

**ПРИМЕНЕНИЕ СХЕМЫ «КРЕСТ» ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ
ДИНАМИЧЕСКИХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИБКИХ АРМИРОВАННЫХ
БАЛОК-СТЕНОК С УЧЕТОМ ИХ ОСЛАБЛЕННОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ
ПОПЕРЕЧНОМУ СДВИГУ**

Немировский Ю.В., Янковский А.П.

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Стержни и балки составляют основу силовых элементов многих защитных ограждений и ответственных элементов судостроительной, машиностроительной и авиационной техники, объектов стройиндустрии. При воздействии динамических нагрузок высокой интенсивности их повреждаемость во многом определяет возможность дальнейшего функционирования указанных объектов. Поэтому проблема динамического расчета таких элементов конструкций является одной из важнейших в механике деформируемого твердого тела. Большинство существующих на данный момент решений основано на модели идеального жесткопластического тела. Их обзор и анализ приведены в [1, 2 и др.]. Упругопластическая динамика изотропных балок исследована, например, в [3, 4 и др.], причем в [3] – на основе первого варианта теории Тимошенко, т.е. с учетом однородных по высоте поперечных сдвигов.

В работах [5, 6] авторы изучали динамическое поведение армированных балок в рамках моделей упругопластического и вязкопластического деформирования их фазовых материалов. Особенность этих исследований заключается в том, что они проводились в рамках гипотез Бернулли, т.е. в балках не учитывались поперечные сдвиги и они считались относительно жесткими (не гибкими). Однако известно, что при изучении механического поведения линейно-упруго или линейно-вязкоупруго изгибаемых тонкостенных элементов конструкций типа балок, пластин и оболочек волокнистой структуры с сильно выраженной анизотропией, когда модули упругости фазовых материалов различаются на несколько порядков (в 30 и более раз – угле-, боропластики и т.п. [7]), необходимо учитывать их ослабленное сопротивление поперечному сдвигу [3, 8–11 и др.].

В металлокомпозитных (или на основе металлического связующего) тонкостенных конструкциях модули упругости фазовых материалов различаются менее чем на порядок [7] (слабая анизотропия композиции), поэтому при исследовании их упругого поведения в условиях изгиба достаточно использовать классические теории Бернулли или Кирхгофа – Лява [10, 11 и др.], не учитывающие поперечные сдвиги. При изучении же упругопластического деформирования изгибаемых армированных металлокомпозитных тонкостенных элементов конструкций может оказаться необходимым учитывать их ослабленное сопротивление поперечному сдвигу. Действительно, в [12] была предложена итерационная модель упругопластического поведения перекрестно-армированного слоя, основанная на применении метода секущего модуля [13]. Покажем, что для некоторых металлокомпозитных или композиций с металлическим связующим при одних и тех же деформациях секущие модули (которые в линейно-упругом случае соответствуют модули упругости) фазовых материалов могут различаться в десятки раз и даже на два порядка.

С этой целью рассмотрим идеализированную диаграмму растяжения–сжатия фазового материала в виде диаграммы с линейным упрочнением [14]

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s = \sigma_s / E, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s + E_s (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s), & |\varepsilon| > \varepsilon_s, \end{cases} \quad (1)$$

где σ , ε – напряжение и деформация; E , E_s – модуль Юнга и модуль линейного упрочнения; σ_s , ε_s – предел текучести и предельная упругая деформация фазового материала. Секущий модуль определяется так [13, 14]:

$$G_s(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon) / \varepsilon. \quad (2)$$

На рис. 1 изображены зависимости

$$g(\varepsilon) = G_s^{(1)}(\varepsilon) / G_s^{(0)}(\varepsilon) \quad (3)$$

для некоторых композиций: АДН–У8А (кривая 1), АДМ–У8А (кривая 2), ИМВ–2–В (кривая 3). В равенстве (3) принято: $G_s^{(0)}$, $G_s^{(1)}$ – секущие модули связующего и арматуры композиции. Механические характеристики фазовых материалов, которые, согласно [12], предполагаются несжимаемыми, приведены в таблице.

