УДК 539.3

ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ ИЗМЕНЕНИЯ ФОРМЫ

Буренин А.А., Рагозина В.Е., Иванова Ю.Е.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток

Волновые процессы передачи по нелинейно упругой среде сдвиговых деформаций имеют закономерности, принципиально отличные от тех, которые задают механизмы объемного деформирования. Объемная деформация изучена достаточно полно в [1-5], в частности, благодаря наличию аналогий с гидро- и аэродинамикой и разработанным в этих областях методам математического исследования. Для процессов поперечного деформирования на сегодняшний день получено сравнительно мало ключевых результатов, это направление требует дальнейшего анализа. Отметим, что для плоских одномерных задач при наличие деформационной анизотропии известны [6-7] два варианта волн разрыва деформации: волна плоскополяризованного типа и волна круговой поляризации. Первая из них может изменить только интенсивность предварительного сдвига, вторая корректирует его направленность. Кроме этого, применение метода малого параметра к задаче об одномерной плоской сдвиговой волне в несжимаемой среде без предварительных деформаций показало [8], что прифронтовая область волны в главном определяется решениями нового эволюционного уравнения, отличного от уравнения Хопфа. Действительно, угол наклона характеристик для эволюционного уравнения сдвиговой волны оказался зависящим не от удельного импульса, а от удельной кинетической энергии. Для обобщения перечисленных результатов далее рассмотрим одномерный процесс распространения осесимметричных деформаций по несжимаемой упругой среде. Предположение о несжимаемости среды принимается с целью сосредоточить все внимание на эволюции граничных возмущений для деформаций изменения формы.

Общая система уравнений движения изотропной несжимаемой упругой среды в системе декартовых координат x_i $\left(i=1,2,3\right)$ в представлении Эйлера имеет вид

$$\begin{gathered}\sigma_{ij,j}=\rho\left(\dot{v}_i+v_{i,j}v_j\right),\quad v_i=\dot{u}_i+u_{i,j}v_j,\qquad 2\alpha_{ij}=u_{i,j}+u_{j,i}-u_{k,i}u_{k,j},\\ W\left(I_1,I_2\right)=\left(a-\mu\right)I_1+aI_2+bI_1^2-\kappa I_1I_2-\theta I_1^3+cI_1^4+dI_2^2+kI_1^2I_2+\ldots,\\ \sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\frac{\partial W}{\partial\alpha_{ik}}\left(\delta_{kj}-2\alpha_{kj}\right),\ I_1=\alpha_{ii},\ I_2=\alpha_{ij}\alpha_{ji}.\end{gathered}\tag{1}$$

В (1) u_i и v_i – компоненты векторов перемещений и скорости, α_{ij},σ_{ij} – компоненты тензоров деформаций Альманси и напряжений Коши-Эйлера, $\rho=const$ – плотность среды, p – функция добавочного гидростатического давления, $W\left(I_1,I_2\right)$ – функция упругого потенциала (плотность распределения внутренней энергии, отнесенная к ρ), μ – модуль сдвига, a,b,c,d,k,θ,κ – упругие постоянные более высокого порядка. Точкой над символом в (1) и далее обозначена частная производная по времени, индексом после запятой – частная производная по соответствующей координате, по повторяющемуся индексу принято соглашение о суммировании.

Рассматриваем неограниченное пространство, занятое несжимаемой средой, с цилиндрической полостью. Граница полости в цилиндрических координатах $r,\ \psi,\ z$ задается уравнением $r=r_0$. До момента $t=0$ деформации в среде отсутствуют. С момента $t=0$ граничные точки начинают движение по закону

$$r=r_0=const,\ \psi=\psi_0+\varphi_0(t),\ u_z=u_0(t),\ \ \varphi_0(0)=u_0(0)=0,\ \ \varphi_0'(0)u_0'(0)\neq 0,\tag{2}$$

