\vec{r} + B_0) = \frac{(3\lambda+2\mu)\alpha_T}{(\lambda+2\mu)\lambda_q}\omega_0 \qquad (21)$$

$$\Pi_2^2\vec{B} = -\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)\mu}\vec{F}, \ B_0 + \vec{r}\cdot\Phi_1^2 B_0 = 0 \qquad (22)$$

В случае распространения безвихревой волны (волны расширения) и отсутствия объемных сил и источников тепла $(\vec{A} = 0, \Pi = 0, \omega_0 = 0)$ представление (5) имеет вид

$$\vec{u} = \operatorname{grad}\Phi, \ \mathrm{T} - \mathrm{T}_0 = \frac{\lambda+2\mu}{(3\lambda+2\mu)\alpha_T}\varepsilon_1^2\Phi, \qquad (23)$$

где функция Φ удовлетворяет уравнению

$$(\Pi^2\mathrm{A}_1^2 - \frac{\varepsilon}{a}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2)\Phi = 0 \qquad (24)$$

Решение для функции Ф ищут в виде

$$\Phi = \varphi(x, y, z)e^{pt}, \qquad (25)$$

где р – комплексная постоянная. Подставляя это решение в (24), для φ получают уравнение

$$\left[\left(\nabla^2 - \frac{p}{a}\right)\left(\nabla^2 - \frac{p^2}{c_1^2}\right) - \frac{\varepsilon p}{a}\nabla^2\right] = 0, \qquad (26)$$

которое может быть представлено в виде

$$(\nabla^2 + \delta_1^2)(\nabla^2 + \delta_2^2)\varphi = 0, \qquad (27)$$

где

$$\delta_1^2\delta_2^2 = -\frac{p^2}{2c_1^2}\left\{\left(1 + \frac{1+\varepsilon}{\chi'}\right) \pm \left[1 - \frac{2(1-\varepsilon)}{\chi'} + \left(\frac{1+\varepsilon}{\chi'}\right)^2\right]^{1/2}\right\}; \ \chi' = \frac{ap}{c_1^2}. \qquad (28)$$

Если предположить, что термоупругая связь отсутствует (ε = 0), то из уравнения (28) получаем

$$\delta_1^2 = -\frac{p^2}{c_1^2}; \ \delta_2^2 = -\frac{p}{a}. \qquad (29)$$

Следовательно, уравнение (28) описывает распространение двух видов волн расширения, из которых один, связанный с δ_1, близок к чисто упругой волне, а другой, связанный с δ_2, сходен по своему характеру с чисто тепловой волной.

На основании уравнений (25) и (26) общее решение уравнения (24) можно представить в виде

$$\Phi = \sum_{j=1}^{2}\varphi_j e^{pt}, \qquad (30)$$

где φ_j удовлетворяет уравнению

$$(\nabla^2 + \delta_j^2)\varphi_j = 0 \quad j = 1,2. \qquad (31)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае общее решение связанной термоупругой задачи на основании представления (23) и решения (30) принимает вид

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{2} \text{grad } \varphi_j e^{pt} \tag{32}$$

$$\text{T} - \text{T}_0 = -\frac{\lambda + 2\mu}{(3\lambda + 2\mu)\alpha_T} \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{p^2}{c_1^2} + \delta_1^2 \right) \varphi_j e^{pt} \tag{33}$$

Учитывая, что $\varepsilon_{RR} = \text{div } \vec{u} = \sum_{j=1}^{2} \nabla^2 \varphi_j e^{pt} - \sum_{j=1}^{2} \delta_j^2 \varphi_j e^{pt}$ и принимая во внимание формулу (33), получаем на основании соотношения

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \left[\lambda\varepsilon_{RR} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T (T - T_0) \right] \delta_{ij} \tag{34}$$

следующие выражения для напряжений:

$$\sigma_{Rl} = 2\mu \left[\varepsilon_{Rl} + \delta_{Rl} \sum_{j=1}^{2} \left(\delta_j^2 + \frac{\rho p^2}{2\mu} \right) \varphi_j e^{pt} \right] \tag{35}$$

δ_{Rl} – символ Кронекера; ρ – плотность среды, в которой распространяется волна (31).

Задача термоупругости, описываемая двумя уравнениями:

$$\mu\nabla^2 u + (\lambda + \mu) \text{ grad div } \vec{u} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T \text{ grad } (T - T_0) - \rho \ddot{\vec{u}} = 0, \tag{36}$$

$$\nabla^2 T + \frac{\omega_0}{\lambda_q} - \frac{1}{a} T = 0 \tag{37}$$

называется несвязанной динамической задачей термоупругости, или просто динамической задачей термоупругости. При существенном приращении температуры $T - T_0$ коэффициенты λ, μ, α_T в соотношениях (34) являются функциями T, а следовательно, и функциями координат xR и времени t. Помня об этом, находим для такой задачи следующие уравнения движения в перемещениях:

$$\mu u_{i,RR} + (\lambda + \mu) u_{R,Ri} + \mu_{,R} (u_{i,R} + u_{R,i}) + \lambda_{,i} u_{R,R} - \left[(3\lambda + 2\mu)\alpha_T (T - T_0) \right]_{,i} - \rho \ddot{u}_i . \tag{38}$$

Вместо этих трех скалярных уравнений можно записать одно векторное в виде

$$\mu\nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{ grad div} \vec{u} + 2 \text{ grad } \mu \cdot \Pi\varepsilon \text{ grad } \lambda \text{ div } \vec{u} - grad \left[(3\lambda + 2\mu)\alpha_T (T - T_0) \right] - \rho \ddot{\vec{u}}_i , \tag{39}$$

где grad μ и$\cdot$ $\Pi\varepsilon$ – скалярное произведение тензора деформации $\Pi\varepsilon$ на вектор grad μ. Если учесть зависимость λ_q от температуры, то уравнение теплопроводности становится нелинейным.

Резюме

В работе получены зависимости тензоров напряжений и деформаций на внешних и внутренних границах оболочек от совместных температурных и механических воздействий.

Литература

1. Карнаухов, В.Г. Связанные задачи термоупругости / В.Г. Карнаухов – Киев: Наука, думка, 1982. – 260с.
2. Зарубин, В.С. Математические модели термомеханики / В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 168с.
3. Устинов, Ю.А. Некоторые задачи для упругих цилиндрических тел с винтовой анизотропией / Ю.А. Устинов // Успехи механики. – 2003. - №4. – С. 3 – 29.
4. Кондепуди, Д. Современная термодинамика (От тепловых двигателей до диссипативных структур) / Д. Кондепуди, И. Пригожин. – Москва, 2002. – 461 с.
5. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Д. Гудьер – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
6. Акимов, В.А. Операторный метод решения задач теории упругости / В.А. Акимов – Минск: УП «Технопринт», 2003 – 101 с.

Summary

In work dependences тензоров pressure and deformations on external and internal borders of covers from joint temperature and mechanical influences are received. The given problem is considered within the limits of the theory of elasticity of a firm body.

Поступила в редакцию 02.10.2012