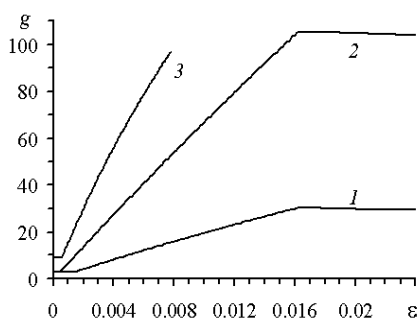


Рисунок 1 – Зависимости отношений секущих модулей некоторых фазовых материалов

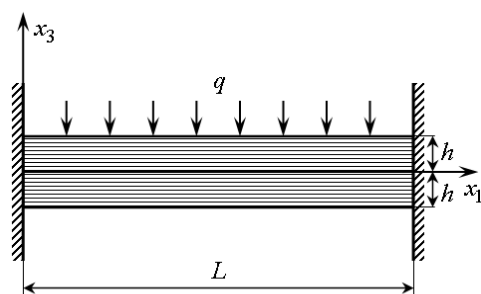


Рисунок 2 – Армированная балка-стенка

Таблица 1 – Физико-механические характеристики фазовых материалов [7]

Материал	ρ , кг/м ³	σ_s , МПа	E , ГПа	E_s , ГПа
Алюминиевый сплав АДН	2700	100	71	0,824
Алюминиевый сплав АДМ	2700	30	71	0,143
Магниевый сплав ИМВ-2	1590	26	45	0,965
Стальная проволока У8А	7800	3400	210	9,545
Борные волокна (В)	2550	3200	410	—

Левые горизонтальные участки кривых на рис. 1, согласно (1)–(3), соответствуют линейно-упругому деформированию обоих фазовых материалов, возрастающие участки – пластическому деформированию связующего, а правые убывающие участки – пластическому деформированию обоих фазовых материалов. (Борные волокна ведут себя упруго-хрупко [7], поэтому ниспадающий участок на кривой 3 отсутствует.)

Как видно из рис.1, для некоторых металлокомпозиций или композиций с металлическим связующим отношение секущих модулей (3) может быть больше 30, следовательно, при изучении упруго-пластического изгиба тонкостенных элементов конструкций из таких композиций необходимо учитывать их ослабленное сопротивление поперечному сдвигу.

Для описания ослабленного сопротивления продольно-армированной балки-стенки поперечному сдвигу воспользуемся вторым вариантом теории Тимошенко [8, 10 и др.], т.е. сдвиговую деформацию ε_{13} в поперечном направлении x_3 зададим распределенной по высоте балки в следующем виде:

$$\varepsilon_{13}(x_1, x_3, t) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \varepsilon_{13}^0(x_1, t), \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq t_0, \quad (4)$$

где h – полувысота балки; L – ее длина; ε_{13}^0 – деформация поперечного сдвига в срединном слое ($x_3 = 0$); t – время; x_1, x_2, x_3 – прямоугольная декартова система координат, связанная с балкой, как показано на рис. 2; t_0 – начальный момент времени. Высота $2h$ балки-стенки и ее толщина B в направлении x_2 предполагаются постоянными (хотя это и не принципиально).

Согласно теории Тимошенко, обжатием тонкостенного элемента пренебрегаем, т.е. считаем, что прогиб u_3 не зависит от поперечной координаты x_3 ($u_3 = u_3(x_1, t)$). Используя дифференциальные соотношения, связывающие деформации с перемещениями, на основании (4) в приближении Кармана [15] получим

$$u_1(x_1, x_3, t) = u_1^0(x_1, t) - x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{2x_3}{h^2} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) \varepsilon_{13}^0(x_1, t); \quad (5)$$

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_3, t) = \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{2x_3}{h^2} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) \frac{\partial \varepsilon_{13}^0}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2, \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (6)$$

где $u_1^0(x_1, t)$ – перемещение точек срединного слоя ($x_3 = 0$) в продольном направлении x_1 . Остальные деформации в рассматриваемых балках-стенках либо тождественно равны нулю ($\varepsilon_{12} \equiv \varepsilon_{23} \equiv 0$), либо определяются из условия несжимаемости $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$, из которого, согласно допущениям, использованным в [12], для балок-стенок с учетом (6) и равенств $\sigma_{22} \equiv \sigma_{33} \equiv 0$ получаем $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\varepsilon_{11}/2$. (Здесь и далее ε_{ij} , σ_{ij} – тензоры усредненных деформаций и напряжений в композиции.)

Таким образом, в соотношениях (4)–(6) неизвестными являются функции u_1^0 , u_3 , ε_{13}^0 , зависящие только от одной пространственной переменной x_1 и времени t .

