

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ В СФЕРИЧЕСКОМ ДИФфуЗОРЕ С ИДЕАЛЬНО ГЛАДКИМИ СТЕНКАМИ

¹Полоник М.В., ²Рогачев Е.Е.

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток

²Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Дальневосточный федеральный университет», Владивосток

В настоящей статье рассматривается течение материала в сферическом диффузоре при стационарной упругопластической границе. Для технологий волочения такая ситуация является оптимальной и ее добиваются при разработке технологических режимов. В качестве основных математических моделей при моделировании и расчетах таких технологических процессов (прокатка, волочение) выступают либо теория идеального пластического течения [1-3], либо теория упругопластических процессов [4,5]. Здесь используется теория больших упругопластических деформаций [6–10], построенная в рамках теории пластического течения [11-15]. Отметим, что в рамках данной модели были получены решения задач теории больших упругопластических и упруговязкопластических деформаций таких как: формирование остаточных напряжений у дефектов сплошности [9, 10, 16-19], о прямолинейном [20,21] и вискозиметрическом [22,23] течениях. Именно в рамках данной модели удастся построить точное решение задачи теории больших упругопластических деформаций о стационарном течении материала в сферическом диффузоре. Основными допущениями, принимаемыми в данной статье, являются предположение об идеальной гладкости стенок и несжимаемости материала.

В [6, 8] приводится подробное описание математической модели больших упругопластических деформаций. Здесь представим только необходимые зависимости:

$$d_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}), \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial d_{ij}} (\delta_{kj} - 2d_{kj}), \quad (2)$$

$$W = (\alpha - \mu)J_1 + aJ_2 + bJ_1^2 - \gamma J_1 J_2 - \chi J_1^2, \quad J_1 = d_{kk}, \quad J_2 = d_{km}d_{mk}. \quad (3)$$

Движения сплошной среды осуществляется в координатах Эйлера; в качестве тензора деформаций используется тензор Альманси d_{ij} , компоненты которого в прямоугольной системе координат x_j $j = (1,2,3)$ определены согласно (1); u_i – компоненты вектора перемещений. При обратимом деформировании, когда пластические деформации отсутствуют, связь между компонентами тензора напряжений и деформаций в изотермическом приближении задается формулой Мурнагана [8] – (2); $W = W(d_{ij})$ – упругий потенциал (плотность распределения свободной энергии); ρ , ρ_0 – плотность среды в текущем и свободном состоянии соответственно.

Считая, что $\rho = \rho_0 = \text{const}$, то есть тело несжимаемо не только необратимо, но и обратимо, получим точное решение рассматриваемой задачи. В этом случае зависимость (2) принимает форму

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ij}} (\delta_{kj} - 2d_{kj}) \quad (4)$$

где p – добавочное гидростатическое давление.

В качестве упругого потенциала принимаем (3), считая деформируемую среду изотропной, где μ – модуль сдвига, a, b, γ, χ – упругие модули более высокого порядка. Так как в несжимаемой среде всегда $J_1 \leq 0$ и $J_2 \geq 0$, перед некоторыми слагаемыми в (3) выбран знак минус для того, чтобы все упругие постоянные были положительными.

В [6, 8] было показано, что если принять условие неизменности тензора необратимых деформаций при разгрузке, разделить диссипативный и консервативный механизм деформирования так, чтобы последний не зависел от уровня и распределения необратимых деформаций, то в областях, где необратимые деформации накапливались или постоянны, возможен аналог (3) и (4) в форме

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ij}}(\delta_{kj} - 2e_{kj}), \\ d_{ij} &= c_{ij} + p_{ij} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{km}e_{mj}, \quad c_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj}, \\ W &= (\alpha - \mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \gamma I_1 I_2 - \chi I_1^2, \quad I_1 = e_{kk}, \quad I_2 = c_{km}c_{mk}.\end{aligned}\quad (5)$$

Если в среде деформирование осуществляется таким образом, что нет необратимого деформирования, т.е. компоненты тензора пластических деформаций $p_{ij} = 0$, а компоненты тензора упругих деформаций c_{ij} отличны от нуля, то осуществляется предельный переход от (5) к (3)–(4).

