УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПРИ НЕОДНОРОДНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ.

Мелешко И.Н., Пронкевич С.А.

УО «Белорусский национальный технический университет»

Пластины применяются в различных областях современной техники – строительном деле, авиастроении, машиностроении, судостроении, ядерных энергетических установок и т.д. Во многих случаях использования пластин связано с различными условиями закрепления на отдельных участках контура пластины [1]. В связи с этим решение задач теории пластин со смешанными граничными условиями является весьма актуальной. В настоящее время широко используются численные методы основанные на использовании метода конечных элементов.

Рассмотрим круглую пластинку единичного радиуса постоянной толщины. Требуется определить собственные колебания круглой пластины.

Дифференциальное уравнение изгиба круглой пластины постоянной толщины в полярных координатах имеет вид:

$$\Delta\Delta w + \frac{\gamma h}{gD}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \text{ или } \Delta\Delta\overline{w} + k^4\overline{w} = 0, \qquad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа в полярных координатах r и θ; $\gamma h/g$ – масса пластины, отнесенная к единице поверхности, D – цилиндрическая жесткость пластины.

Решение дифференциального уравнения для собственных колебаний имеет вид:

$$w(r,\theta,t) = \overline{w}(r,\theta)(A\cos pt + B\sin pt), \qquad (2)$$

где

$$\overline{w}(\xi,\theta) = [AJ_n(k,\xi) + BN_n(k,\xi) + CI_n(k,\xi) + DK_n(k,\xi)]\cos n\theta \qquad (3)$$

С учетом граничных условий:

Для жесткого закрепления контура: $w = 0;\ \dfrac{dw}{dr} = 0$

Для шарнирного закрепления контура: $w = 0;\ M_r = 0;$

Для свободной пластины: $M_r = 0;\ Q_r = 0$

Частота собственных колебаний круглой пластины постоянной толщины определяется следующим образом

$$f = \frac{k^2}{2\pi b^2}\sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}$$

Колебания круглой пластины (диска) удобно описывать с помощью функций, зависящих от цилиндрических координат. Оператор Лапласа в цилиндрических координатах определяется выражением

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

И уравнение (2) примет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi}\right) - \alpha^4 W = 0 \qquad (4)$$

Решение этого уравнения соответствует колебанию с n узловыми диаметрами и его можно представить в виде:

$$W = f(r)\cos n\varphi \qquad (5)$$

Подставляя (5) в (4) получим для функции $f(r)$ обыкновенное дифференциальное уравнение 4-го порядка

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\left(\frac{n^2}{r^2}-\alpha^2\right)\right)\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\left(\alpha^2+\frac{n^2}{r^2}\right)\right)f(r)=0$$

Решением этого уравнения, не обращающимся в бесконечность при $r = 0$ является выражение

$$f(r)=C_1J_n(\alpha r)+C_2I_n(\alpha r),$$

где J_n – функция Бесселя n-го порядка, а $I_n(\alpha r)=i^{-1}J_n(i\alpha r)$ – гиперболическая функция Бесселя.

Граничные условия в каждом отдельном случае закрепления краев пластины приводят к системе однородных уравнений относительно постоянных C_1 и C_2. Уравнение частот получается путем приравнивания нулю определителя этих уравнений.

Определим собственные частоты круглой пластины радиуса R, жестко заделанной по контуру.

Граничные условия имеют вид:

$$f(R)=0;\ \frac{d}{dr}f(R)=0$$

Эти условия при $r = R$ приводят к уравнениям

$$C_1J_n(\alpha r)+C_2I_n(\alpha r)=0$$

$$C_1\frac{d}{dr}J_n(\alpha r)+C_2\frac{d}{dr}I_n(ar)=0$$

Уравнения частот примет вид:

$$\begin{vmatrix} J_n(\alpha R) & I_n(\alpha R) \\ J_{n-1}(\alpha R)-J_{n+1}(\alpha R) & I_{n-1}(\alpha R)+I_{n+1}(\alpha R)\end{vmatrix}=0 \qquad (6)$$

При каждом числе узловых диаметров n (значение n=0 соответствует осесимметричным колебаниям пластины) уравнение (6) имеет бесконечное множество корней соответствующее формам колебаний с различным числом (m) окружностей.