Зная выражения для компонентов тензора деформаций ε_{11} , ε_{13} , согласно равенству (28) с учетом соотношений (29), (27) из [12], можем определить все ненулевые компоненты напряжений в каждой точке балки-стенки

$$\sigma_{11}(x_1, x_3, t) = a_{11}^n \varepsilon_{11}, \quad \sigma_{13}(x_1, x_3, t) = a_{55}^n \varepsilon_{13}, \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (7)$$

где a_{11}^n , a_{55}^n – ненулевые компоненты матрицы A^n в (29) из [12], известные в данный момент времени t в каждой точке тонкостенной конструкции из решения на предыдущей n -й итерации по методу секущего модуля и в рассматриваемом частном случае продольного армирования определяемые так:

$$a_{11}^n(x_1, x_3, t) = 3 \sum_{k=0}^K \omega_k g_k \left(\Gamma_k^n, \theta \right), \quad \frac{1}{a_{55}^n(x_1, x_3, t)} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^K \frac{\omega_k}{g_k \left(\Gamma_k^n, \theta \right)}, \quad (8)$$

$$\Gamma_k^n(x_1, x_3, t) = \sqrt{3 \varepsilon_{11}^{(k)} \varepsilon_{11}^{(k)} + 4 \varepsilon_{13}^{(k)} \varepsilon_{13}^{(k)}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, K.$$

Здесь приняты те же обозначения, что и в [12]: K – количество семейств арматуры (предполагается, что в общем случае балка может быть армирована несколькими семействами волокон разной физической природы); ω_0 , ω_k – относительное объемное содержание связующего и арматуры k -го семейства в представительном элементе композиции;

$\varepsilon_{11}^{(k)}(x_1, x_3, t)$, $\varepsilon_{13}^{(k)}(x_1, x_3, t)$ – известные n -ые приближения деформаций в k -м фазовом материале (при $k = 0$ – в связующем, при $1 \leq k \leq K$ – в арматуре k -го семейства); Γ_k^n ($0 \leq k \leq K$) – известное n -ое приближение интенсивности деформаций сдвига в k -м фазовом материале [13, 14]; θ – температура композиции;

$g_k \left(\Gamma_k^n, \theta \right)$ – известный на n -ой итерации секущий модуль в k -м компоненте композиции: $T_k = g_k(\Gamma_k, \theta) \Gamma_k$ (T_k – интенсивность касательных напряжений в k -м фазовом материале). Отметим, что соотношения (8) формально совпадают со структурными формулами модели В.В. Болотина для однонаправленно армированного упругого композита в случае несжимаемых фазовых материалов [16].

Соотношения (7) с учетом (8) справедливы при нелинейно-упругом деформировании фазовых материалов или при активном их нагружении в случае упругопластического деформирования (в рамках деформационной теории пластичности [13, 14]). Учет разгрузки материалов компонентов компо-

зации приводит к более сложным, чем (7), (8), соотношениям $\sigma_{ij} \square \varepsilon_{ij}$, и этот случай в данной работе не рассматривается.

В настоящем исследовании для простоты предполагается, что балка нагружена только в поперечном направлении x_3 (см. рис. 2). При подстановке выражений (4) в соотношения (7) получаем автоматическое выполнение на верхней ($x_3 = h$) и нижней ($x_3 = -h$) торцевых поверхностях балки-стенки граничных условий по касательным напряжениям

$$\sigma_{13}^{(\pm)}(x_1, t) = \sigma_{13}(x_1, \pm h, t) = a_{55}^n(x_1, \pm h, t)\varepsilon_{13}(x_1, \pm h, t) \equiv 0.$$

В рамках первого варианта теории Тимошенко, используемого, например, в [3, 9 и др.], эти граничные условия не могут быть тождественно удовлетворены.

Используя уравнения равновесия гибких стержней [17], на основе принципа Даламбера с учетом (5) получим следующие уравнения движения балки-стенки:

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(F_{13} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 2hB\rho \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial F_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(F_{11} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + Bp_3(x_1, t) = 2hB\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - F_{13} = \frac{2}{3} h^3 B\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{8}{5} \varepsilon_{13}^0 - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad (10)$$

где [7]

$$\rho = \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k; \quad (11)$$

ρ_0, ρ_k – объемная плотность материала связующего и арматуры k -го семейства; F_{11}, F_{13} – мембранная и поперечная силы соответственно; M_{11} – изгибающий момент; p_3 – приведенная поперечная распределенная по толщине нагрузка, действующая в направлении x_3 (согласно рис. 2, $p_3 = -q$).