в котором $\varphi_0\left(t\right)$ и $u_0\left(t\right)$ – известные функции времени. Все точки среды также совершают винтовое движение, поэтому для поля перемещений имеем

$$u_r(r,t)=r(1-\cos\varphi),\quad u_\varphi(r,t)=r\sin\varphi,\quad u_z=u(r,t),\quad \varphi=\varphi(r,t)=\psi-\psi_0.\tag{3}$$

Как следствие системы уравнений (1) и формул (3) для функций $\varphi(r,t)$, $u(r,t)$, $p(r,t)$ получаем систему уравнений

$$
\begin{gathered}
-\tilde{p}_{,r}+2\beta\left(r\varphi_{,r}\varphi_{,rr}+u_{,r}u_{,rr}\right)+(2\beta+1)r\varphi_{,r}^{2}+\gamma r^{-1}u_{,r}^{2}+\ldots=-\frac{r(\dot{\varphi})^{2}}{C^{2}},\\
\varphi_{,rr}\left(1+\alpha u_{,r}^{2}+3\alpha r^{2}\varphi_{,r}^{2}\right)+2\alpha\varphi_{,r}u_{,r}u_{,rr}+\frac{\varphi_{,r}}{r}\left(3+3\alpha u_{,r}^{2}+5\alpha r^{2}\varphi_{,r}^{2}\right)+\ldots=\frac{\ddot{\varphi}}{C^{2}},\\
u_{,rr}\left(1+3\alpha u_{,r}^{2}+\alpha r^{2}\varphi_{,r}^{2}\right)+2\alpha r^{2}\varphi_{,r}u_{,r}\varphi_{,rr}+\frac{u_{,r}}{r}\left(1+\alpha u_{,r}^{2}+3\alpha r^{2}\varphi_{,r}^{2}\right)+\ldots=\frac{\ddot{u}}{C^{2}},\\
\tilde{p}=\frac{p}{\mu},\ C^{2}=\frac{\mu}{\rho},\ \alpha=\frac{a+b+\kappa+d}{\mu},\ \beta=-1-\frac{2a+2b+\kappa}{2\mu},\ \gamma=\beta+\frac{\kappa+2b}{2\mu}.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Из дифференциальных уравнений (4) второе и третье служат для определения поля перемещений, а первое необходимо для последующего нахождения неизвестной функции $p(r,t)$.

Передними фронтами граничных возмущений (2) могут быть ударные волны – цилиндрические поверхности разрывов деформаций и напряжений. На них должны выполняться геометрические и кинематические условия совместности разрывов [9], а также законы сохранения, что приводит в рассматриваемом случае к соотношениям

$$
[\sigma_{rr}]=0,\quad [\sigma_{\psi r}]=-\rho G[v_{\psi}],\quad [\sigma_{zr}]=-\rho G[v_{z}].
\tag{5}
$$

Квадратными скобками в (5) обозначен разрыв величины, заключенной в них, на ударной волне, G – скорость движения ударной волны в направлении единичной внешней нормали. В (5) первое соотношение служит краевым условием для вычисления добавочного гидростатического давления $p(r,t)$. Остальные условия системы (5) с учетом соотношений (1) и (3) позволяют записать

$$
\begin{gathered}
[H]\varphi_{,r}+\left\{H-[H]-\rho G^{2}\right\}[\varphi_{,r}]=0,\\
[H]u_{,r}+\left\{H-[H]-\rho G^{2}\right\}[u_{,r}]=0,\\
H=\frac{\partial W}{\partial I_{2}}-\frac{\partial W}{\partial I_{1}}+2\frac{\partial W}{\partial I_{2}}\tau=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{k}\tau^{k},\\
2\tau=r^{2}(\varphi_{,r})^{2}+(u_{,r})^{2},\quad \beta_{0}=\mu,\quad \beta_{1}=2(a+b+\kappa+d),\ldots
\end{gathered}
\tag{6}
$$