При активном нагружении $\frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \varepsilon_{ij}^p > 0$, считая пластическое течение идеальным,

в условиях принципа максимума Мизеса $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \varepsilon_{ij}^p > 0$, следует ассоциированный закон пластического течения. Здесь σ_{ij} – действительные компоненты напряжения, σ_{ij}^* – компоненты тензора напряжений в любом допустимом заданной неподвижной поверхностью нагружения ($f(\sigma_{ij}) = \text{const}$) в напряженном состоянии.

Полагаем, что движение среды осуществляется в сферической матрице с идеально гладкой поверхностью $\theta \equiv \theta_0$ в сферической системе координат (r, φ, θ) . Считаем, что такое движение обеспечивают усилия на границах матрицы $r = R$ и $r = s$ ($R \gg s$) такие, что

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = -P, \quad \sigma_{rr}|_{r=s} = \sigma_*. \quad (6)$$

Далее, будем считать, что в материале существует некоторая стационарная поверхность $r = R_1$, разделяющая его на две, образовавшиеся в процессе деформирования, области: упругую $R_1 \leq r \leq R$ (I) и упругопластическую $s \leq r \leq R_1$ (II).

Во II области (с необратимыми деформациями) напряжения определяются из уравнения равновесия

$$\sigma_{rr,r} + 2(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/r = 0, \quad (7)$$

в условиях пластичности Треска ($\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = 2k$, где k – предел текучести) [3–4]:

$$\sigma_{rr} = -4k \ln(r/s) + \sigma_*, \quad \sigma_{\theta\theta} = -2k(1 + 2 \ln(r/s)) + \sigma_*. \quad (8)$$

В области I (упругая область) неизвестной является функция перемещения. Так как решение строится для несжимаемой среды $(1 - \partial u / \partial r)(1 - u/r) = 1$, единственная отличная от нуля компонента вектора перемещений $u_r = u$ определяется зависимостью:

$$u = r - (r^3 + \xi)^{1/3}, \quad \xi = R_0^3 - R^3, \quad (9)$$

где $r = R_0$ верхняя граница материала в недеформированном состоянии.

Тогда компоненты тензора деформаций Альманси (1) d_{rr} и $d_{\theta\theta}$ с учетом перемещений (9) и $\eta = 1 + \xi/r^3$ приобретают следующий вид:

$$d_{rr} = \frac{1}{2} \left(1 - r^4 (r^3 + R_0^3 - R^3)^{-4/3} \right) = \frac{1}{2} (1 - \eta^{-4/3}),$$

$$d_{\theta\theta} = \frac{1}{2} \left(1 - r^{-2} (r^3 + R_0^3 - R^3)^{2/3} \right) = \frac{1}{2} (1 - \eta^{2/3}).$$
(10)

Учитывая (10), согласно зависимостям (2) и (4), интегрируя уравнение равновесия (7) при условии

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} = -c_3 \eta^{-4} - c_4 \eta^{-8/3} - c_5 \eta^{-2} - c_6 (\eta^{-4/3} - \eta^{2/3}) - c_7 \eta^{-2/3} + c_8 \eta^{4/3} + c_9 \eta^{-2}. \quad (11)$$