Для удобства дальнейшего изложения введем в рассмотрение новую неизвестную функцию

$$\gamma_{13}^0(x_1, t) \equiv \frac{8}{5} \varepsilon_{13}^0 - \frac{\partial u_3}{\partial x_1},$$

Отсюда

$$\varepsilon_{13}^0(x_1, t) = \frac{5}{8} \left(\gamma_{13}^0 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right). \quad (12)$$

Уравнение (10) с учетом (12) примет вид

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - F_{13} = \frac{2}{3} h^3 B\rho \frac{\partial^2 \gamma_{13}^0}{\partial t^2}. \quad (13)$$

Уравнения (9), (13) образуют систему уравнений движения рассматриваемой балки-стенки. Отметим, что нелинейным слагаемым в левой части первого уравнения (9) обычно пренебрегают [15, 18], предполагая его малость. В настоящем исследовании это слагаемое будем учитывать, так как для относительно высоких балок-стенок его вклад может быть значительным.

С учетом (12) соотношения (4)–(6) примут вид:

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_3, t) = \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \frac{x_3}{4h^2} \left(h^2 - \frac{5}{3} x_3^2 \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{5x_3}{4h^2} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2, \quad (14)$$

$$\varepsilon_{13}(x_1, x_3, t) = \frac{5}{8} \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \left(\gamma_{13}^0 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad t \geq t_0;$$

$$u_1(x_1, x_3, t) = u_1^0(x_1, t) + \frac{x_3}{4h^2} \left(h^2 - \frac{5}{3} x_3^2 \right) \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{5x_3}{4h^2} \left(h^2 - \frac{x_3^2}{3} \right) \gamma_{13}^0(x_1, t). \quad (15)$$

На основании выражений (7) с учетом (14) можем определить все внутренние силовые факторы в балке:

$$\begin{aligned} F_{11}(x_1, t) &= B \int_{-h}^h \sigma_{11} dx_3 = A_{11}^n \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + B_{11}^n \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + C_{11}^n \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1} + \frac{1}{2} A_{11}^n \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2, \\ M_{11}(x_1, t) &= B \int_{-h}^h \sigma_{11} x_3 dx_3 = \bar{A}_{11}^n \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + D_{11}^n \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + E_{11}^n \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \bar{A}_{11}^n \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2, \\ F_{13}(x_1, t) &= B \int_{-h}^h \sigma_{13} dx_3 = A_{55}^n \left(\gamma_{13}^0 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right), \quad 0 \leq x_1 \leq L, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}^n(x_1, t) &\equiv B \int_{-h}^h a_{11} dx_3, \quad \bar{A}_{11}^n(x_1, t) \equiv B \int_{-h}^h a_{11} x_3 dx_3, \quad B_{11}^n(x_1, t) \equiv \frac{B}{4h^2} \int_{-h}^h a_{11} x_3 \left(h^2 - \frac{5}{3} x_3^2 \right) dx_3, \\ C_{11}^n(x_1, t) &\equiv \frac{5B}{4h^2} \int_{-h}^h a_{11} x_3 \left(h^2 - \frac{1}{3} x_3^2 \right) dx_3, \quad D_{11}^n(x_1, t) \equiv \frac{B}{4h^2} \int_{-h}^h a_{11} x_3^2 \left(h^2 - \frac{5}{3} x_3^2 \right) dx_3, \\ E_{11}^n(x_1, t) &\equiv \frac{5B}{4h^2} \int_{-h}^h a_{11} x_3^2 \left(h^2 - \frac{1}{3} x_3^2 \right) dx_3, \quad A_{55}^n(x_1, t) \equiv \frac{5B}{8h^2} \int_{-h}^h a_{55} \left(h^2 - x_3^2 \right) dx_3, \quad 0 \leq x_1 \leq L. \end{aligned} \quad (17)$$

Внутренние силовые факторы (16) должны удовлетворять уравнениям движения (9), (13).

Определим тип системы уравнений движения балки-стенки в геометрически линейной постановке в случае линейно-упругого поведения фазовых материалов композиции. При этом, согласно (8), имеем

$$a_{11} = \text{const}, \quad a_{55} = \text{const}, \quad (18)$$

причем в (8) $g_k = G_k = \text{const}$ ($0 \leq k \leq K$) – модуль сдвига k -го фазового материала. Здесь a_{11} – эффективный продольный модуль упругости композиции; a_{55} – удвоенный эффективный модуль поперечного сдвига композиции.