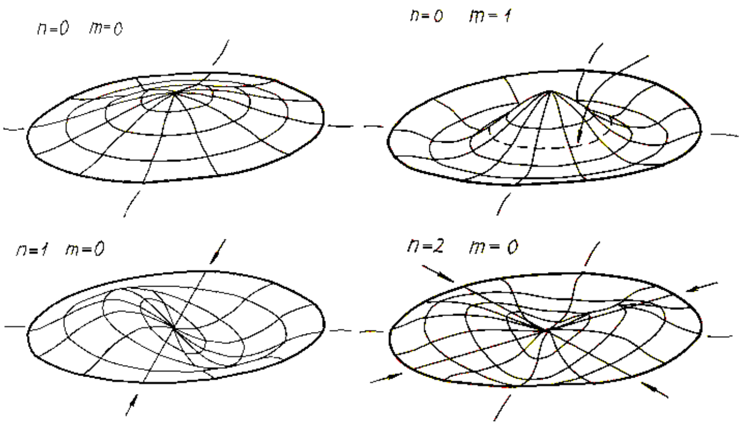


Рисунок 1. – Формы собственных колебаний круглой пластины при жестком защемлении по контуру

Для круглой пластины $R = 1$, Модуль Юнга $E = 2\times10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, плотность $\rho = 7800$ кг/м^3 первые четыре частоты составляют:

Таблица 1

№	Частота
1	155.933 Гц
2	325.655 Гц
3	367.916 Гц
4	608.187 Гц

На рис. 1 показаны формы колебаний, соответствующие данным частотам.

Рассмотрим численное решение данной задачи методом конечных элементов в системе ANSYS.

В программе ANSYS расчет частот и форм собственных колебаний (т.н. модальный анализ) является линейной процедурой. Любые нелинейности вроде пластичности или элементов зазораконтакта игнорируются, даже если они и заданы. Доступны четыре метода выявления собственных форм колебаний, в том числе и с учетом демпфирования.

Модальный анализ может проводиться для предварительно напряженных конструкций, таких, как лопатки вращающегося турбинного диска. Еще одной полезной особенностью является учет модальной циклической симметрии, что дает возможность свести анализ всей конструкции к анализу ее части. Кроме того, он используется как исходный для других, более подробных динамических расчетов, таких, как нестационарный динамический анализ или отклик системы на гармоническое воздействие.

Нелинейные конечные элементы, если таковые используются в модели, трактуются как линейные. Например, жесткость элементов контакта рассчитывается, исходя из их начального положения, и затем не изменяется.

При выполнении модального анализа задаются модуль Юнга и плотность материала, который предполагается линейным, изотропным или ортотропным, со свойствами, зависящими или независящими от температуры.

Для приведенных выше примеров (круглая пластина) частоты и формы колебаний представлены на рисунке. Круглая пластина единичного радиуса, модуль Юнга $E=2*10^{11}$ Па, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, плотность $\rho = 7800$ кг/м^3

Таблица 1. – Распределение собственных частот, полученных в системе Ansys.

№	Ansys, Гц	№	Ansys, Гц
1	156.225	4	534.573
2	325.595	5	535.302
3	325.657	6	610.839

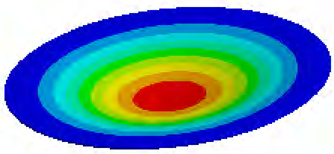
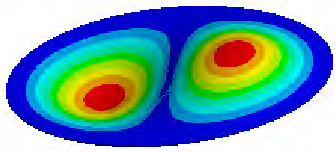
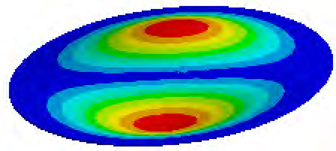
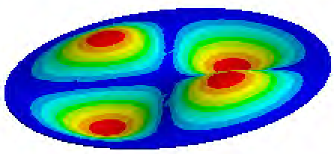
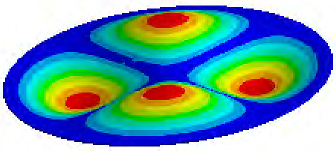
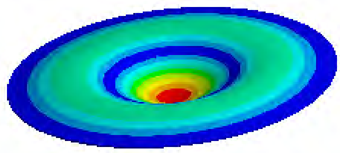
		
Первая форма колебаний, соответствующая частоте 156.2 Гц	*Вторая форма колебаний, соответствующая частоте 325.5 Гц*	*Третья форма колебаний, соответствующая частоте 325.657 Гц*
		
Четвертая форма колебаний, соответствующая частоте 534.573 Гц	*Пятая форма колебаний, соответствующая частоте 535.302 Гц.*	*Шестая форма колебаний, соответствующая частоте 610.839 Гц.*

Рисунок 2. – Собственные частоты и соответствующие им формы колебаний, полученные в системе ANSYS.

При расчете в системе ANSYS появляются дублирующиеся формы собственных колебаний (например, вторая и третья, четвертая и пятая формы). По всей видимости, это связано с неравномерностью конечно-элементной модели и ее некоторой асимметричностью относительно центральной оси.

