

## АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Манцыбора А.А., Русанов М.М.

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматизации и процессов  
управления Дальневосточного отделения Российской академии наук,  
Владивосток*

Потребность инженерной практики в расчётах технологических приёмов, связанных с импульсными или ударными воздействиями необратимо деформируемых материалов (скоростная штамповка, пробивание отверстий и др.), важность оценки последствий взрывов и землетрясений обуславливают актуальность развития теории упругопластических сред.

При построении упругопластической теории, допускающей большие деформации, одной из принципиальных трудностей является выбор разделения опытно наблюдаемых полных деформаций на экспериментально не измеряемые обратимую (упругую) и необратимую (пластическую) составляющие. До сих пор не существует общепринятого мнения по этому поводу, и модели больших упругопластических деформаций принципиально различаются именно таким разделением.

Здесь будет использоваться теория больших упругопластических деформаций, построенная в рамках теории пластического течения. Подобных моделей создано за последнюю половину века достаточно много [6–10], хотя общепринятой модели до настоящего времени не существует. Будем использовать в дальнейшем модель, разработанную на Дальнем востоке, представленную в статьях Г.И. Быковцева, В.П. Мясникова, А.А. Буренина, Л.В. Ковтанюк [11–14].

В данной работе на примере одномерной автомодельной задачи рассматривается процесс деформирования упругопластической среды допускающей большие деформации. Следует отметить, что, несмотря на упрощения, допускаемые в автомодельных задачах, они позволяют получить качественную картину описания происходящих процессов. Так же необходимо отметить, что в случае автомодельных постановок, несмотря на кажущуюся простоту, найти решение конкретной краевой задачи является существенной проблемой со своими сложностями.

Математическая модель больших упругопластических деформаций, которая далее будет использоваться, подробно описана в [11, 13]. Приведем необходимые итоговые модельные зависимости. Деформирование сплошной среды будем описывать в пространственных переменных Эйлера  $x_i (i=1,2,3)$  так, что если  $a_i$  начальные (материальные) координаты точки материала, то  $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3, t)$ . В качестве тензора деформаций выберем тензор деформаций Альманси:

$$\begin{aligned} d_{i,j} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}), \\ d_{ij} &= e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj}. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u_i$  – компоненты вектора перемещений; индексом после запятой обозначена производная по данной пространственной переменной,  $e_{ij}$  и  $p_{ij}$  – упругие и пластические деформации соответственно. Связь между компонентами тензора напряжения и упругими деформациями задаётся с помощью формулы Мурнагана:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - 2e_{kj}), \\ W &= \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 + l I_1 I_2 + m I_1^3 + n I_3 + \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $W = W(e)$  – упругий потенциал,  $I_1, I_2, I_3$  – инварианты тензора упругих деформаций  $e_{ij}$ ,  $\lambda$  и  $\mu$  – параметры Ламе,  $l, m, n$  – упругие модули третьего порядка,  $\rho$  и  $\rho_0$  – плотность среды в текущем и свободном состоянии.

Для того чтобы описать изменение напряжения на простой волне мы воспользуемся законом сохранения импульса:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{dV_i}{dt}, \quad V_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + V_j u_{i,j} \quad (3)$$

Здесь  $V_i$  – компоненты вектора скорости. Изменение тензоров обратимых и необратимых деформаций в области пластического течения:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{ij}}{dt} &= \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj} - p_{ik} \varepsilon_{kj}^p + r_{ik} p_{kj} - p_{ik} r_{kj}, \\ \frac{de_{ij}}{dt} &= \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2} (e_{ij} v_{k,j} + v_{k,i} e_{kj} - r_{ij} e_{kj} + e_{ik} r_{kj} - \varepsilon_{ij}^p e_{kj} + e_{ik} \varepsilon_{kj}^p), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $r_{ij}$  – кососимметричный тензор с компонентами:

$$\begin{aligned} r_{ij} &= w_{ij} + A^{-1} \left\{ B^2 (\varepsilon_{ik} e_{kj} - e_{ik} \varepsilon_{kj}) + B^2 (\varepsilon_{ik} e_{km} e_{mj} - e_{ik} e_{km} \varepsilon_{mj}) + e_{ik} \varepsilon_{km} e_{ms} e_{sj} - e_{ik} e_{km} e_{ms} \varepsilon_{sj} \right\}, \\ A &= 8 - 8L_1 + 3L_1^2 - L_2 - \frac{1}{3} L_1^3 + \frac{1}{2} L_3, \quad B = 2 - L_1, \\ L_1 &= e_{ii}, \quad L_2 = e_{ij} e_{ji}, \quad L_3 = e_{ij} e_{jk} e_{ki}, \\ w_{ij} &= \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}). \end{aligned} \quad (5)$$

Скорости пластического деформирования согласно ассоциированному закону пластического течения:

$$\varepsilon_{ij}^p = \psi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, p_{ij}, \chi_{ij}) = k, \quad (6)$$

$\chi_{ij}$  – параметры истории деформирования.