Подставляя (18) в соотношения (17), получим

$$\begin{aligned} A_{11} &= 2hBa_{11} = \text{const}, \quad \bar{A}_{11} = B_{11} = C_{11} = D_{11} = 0, \\ E_{11} &= \frac{2}{3} h^3 Ba_{11} = \text{const}, \quad A_{55} = \frac{5}{6} hBa_{55} = \text{const}. \end{aligned} \quad (19)$$

Равенства (16) с учетом (19) принимают вид

$$F_{11}(x_1, t) = 2hBa_{11} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}, \quad M_{11}(x_1, t) = \frac{2}{3} h^3 Ba_{11} \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1}, \quad F_{13}(x_1, t) = \frac{5}{6} hBa_{55} \left(\gamma_{13}^0 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right). \quad (20)$$

Подстановка выражений (20) в (9), (13) приводит к системе разрешающих уравнений движения линейно-упругих балок-стенок в геометрически линейной постановке:

$$\begin{aligned} 2hB \left[\rho \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} - a_{11} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} \right] &= 0, \\ hB \left[2\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - \frac{5}{6} a_{55} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right] - \frac{5}{6} hBa_{55} \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1} &= Bp_3(x_1, t), \\ \frac{2}{3} h^3 B \left[\rho \frac{\partial^2 \gamma_{13}^0}{\partial t^2} - a_{11} \frac{\partial^2 \gamma_{13}^0}{\partial x_1^2} \right] + \frac{5}{6} hBa_{55} \left(\gamma_{13}^0 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Каждое уравнение (21) содержит волновой оператор (выражения, заключенные в квадратные скобки), причем частные производные от неизвестных функций, входящие в эти операторы, имеют наибольший порядок, поэтому тип системы (21) определяется именно этими волновыми операторами. Следовательно, система (21) является системой гиперболического типа, описывающей волновые процессы, распространяющиеся в линейно-упругих балках-стенках, подчиняющихся гипотезам второго варианта теории Тимошенко.

Как видно из первого и третьего уравнений системы (21), волновые процессы для функций u_1^0 , γ_{13}^0 распространяются вдоль балки с одной и той же скоростью $c_1 = \sqrt{a_{11}/\rho}$. Согласно же второму уравнению (21), волновой процесс для прогиба u_3 распространяется вдоль балки с существенно меньшей скоростью $c_2 = \sqrt{5a_{55}/(12\rho)} < c_1$. Так, для балки из ИМВ-2-В-композиции (см. таблицу) с одинаковым объемным содержанием арматуры и связующего ($\omega_0 = \omega_1 = 0,5$) на основании (8), (11), (18) получим $c_1 \approx 10500$ м/с, $c_2 \approx 3500$ м/с, т.е. скорость распространения волнового процесса для u_3 почти в три раза меньше, чем для волновых процессов, описываемых функциями u_1^0 , γ_{13}^0 . (Для композиций с еще более сильно выраженной анизотропией – угле-, боропластики – различие в скоростях c_1 , c_2 становится более существенным.)

Таким образом, для численного интегрирования уравнений движения (21) можно использовать схему «крест» [3, 19 и др.]. Условная устойчивость этой схемы накладывает следующее ограничение на выбор шагов по времени Δt и по пространственной переменной Δx_1 : $\Delta x_1 / \Delta t > c_1 > c_2$ [3, 19].

Если же рассматривается линейно-упругая задача в геометрически нелинейной постановке, то уравнения движения (9), (13) с учетом (16)–(19) принимают вид

$$2hB \left(\rho \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial t^2} - a_{11} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} \right) - 2hB \left[\left(a_{11} - \frac{5}{6} a_{55} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{5}{12} a_{55} \gamma_{13}^0 \right] \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{5}{6} hBa_{55} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1} = 0,$$

$$-2hBa_{11} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1^2} + 2hB\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - 2hB \left\{ a_{11} \left[\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] + \frac{5}{12} a_{55} \right\} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} -$$

$$-\frac{5}{6} hBa_{55} \frac{\partial \gamma_{13}^0}{\partial x_1} = Bp_3(x_1, t),$$

$$\frac{2}{3} h^3 B \left(\rho \frac{\partial^2 \gamma_{13}^0}{\partial t^2} - a_{11} \frac{\partial^2 \gamma_{13}^0}{\partial x_1^2} \right) + \frac{5}{6} hBa_{55} \left(\gamma_{13}^0 + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0.$$