В формулах (6) многоточием обозначены невыписанные коэффициенты ряда для функции H, зависящие также от упругих модулей среды. Из системы (6) следует, что в несжимаемой упругой среде возможно распространение цилиндрических поверхностей разрывов двух типов. Если $[H]\neq 0\,([\tau]\neq 0)$, приходим к возможности распространения по среде плоскополяризованного разрыва, для которого

$$
\frac{\varphi_{,r}^{-}}{\varphi_{,r}^{+}}=\frac{u_{,r}^{-}}{u_{,r}^{+}},\qquad G_{1}=\left\{\frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}(\tau^{+})^{k}\left(\beta_{k}+\sum_{j=1}^{k+1}C_{k+1}^{j}(-1)^{j}(\tau^{+})^{1-j}[\tau]^{j}\right)\right\}^{1/2}.
\tag{7}
$$

Следуя формулам (7), на цилиндрической поверхности разрывов, распространяющейся со скоростью G_1, не меняется направление предварительного сдвига, а меняется только его интенсивность. Если провести термодинамический анализ ударного перехода на этой поверхности вполне аналогично [10], то возможно показать, что достаточным условием возникновения данного разрыва является увеличение на нем предварительного сдвига, т.е. на нем выполняется соотношение $[\tau]<0$. Это требование вполне согласуется с условием эволюционности плоскополяризованного разрыва.

Следствием системы (6) будет возможность возникновения еще одного типа поверхности разрывов, для которого $[\tau]=0$, т.е. на этой волне не меняется интенсивность предварительного сдвига, а меняется только его направление при $[\varphi_{,r}]\neq 0$ и $[u_{,r}]\neq 0$. А.Г. Куликовский называет такие поверхности разрывов ударными волнами круговой поляризации [6], т.к. направленность последующего сдвига задается только граничным воздействием. Скорость движения этого разрыва определяется формулой

$$G_2=\left\{\frac{1}{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\left(\tau^{+}\right)^k\right\}^{1/2}.$$

Данная поверхность разрывов является изоэнтропической. Волна круговой поляризации, если ее присутствие диктуется краевыми условиями, распространяется вслед за плоскополяризованной волной, которая движется по недеформированной среде первой. Образование второй ударной волны зависит от отношения функций $\varphi_0'(t)$ и $u_0'(t)$. Именно оно определяет, как со временем изменяется направление сдвига на граничной поверхности. Передача по среде информации об изменении направления сдвига тоже является нелинейным волновым процессом. Одним из итогов этого процесса становится, в частности, появление второй ударной волны.

Для применения метода сращиваемых асимптотических разложений определим безразмерные переменные задачи:

$$s=\frac{r-r_0}{r_0}\varepsilon^{-4},\ m=\frac{r-r_0-Ct}{r_0}\varepsilon^{-3},\ v=\varphi\varepsilon^{-\frac{9}{2}},\ w=\frac{u}{r_0}\varepsilon^{-\frac{9}{2}}, \tag{8}$$

где ε – малый параметр задачи, определяемый характерными константами краевого условия (2). Запись уравнений (4) и краевого условия (2) в переменных (8) позволяет методом последовательных линейных приближений построить решение, задающее динамику среды в окрестности нагружаемой границы. Получение этого решения подробно рассмотрено в [10]. Данное решение назовем внешним. В области его неравномерности, где существенными становятся нелинейные эффекты, необходимо определить дополнительное, внутреннее решение. Переход к области внутреннего решения задается переменными $n=\varepsilon^4 s$, m, $v(n,m)$, $w(n,m)$. В рассматриваемом случае искомые функции $v(n,m)$ и $w(n,m)$ достаточно представить рядами по степеням малого параметра, кратным трем:

$$v(n,m)=v_0(n,m)+\varepsilon^3 v_3(n,m)+...,\quad w(n,m)=w_0(n,m)+\varepsilon^3 w_3(n,m)+...$$