определим компоненты напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_2 - b_8 \eta^{-3} - b_9 \eta^{-2} - b_{10} \eta^{-5/3} - b_{11} \eta^{-1} - b_{12} \eta^{-2/3} - b_{13} \eta^{-1/3} \\ &\quad - b_{14} \ln \left| \eta^{-1/3} \right| + b_{15} \eta^{1/3} + b_{16} \eta^{2/3} + b_{17} \eta + b_{19} \eta^2, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} - c_3 \eta^{-4} - c_4 \eta^{-8/3} - c_5 \eta^{-2} - c_6 (\eta^{-4/3} - \eta^{2/3}) - c_7 \eta^{-2/3} + c_8 \eta^{4/3} + c_9 \eta^{-2}, \\ b_8 &= \frac{1}{6} (\gamma + \chi), \quad b_9 = \frac{1}{4} (\gamma + \chi), \quad b_{10} = \frac{2}{5} (a + b - \gamma - \frac{9}{5} \chi), \quad b_{11} = \gamma + 2\chi, \\ b_{12} &= a + b - \frac{1}{2} (5\gamma + 9\chi), \quad b_{14} = 3b_{11}, \quad b_{13} = 2\mu - 4a - 6b + \frac{9}{4} (\gamma + 3\chi), \\ b_{15} &= 2a + 4b - 7\gamma - 18\chi, \quad b_{16} = \frac{1}{2} b_{13}, \quad b_{17} = b_{11}, \quad b_{18} = \frac{1}{4} b_{15}, \quad b_{19} = \frac{1}{2} b_{11}, \\ c_3 &= \frac{3}{4} (\gamma + \chi), \quad c_4 = a + b - \frac{5}{2} \gamma - \frac{9}{2} \chi, \quad c_5 = \frac{3}{4} \gamma + \frac{9}{4} \chi, \quad c_7 = b - \gamma + \frac{9}{2} \chi, \\ c_6 &= \mu - 2a - 3b + \frac{9}{4} \gamma + \frac{27}{4} \chi, \quad c_8 = a + 2b - \frac{7}{2} \gamma - 9\chi, \quad c_9 = \frac{3}{2} \gamma + 3\chi. \end{aligned} \quad (12)$$

Постоянная интегрирования c_2 определяется из первого граничного условия (6). Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -b_8 (\eta^{-3} - \eta_1^{-3}) - b_9 (\eta^{-2} - \eta_1^{-2}) - b_{10} (\eta^{-5/3} - \eta_1^{-5/3}) - b_{11} (\eta^{-1} - \eta_1^{-1}) - \\ &\quad - b_{12} (\eta^{-2/3} - \eta_1^{-2/3}) - b_{13} (\eta^{-1/3} - \eta_1^{-1/3}) - b_{14} \ln \left| (\eta / \eta_1)^{1/3} \right| + b_{15} (\eta^{1/3} - \eta_1^{1/3}) + \\ &\quad + b_{16} (\eta^{2/3} - \eta_1^{2/3}) + b_{17} (\eta - \eta_1) + b_{19} (\eta^2 - \eta_1^2) - P_*, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{rr} - c_3 \eta^{-4} - c_4 \eta^{-8/3} - c_5 \eta^{-2} - c_6 (\eta^{-4/3} - \eta^{2/3}) - c_7 \eta^{-2/3} + c_8 \eta^{4/3} + c_9 \eta, \\ \eta &= 1 + \xi / r^3, \quad \eta_1 = 1 + \xi / R_1^3. \end{aligned} \quad (13)$$

На стационарной границе $r = R_1$, разделяющей упругую и упругопластическую области, значения σ_{rr} , вычисляемые согласно (8) и (13) должны совпадать. Отсюда следует нелинейное уравнение

$$\begin{aligned} &-b_8 (\eta_2^{-3} - \eta_1^{-3}) - b_9 (\eta_2^{-2} - \eta_1^{-2}) - b_{10} (\eta_2^{-5/3} - \eta_1^{-5/3}) - b_{11} (\eta_2^{-1} - \eta_1^{-1}) - \\ &-b_{12} (\eta_2^{-2/3} - \eta_1^{-2/3}) - b_{13} (\eta_2^{-1/3} - \eta_1^{-1/3}) - b_{14} \ln \left| (\eta_2 / \eta_1)^{1/3} \right| + b_{15} (\eta_2^{1/3} - \eta_1^{1/3}) + \\ &+ b_{16} (\eta_2^{2/3} - \eta_1^{2/3}) + b_{17} (\eta_2 - \eta_1) + b_{19} (\eta_2^2 - \eta_1^2) - P_* + 4k \ln(R_1 / s) - \sigma_* = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

в котором $\eta_2 = 1 + \xi / R_1^3$.

Условие (11) на границе $r = R_1$

$$-c_3 \eta^{-4} - c_4 \eta^{-8/3} - c_5 \eta^{-2} - c_6 (\eta^{-4/3} - \eta^{2/3}) - c_7 \eta^{-2/3} + c_8 \eta^{4/3} + c_9 \eta^{-2} = 2k \quad (15)$$

позволяет определить η_2 , а, следовательно, и ξ .

Таким образом, уравнения (14) и (15) при заданных параметрах P_* , R_1 и s , позволяют определить перемещения в упругой области и напряжение σ_* на внутренней поверхности матрицы.