Характеристическое уравнение системы (22):

$$\left(\rho \alpha_t^2 - a_{11} \alpha_x^2 \right) \left\{ \left(\rho \alpha_t^2 - a_{11} \alpha_x^2 \right) \left[\rho \alpha_t^2 - \left[a_{11} \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right) + \frac{5}{12} a_{55} \right] \alpha_x^2 \right] - \right.$$

$$\left. - a_{11} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \left[\left(a_{11} - \frac{5}{6} a_{55} \right) \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{5}{12} a_{55} \gamma_{13}^0 \right] \alpha_x^4 \right\} = 0,$$

где α_t , α_x – параметры, задающие направление характеристики ($\alpha_t^2 + \alpha_x^2 = 1$).

Первый сомножитель в уравнении (23), стоящий вне фигурных скобок, порождает две действительные характеристики, соответствующие волновому оператору в третьем уравнении системы (22). Выражение же, заключенное в уравнении (23) в фигурные скобки, может порождать как действительные, так и комплексные характеристики в разных подобластях области интегрирования системы

(22) $0 \leq x_1 \leq L$, $t \geq t_0$, т.е. в зависимости от соотношения величин $\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1}$, $\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2$, $\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \gamma_{13}^0$ и малости

их модулей по сравнению с единицей. Следовательно, в общем случае система уравнений движения (22) является квазилинейной системой смешанно-составного типа [20].

В частном случае, когда

$$\left| \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \right| \square \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \square \left| \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \gamma_{13}^0 \right| \square 1, \quad (24)$$

уравнение (23) приближенно можно заменить на $\left(\rho \alpha_t^2 - a_{11} \alpha_x^2 \right)^2 \left(\rho \alpha_t^2 - \frac{5}{12} a_{55} \alpha_x^2 \right) = 0$,

которое соответствует системе (21). А значит, при выполнении условий (24) система (22) является гиперболической и для ее интегрирования можно использовать условно устойчивую схему «крест» [3, 19].

Так как в общем случае, когда условия (24) не выполняются, система (22) не является гиперболической, то применение схемы «крест» для ее численного интегрирования требует специального обоснования.

Покажем, что в случае больших прогибов (для гибких балок) схема «крест» для системы (22) является неустойчивой. В качестве конкретных примеров исследуем динамическое поведение балки-стенки длиной $L = 1$ м высотой $2h = 0,1$ м (см. рис. 2), выполненной из ИМВ-2-В-композиции (см. таблицу) с плотностью армирования $\omega_1 = 0,5$ ($\omega_0 = 1 - \omega_1 = 0,5$). Оба конца балки жестко закреплены, т.е. выполняются следующие граничные условия

$$u_3(x_1, t) = 0, \quad u_1^0(x_1, t) = 0, \quad \gamma_{13}^0(x_1, t) = 0 \quad (x_1 = 0, L; \quad t \geq 0). \quad (25)$$

Здесь второе и третье соотношения являются следствиями интегральных равенств

$$\int_{-h}^h u_1(x_1, x_3, t) dx_3 = 0, \quad \int_{-h}^h u_1(x_1, x_3, t) x_3 dx_3 = 0 \quad (x_1 = 0, L; \quad t \geq 0),$$

где функция $u_1(x_1, x_3, t)$ имеет выражение (15).

В начальный момент времени $t = 0$ балка находится в состоянии покоя

$$\begin{aligned} u_3(x_1, 0) = 0, \quad u_1^0(x_1, 0) = 0, \quad \gamma_{13}^0(x_1, 0) = 0, \\ \frac{\partial u_3(x_1, 0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u_1^0(x_1, 0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \gamma_{13}^0(x_1, 0)}{\partial t} = 0 \quad (0 \leq x_1 \leq L) \end{aligned} \quad (26)$$

и нагружается фронтальной нагрузкой взрывного типа [1-3, 21]

$$p_3(x_1, t) = p_3(t) = p_* \left(e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_0 t} \right), \quad (27)$$

где $p_* = p_{\max} \left(e^{-\alpha_1 t_*} - e^{-\alpha_0 t_*} \right)^{-1}$, $t_* = \ln(\alpha_0 / \alpha_1) / (\alpha_0 - \alpha_1)$, $\alpha_0 \square \alpha_1 \square 1$; (28)

α_0, α_1 – параметры, задающие вид взрывной нагрузки; t_* – момент времени, в который внешняя нагрузка p_3 достигает своего максимального по модулю значения p_{\max} .