Во внутренних переменных на нулевом шаге метода из системы (4) получим систему эволюционных уравнений задачи

$$\begin{gathered}2g_{,n}+\alpha\left(3(1+n)^2g^2+h^2\right)g_{,m}+2\alpha hh_{,m}+\frac{3g}{1+n}=0,\\ 2h_{,n}+\alpha\left((1+n)^2g^2+3h^2\right)h_{,m}+2\alpha(1+n)^2ghg_{,m}+\frac{h}{1+n}=0,\quad g=v_{0,m},\ h=w_{0,m}.\end{gathered} \tag{9}$$

Важно отметить следующее обстоятельство: когда $g\equiv 0$ либо $h\equiv 0$, то есть движение среды было бы только вращательным или антиплоским соответственно, тогда из системы уравнений (9) следовало бы эволюционное уравнение, отличное от уравнения квазипростых волн, например для антиплосого движения, в виде

$$h_{,n}+\frac{3}{2}\alpha h^2h_{,m}+\frac{h}{1+n}=0.$$

Отличие здесь заключается только в том, что h во втором слагаемом правой части имеет вторую степень, а не первую, как в классическом уравнении Хопфа (квазипростых волн). Именно в этом заключается отличие в нелинейных закономерностях распространения по среде деформаций изменения формы от закономерностей в распространении деформаций изменения объема. Последние слагаемые в уравнениях (9) отражают затухание интенсивности для цилиндрических волн за счет изменения в геометрии поверхностей разрывов. Для системы (9) на плоскости переменных m,n получаем два семейства характеристик и соответствующие инварианты Римана:

$$\frac{dm}{dn}=\frac{3\alpha}{2}\left((1+n)^2g^2+h^2\right),\quad (1+n)\left((1+n)^2g^2+h^2\right)=const, \tag{10}$$

или

$$\frac{dm}{dn}=\frac{\alpha}{2}\left((1+n)^2g^2+h^2\right),\ hg^{-1}(1+n)^{-1}=const. \tag{11}$$

Вдоль характеристик (10) распространяется информация о квадрате интенсивности удара и послеударного воздействия. Вдоль характеристик (11) передается информация о направлении сдвигового воздействия.

Опрокидывание решения для характеристик (10) приводит к образованию плоскополяризованной ударной волны. Вдоль направлений (10) решение представим в виде

$$m-\frac{3\alpha}{2}\xi\ln(1+n)=F(\xi),\ \xi=(1+n)\left((1+n)^2 g^2+h^2\right), \tag{12}$$

где вид функции $F(\xi)$ полностью определяется краевыми условиями при $n\to 0$, т.е. уравнениями (2), записанными в безразмерном виде. Решение (12) справедливо как для условий (2), где плоскополяризованная ударная волна возникает сразу, так и для условий, приводящих к запаздыванию в образовании ударной волны. Отметим, что угол наклона ударной волны (7) отличен от угла наклона соответствующих ей характеристик (10).

Для линий (11) и решения вдоль них следует

$$\xi^{3/2}\ln(1+n)=-\alpha\xi^{1/2}F(\xi)+\frac{\alpha}{2}\int\frac{F(\xi)}{\sqrt{\xi}}d\xi+P(\eta),\quad \eta=hg^{-1}(1+n)^{-1}=const, \tag{13}$$

где $P(\eta)$ – функция, полностью определяемая краевыми условиями при $n\to 0$.

Характеристики (13) зависят сложным образом от строящегося решения, поэтому в общем случае нельзя сделать предварительное заключение об их геометрии, тогда как характеристики первого семейства, задаваемые уравнениями (13), при $\xi=const$ определяют логарифмические кривые в плоскости координат m,n. Опрокидывание непрерывного решения вдоль характеристик (13) происходит, когда производные $\eta_{,m}$ и $\eta_{,n}$ обращаются в бесконечность, то есть при минимальных значениях m и n, для которых $P'(\eta)=0$. Особый характер данной ударной волны состоит в том, что ее положение входит в число характеристических поверхностей. Это следует и из приближенного анализа, и при точной формулировке уравнений характеристик системы (4) и их сопоставлении с возможными скоростями ударных волн. На данной ударной волне сохраняется значение переменной ξ ,то есть $\xi^+=\xi^-$, поэтому не возникает изменений в геометрии характеристик (12).