Расчеты показывают, что движение среды в сферическом диффузоре зависит от нагружающего усилия P_*/μ , заданных параметров стационарной границы R_1/R_0 и размеров самого диффузора. Таким образом, изменяя параметры диффузора и прилагаемые к формуемому материалу на входе и выходе из диффузора усилия, можно добиться необходимого оптимального режима движения упругопластической среды по сферическому диффузору при стационарной упругопластической границе. При этом имеется возможность использовать конструктивные особенности сферической матрицы и разные способы создания вытягивающих или проталкивающих усилий.

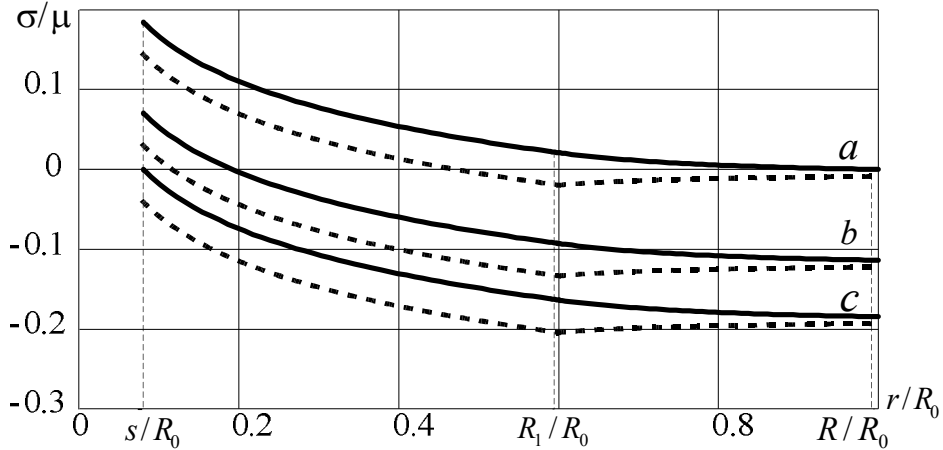


Рисунок 1. – Распределение напряжений в сферическом диффузоре с размерами $s/R_0 = 0.08$, $R/R_0 = 0.9999$ и заданной стационарной границей $R_1/R_0 = 0.6$ при нагружающих усилиях соответственно: а) $P_*/\mu = 0$, $\sigma_*/\mu = 0.1845$; б) $P_*/\mu = 0.1137$, $\sigma_*/\mu = 0.0709$; в) $P_*/\mu = 0.1845$, $\sigma_*/\mu = 0$

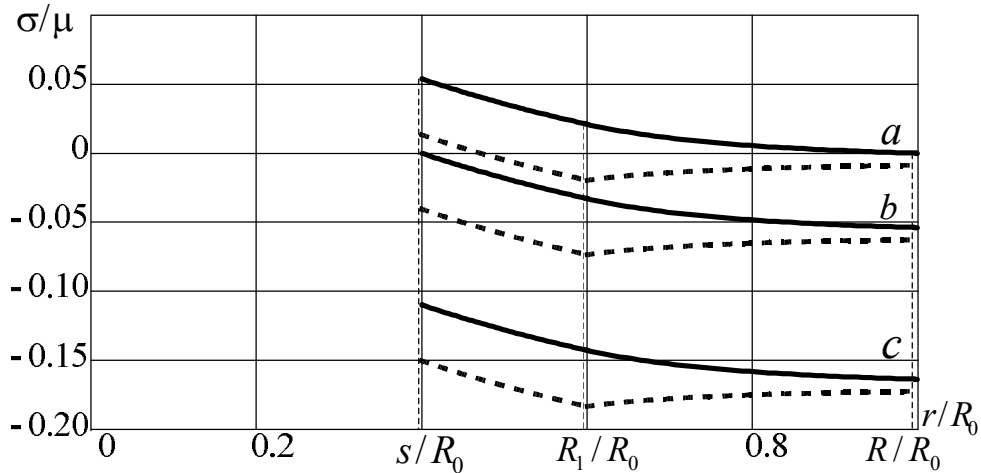


Рисунок 2. – Распределение напряжений в сферическом диффузоре с размерами $s/R_0 = 0.4$, $R/R_0 = 0.9999$ и заданной стационарной границей $R_1/R_0 = 0.6$ при нагружающих усилиях соответственно: а) $P_*/\mu = 0$, $\sigma_*/\mu = 0.5385$; б) $P_*/\mu = 0.5385$, $\sigma_*/\mu = 0$; в) $P_*/\mu = 0.1637$, $\sigma_*/\mu = -0.1098$