В расчетах принято $\alpha_0 = 200 \text{ с}^{-1}$, $\alpha_1 = 20 \text{ с}^{-1}$. На рис. 3 для примера изображена зависимость (27) с учетом (28) при $p_{\max} = 0,1$ ГПа. Для численного интегрирования начально-краевой задачи (21), (25), (26) или (22), (25), (26) использовалась схема «крест». При этом вдоль оси балки вводилась равномерная сетка с шагом $\Delta x_1 = L / 20 = 0,05$ м. Все частные производные в уравнениях системы (21) или (22) заменялись конечными разностями на трехточечном шаблоне (т.е. аппроксимация производных имела второй порядок точности [19]). Равномерный шаг по времени задавался равным $\Delta t = 10^{-8}$ с. Следовательно, $\Delta x_1 / \Delta t = 5 \cdot 10^6 \square c_1 = 10500$ м/с, т.е. необходимое условие устойчивости схемы «крест» для системы (21) выполнялось.

На рис. 4, 5 изображены кривые, характеризующие вертикальные колебания центрального сечения балки-стенки ($x_1 = L / 2$) при разных уровнях нагружения p_{\max} и разном механическом поведении связующего ИМВ-2.

На рис. 4 приведена зависимость $u_3(L/2, t)$ при $p_{\max} = 0,1$ ГПа. Как видно из этого рисунка, $|u_3| \leq 2h/5 = 2$ см, т.е. прогибы являются малыми (балка – относительно жесткой), поэтому выполняются условия (24) и система (22) является гиперболической, а значит, применение схемы «крест» приводит к устойчивому численному решению, которое визуально практически не отличается от решения системы (21).

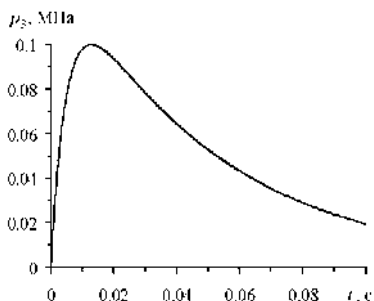


Рисунок 3 – Поведение фронтальной нагрузки взрывного типа

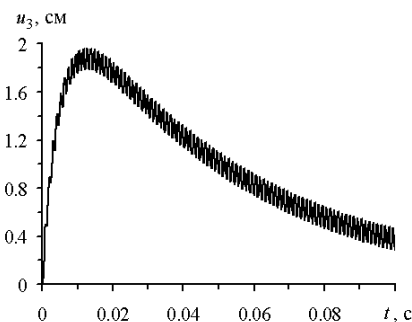
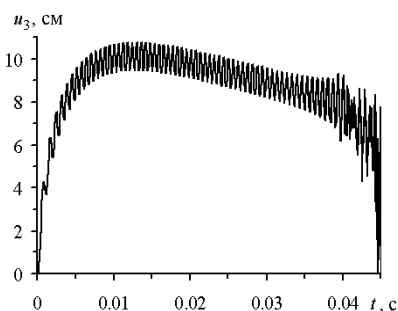
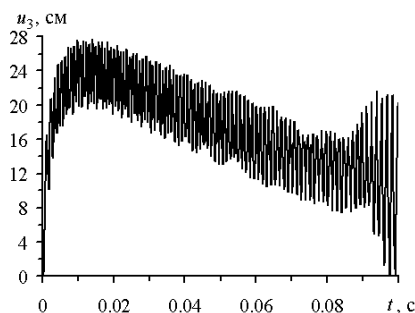


Рисунок 4 – Вертикальные колебания центрального сечения при $p_{\max} = 0,1$ ГПа

На рис. 5 изображены зависимости $u_3(L/2, t)$, рассчитанные при значительно большем уровне нагрузки ($p_{\max} = 1$ ГПа), причем на рис. 5, а приведено решение, полученное в предположении об идеальном линейно-упругом поведении связующего ИМВ-2 ($\epsilon_s \rightarrow \infty$ в (1)), а на рис. 5, б – в предположении об нелинейно-упругом поведении связующего, описываемом соотношениями (1) и табличными данными для сплава ИМВ-2.