При решение краевой задачи со смешанными граничными условиями были рассмотрены следующие случаи:

1. – защемление по всему контуру.
2. – защемление на контуре $0 \le \varphi \le \pi/2$, шарнирное закрепление $\pi/2 \le \varphi \le 2\pi$,
3. – защемление на контуре $0 \le \varphi \le \pi$, шарнирное закрепление $\pi \le \varphi \le 2\pi$,
4. – защемление на контуре $0 \le \varphi \le \pi/2$, $\pi \le \varphi \le 3\pi/2$, шарнирное закрепление $\pi/2 \le \varphi \le \pi$, $3\pi/2 \le \varphi \le 2\pi$,
5. – защемление на контуре $0 \le \varphi \le 3\pi/2$, шарнирное закрепление $3\pi/2 \le \varphi \le 2\pi$,

6. – шарнирное закрепление по всему контуру.

Решение задачи теории упругости при неоднородных граничных условиях рассмотрена достаточно подробно (Н.И. Мусхелишвили, Г.Ф. Манджавидзе, Д.И. Шерман).

В работах Д. И. Шермана были построены вполне регулярные бесконечные алгебраические линейные системы для решения задачи изгиба равномерно нагруженной круглой пластинки, когда одна часть дуги круговой границы оперта, а по оставшейся части дуги пластинка заделана или свободна. В работах Х. Зорского (Zorski [1–4]) с помощью метода сингулярных интегральных уравнений и теории граничных задач линейного сопряжения решены задачи изгиба пластинок, когда пластинка имеет вид полуплоскости, квадрата или полуполосы и когда заданы смешанные граничные условия (край пластинки частично заделан, частично оперт или частично свободен).

При неоднородных граничных условиях (часть окружности закреплена, часть оперта) задача может быть решена только приближенными численными методами.

Ниже на рисунках показана эволюция формы четвертой частоты собственных колебаний при различных вариантах граничных условий.

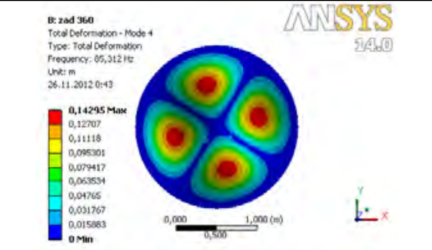
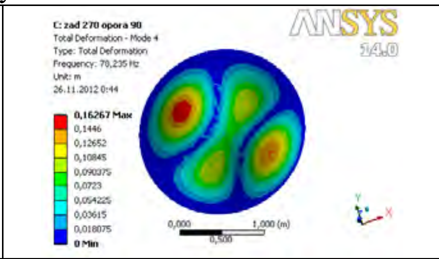
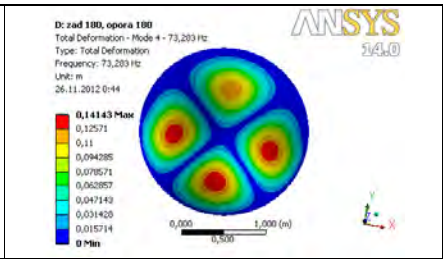
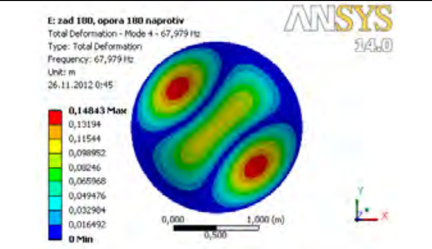
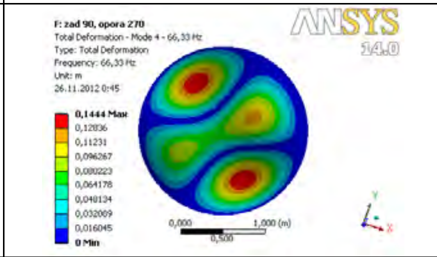
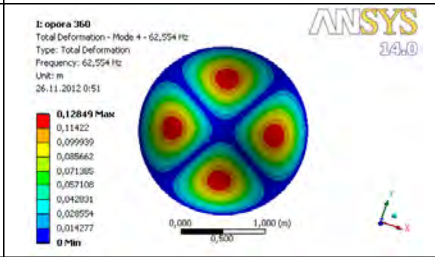
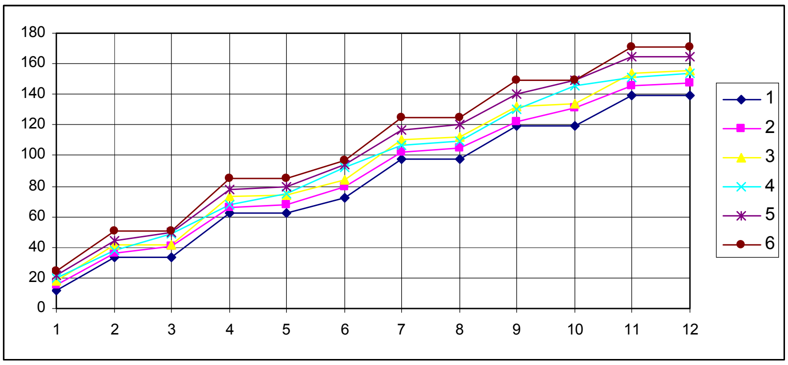
		