Результаты численных расчетов представлены на рис. 1, 2 для алюминиевого сплава В95оч ГОСТ 4784-97: $a/\mu = 6.09$, $b/\mu = 27.07$, $\gamma/\mu = 135.33$, $\chi/\mu = 541.33$, $k/\mu = 0.0203$, модуль сдвига $\mu = 27 \cdot 10^9$ Па. На рисунках σ/μ представлены в зависимости от значений r/R_0 (σ_{rr}/μ – показаны сплошной, $\sigma_{\theta\theta}/\mu$ – пунктирной линиями).

Резюме

В рамках модели больших упругопластических деформаций рассматривается течение несжимаемой упругопластической среды в сферическом диффузоре с идеально гладкими стенками. Принятое предположение о недопустимости обратимой сжимаемости среды позволяет получить точное решение краевой задачи.

Литература

1. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
2. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
3. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Украинский математический журнал 1954. Т. 6, вып. 3. С. 314–324.
4. Ильющин А.А. Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
5. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука. 1986. 232 с.
6. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Доклады РАН. 1996. Т. 347, № 2. С. 199–201.
7. Мясников В.П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестник ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8–13.
8. Ковтанюк Л.В. Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае // Дальневосточный математический журнал. 2004. Т. 5, № 1. С. 107–117.
9. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Упругие эффекты при интенсивном необратимом деформировании. Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2010. 280 с.
10. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В. О пластическом течении материала около сферического концентратора напряжений при конечных обратимых и необратимых деформациях // Известия РАН. Механика твердого тела. 1999. № 4. С. 150–156.
11. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans ASME: J. Appl. Mech. 1969. 36. № 1. P. 1–6.
12. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев.: Наукова думка, 1987. 232 с.
13. Быковцев Г.И., Шитиков А.В. Конечные деформации упругопластических сред // Доклады АН СССР. 1990. Т. 311, № 1. С. 59–62.
14. Роговой А.А. Определяющие соотношения для конечных упруго--неупругих деформаций // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46, № 5. С. 138–149.
15. Чернышов А.Д. Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях // Известия РАН. Механика твердого тела. 2000. № 1. С. 120–128.
16. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В. Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // Доклады РАН. 2000. Т. 375, №6. С. 767–769.
17. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В. Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 2. С. 316–325.
18. Полоник М.В., Ермоленко А.В. О возможности повышения эксплуатационных характеристик материалов за счет предварительной импульсной или ударной обработки // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. Т. 42. № 4. С. 183–192.
19. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Мурашкин Е.В. Об остаточных напряжениях в окрестности цилиндрического дефекта сплошности вязкоупругопластического материала // Прикладная механика и техническая физика. 2006. Т. 47, № 2. С. 110–119.

20. Ковтанюк Л.В. О продавливании упруговязкопластичекого материала через жесткую круговую цилиндрическую матрицу // Доклады РАН. 2005. Т. 400, № 6. С. 764–767.
21. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Мазелис А.Л. Продавливание упруговязкопластического материала между жесткими коаксиальными цилиндрическими поверхностями // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 3. С. 481–489.
22. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Устинова А.С. Об учете упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49, № 2. С. 143–151.
23. Буренин А.А., Устинова А.С. Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчетом упругого отклика после остановки течения и разгрузки // Успехи механики сплошных сред: к 70-летию академика В.А. Левина: сб. науч. тр. Владивосток: Дальнаука, 2009. С. 91–102.

Summary

Within the model of large elastic-plastic deformations an incompressible elastic-plastic medium in a spherical diffuser with a perfectly smooth walls is examined. The adopted assumption of non-reversible compressibility of the medium leads to an exact solution to the boundary problem.

Поступила в редакцию 15.11.2012