Рассмотренные механизмы поведения осесимметричных сдвиговых волн в наиболее простых случаях краевых условий (2) позволяют построить приближенное аналитическое решение. Для более общих краевых условий они становятся основой для численных расчетов, например, для интегрирования шагами вдоль характеристик. Кроме того, полученное решение может найти применение для задач с большей размерностью, так как известно, что в малых областях в окрестности ударной волны многомерные волны ведут себя локально как одномерные [7, 12].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (12-01-90004-Бел_а, 11-01-00360-а, 11-01-98514-р_восток_а.).

Резюме

Рассматривается решение одномерной задачи с осевой симметрией о движении поперечных ударных волн от цилиндрической полости в нелинейно-упругом несжимаемом пространстве. Применение метода сращиваемых асимптотических разложений приводит к системе двух эволюционных уравнений. Для этих уравнений строится непрерывное решение в виде инвариантов Римана вдоль характеристических направлений. Полученное решение согласуется с возможностью образования двух ударных волн, плоскополяризованной и нейтральной.

Литература

1. Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений / И.М. Гельфанд // Успехи математических наук. – 1959. – Т. 14. – № 9. – С. 87-158.
2. Рождественский Б.Л.Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко – М.: Наука, 1978. – 688 с.

3. Руденко О.В. Теоретические основы нелинейной акустики / О.В. Руденко, С.И. Солуян – М.: Наука, 1975. – 288 с.
4. Чигарев А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред / А.В. Чигарев – Минск: Технопринт, 2000. – 426 с.
5. Пелиновский Е.Н. Нелинейные эволюционные уравнения / Е.Н. Пелиновский, В.Е. Фридман, Ю.К. Энгельбрехт – Таллин.: Валгус, 1984. – 156 с.
6. Куликовский А.Г. Нелинейные волны в упругих средах / А.Г. Куликовский, Е.И. Свешникова – М.: Московский лицей, 1998. – 412с.
7. Куликовский А.Г. Современные проблемы механики. Вып. 7: Классические и неклассические разрывы и их структуры в нелинейно-упругих средах с дисперсией и диссипацией / А.Г. Куликовский, А.П. Чугайнова – М.: МИАН, 2007. – 150 с.
8. Буренин А.А. Эволюционное уравнение для волновых процессов формоизменения / А.А. Буренин, В.Е. Рагозина, Ю.Е. Иванова // Известия СГУ. Серия «Математика. Механика. Информатика». – 2009. – Т. 9. – Вып. 4. – Ч. 2. – С. 14 – 24.
9. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности / Г.И. Быковцев, Д.Д. Ивлев – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528с.
10. Буренин А.А. Об ударном деформировании несжимаемого упругого полупространства / А.А. Буренин // Прикладная механика. – 1985. – Т. 21. – № 5. – С. 3-8.
11. Иванова Ю.Е. Об ударных осесимметрических движениях несжимаемой упругой среды при ударных воздействиях / Ю.Е. Иванова, В.Е. Рагозина // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т. 47. – № 6. – С. 144-151.
12. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем – М.: Мир, 1977. – 622 с.

Summary

The solution of one-dimensional problem with axial symmetry of transverse shock waves motion from the cylindrical cavity in the nonlinear elastic incompressible space is considered. Application of the matched asymptotic expansions method leads to the system of two evolution equations. Its continuous solution in the Riemann invariants form along characteristic directions is constructed. The resulting solution is consistent with the possible formation of two shock waves: plane polarized wave and wave of circle polarisation.

Поступила в редакцию 26.11.2012