а



б

а) – линейно-упругое поведение связующего; б) – нелинейно-упругое поведение связующего ИМВ-2

Рисунок 5 – Вертикальные колебания центрального сечения при $p_{\max} = 1$ ГПа

Из рис. 5 следует, что $|u_3| \approx 2h = 10$ см, т.е. прогибы при $p_{\max} = 1$ ГПа являются большими, поэтому условия (24) не выполняются и система (22) (или в нелинейно-упругом случае система (9), (13) с учетом (16), (17)) не является гиперболической. Поведение правых участков кривых на рис. 5 показывает, что схема «крест» в этом случае является неустойчивой как при линейно-упругом, так и при нелинейно-упругом поведении фазовых материалов композитной балки-стенки. По-видимому, и в более общем случае упругопластического деформирования фазовых материалов (с учетом явления разгрузки и эффекта Баушингера) схема «крест» также будет неустойчивой при решении задач динамики изгибаемых балок-стенок в рамках геометрически нелинейной постановки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00121-а).

Литература

1. Комаров, К.Л. Динамика жестко-пластических элементов конструкций / К.Л. Комаров, Ю.В. Немировский. – Новосибирск: Наука, 1984. – 236 с.
2. Ананенко, Л.А. Динамика неупругих балок / Л.А. Ананенко, К.Л. Комаров. – Новосибирск: Наука, 1999. – 151 с.

3. Абросимов, Н.А. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н.А. Абросимов, В.Г. Баженов. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
4. Карпов, В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. В 2 ч. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения / В.В. Карпов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 288 с.
5. Немировский, Ю.В. Интегрирование задачи динамического упругопластического изгиба армированных стержней переменного поперечного сечения обобщенными методами Рунге – Кутты / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Вычислительные технологии. – 2004. – Т. 9, № 4. – С. 77–95.
6. Немировский, Ю.В. Динамический вязкопластический изгиб армированных стержней переменного поперечного сечения / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Математические методы и физико-механические поля. – 2006. – Т. 49. № 1. – С. 53–66.
7. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
8. Малмейстер, А.К. Соппротивление полимерных и композитных материалов / А.К. Малмейстер, В.П. Тамуж, Г.А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1980. – 571 с.
9. Васильев, В.В. Механика конструкций из композитных материалов / В.В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 269 с.
10. Немировский, Ю.В. Прочность элементов конструкций из композитных материалов / Ю.В. Немировский, Б.С. Резников. – Новосибирск: Наука, 1986. – 166 с.
11. Немировский, Ю.В. О границах применимости некоторых теорий расчета изгибаемых армированных пластин / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Научный вестник НГТУ. – 2004. – №3 (18). – С. 91–113.
12. Немировский, Ю.В. Структурная модель механики металлокомпозитов / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Проблемы и достижения прикладной математики и механики: к 70-летию академика В.М. Фомина: сб. науч. тр. – Новосибирск: Параллель, 2010. – С. 98–103.
13. Ильюшин, А.А. Пластичность. Ч. 1. Упруго-пластические деформации / А.А. Ильюшин. – М.–Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948. – 376 с.
14. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
15. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
16. Болотин, В.В. Основные уравнения теории армированных сред / В.В. Болотин // Механика полимеров. – 1965. – № 2. – С. 27–37.
17. Доннелл, Л.Г. Балки, пластины и оболочки / Л.Г. Доннелл. – М.: Наука, 1982. – 567 с.
18. Вольмир, А.С. Гибкие пластинки и оболочки / А.С. Вольмир. – М.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1956. – 420 с.
19. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
20. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов / Т.Д. Джураев. – Ташкент: Фан, 1979. – 238 с.
21. Физика взрыва / Под ред. К. П. Станюковича. – М.: Наука, 1975. – 704 с.

Summary

It is formulated the initial-boundary problem of the dynamic deformation of a flexible reinforced beams-panels with regard to their weakened resistance of the transverse shear in the approximation of Karman. It is shown that in elastoplastic deformation of metal-composite beams it is necessary to take into account the weakened resistance to in-plane shear. A qualitative analysis of the governing system of equations of motion is performed. It is demonstrated that in the geometrically linear formulation the dynamics of the linear-elastic beams is described by a system of hyperbolic type, so for the numerical integration of the application of the «cross» scheme is quite justified if it meets necessary conditions of stability. In the framework of the geometrically nonlinear formulation of a problem of the dynamics the governing system of equations of motion is not hyperbolic, so in this task the «cross» scheme is unstable.

Поступила в редакцию 12.11.2012