1. – защемление по всему контуру.	*2. – защемление на контуре* $0 \le \varphi \le \pi/2$*, шарнирное закрепление* $\pi/2 \le \varphi \le 2\pi$,	*3. – защемление на контуре* $0 \le \varphi \le \pi$*, шарнирное закрепление* $\pi \le \varphi \le 2\pi$
		
4. – защемление на контуре $0 \le \varphi \le \pi/2$, $\pi \le \varphi \le 3\pi/2$, *шарнирное закрепление* $\pi/2 \le \varphi \le \pi$, $3\pi/2 \le \varphi \le 2\pi$	*5. - защемление на контуре* $0 \le \varphi \le 3\pi/2$*, шарнирное закрепление* $3\pi/2 \le \varphi \le 2\pi$	*6. – шарнирное закрепление по всему контуру.*

Рисунок 3. – Эволюция формы колебаний четвертой частоты собственных колебаний пластины при различных вариантах граничных условий.



1. – защемление по всему контуру. 2. – защемление на контуре $0 \le \varphi \le \pi/2$*, шарнирное закрепление* $\pi/2 \le \varphi \le 2\pi$*, 3. – защемление на контуре* $0 \le \varphi \le \pi$*, шарнирное закрепление* $\pi \le \varphi \le 2\pi$*, 4. – защемление на контуре* $0 \le \varphi \le \pi/2$, $\pi \le \varphi \le 3\pi/2$*, шарнирное закрепление* $\pi/2 \le \varphi \le \pi$, $3\pi/2 \le \varphi \le 2\pi$*, 5. - защемление на контуре* $0 \le \varphi \le 3\pi/2$*, шарнирное закрепление* $3\pi/2 \le \varphi \le 2\pi$*, 6. – шарнирное закрепление по всему контуру.*

Рисунок 4.

Из графика видно, что частоты смещаются, но повторяют шаг колебаний. Форма колебаний в четвертом случае похожа на колебания пластины

Выводы. Полученные результаты свидетельствуют о том, что распределение спектра собственных частот при различных соотношениях заданных на контуре граничных условий лежит строго между случаями защемления и шарнирного закрепления по всему контуру. При моделировании в системе ANSYS сохраняется некоторое дублирование форм и частот собственных колебаний.

Резюме

В статье рассматривается решение задач собственных колебаний круглой пластины при неоднородных граничных условиях. Полученные результаты свидетельствуют о том, что распределение спектра собственных частот при различных соотношениях заданных на контуре граничных условий лежит строго между случаями защемления и шарнирного закрепления по всему контуру. При моделировании в системе ANSYS сохраняется некоторое дублирование форм и частот собственных колебаний.

Литература

1. Смирнов В.А. Расчет пластин сложного очертания. – М.: Стройиздат, 1978. – 303 с.
2. Чижевский К.Г. Расчет круглых и кольцевых пластин. Справочное пособие. - Л., «Машиностроение», 1977. – 184 с.
3. Маневич А.И., Пономаренко Е.А. Устойчивость круглых пластин при неравномерном сжатии. / Методи розв'язування прикладних задач механики доформірованного твердого тіла, 2010, вип. 11
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: «Наука», 1967. – 964 с.
5. Расчеты на прочность в машиностроении: в 3 т. Т. 3/ под ред С.Д. Пономарева – М.: Машгиз. 1959. – 1118 с.
6. Шерман Д.И. Об изгибе круглой пластинки, частично защемленной и частично опертой по контуру. Докл. АН СССР, т. 101, №4, 1955.
7. Zorski H. Plates with discontinuous supports. I. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci Techn. VI, N. 3, 1958.

Summery

The article deals with the tasks of natural oscillations of a circular plate with inhomogeneous boundary conditions. The results indicate that the distribution of the spectrum of frequencies for different ratios given boundary conditions on the contour lies strictly between the cases of entrapment and simply supported around the circuit. In modeling the system ANSYS retained some overlapping shapes and natural frequencies.

Поступила в редакцию 26.11.2012