Рассмотрим задачу об ударе жёстким телом по упругопластическому полупространству. Выберем систему координат таким образом, что ось  $x_2$  будет направлена по границе полупространства, а ось  $x_1$  направлена вглубь тела по направлению нормали к границе (рис. 1)

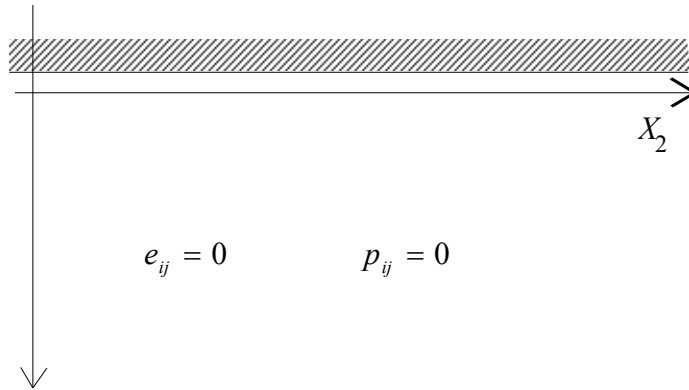


Рисунок 1

Полагается что среда изначально находится в свободном состоянии при  $x_1 > 0$ . Далее происходит удар по границе  $x_1 = 0$ , соответственно на границе мгновенно изменяются напряжённое состояние, в результате чего по среде начинают распространяться возмущения (рисунки 2, 3).

Изменение упругих деформаций будет происходить на ударных волнах причём скорость одной из них будет совпадать со скоростью движения безвихревой волны на которой имеют место следующие соотношения:

$$G_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (7)$$

$$-G_1[\sigma_{ij}] = (\lambda\delta_{ij} + 2\mu n_i n_j)w, \quad [v_i] = wn_i,$$

здесь  $w$  – интенсивность безвихревой волны,  $n_i$  – компоненты вектора нормали к поверхности волны,  $G_1$  – скорость распространения волны,  $[\sigma_{ij}]$  и  $[v_i]$  скачки величин  $\sigma_{ij}$  и  $v_i$  соответственно.

Скорость движения другой волны совпадает со скоростью распространения эквиволлюминальной волны, где выполняются следующие равенства:

$$G_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad [v_i]n_i = 0, \quad -G_2[\sigma_{ij}] = \mu([v_i]n_j + [v_j]n_i). \quad (8)$$

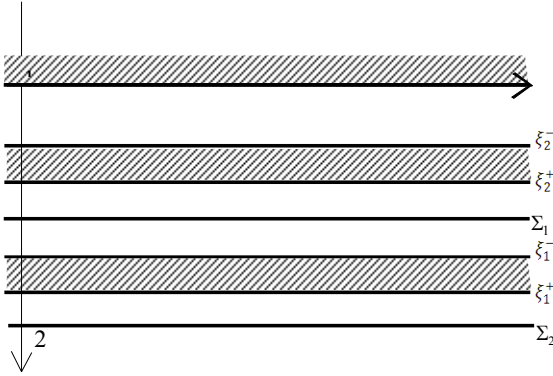


Рисунок 2

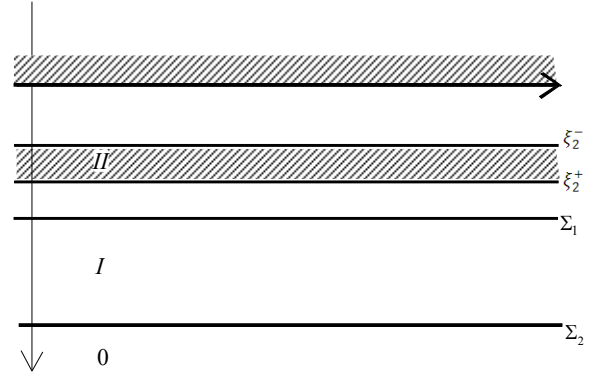


Рисунок 3

Изменение пластических деформаций будет осуществляться на простых волнах Римана, то есть, в некотором слое, на рисунке 2 это области  $(\xi_1^+; \xi_1^-)$ . Из полученных результатов следует, что возможно существование двух простых волн: одна из них располагается между безвихревой и эквиволлюминальной ударными волнами  $(\xi_1^+; \xi_1^-)$ , а другая между эквиволлюминальной ударной волной и границей упругопластического полупространства  $(\xi_2^+; \xi_2^-)$ .

В процессе решения конкретной краевой задачи возможны случаи, когда одновременно два слоя с пластическими деформациями, или только один (в зависимости от выполнения условия пластичности в соответствующей области).

Приведём пример, когда пластическое течение возникает в одном слое расположенном между эквиволлюминальной ударной волной и границей полупространства (рисунок 3). В рассматриваемом случае движение среды одномерно, т.е.

$$u_1 = u_1(x_1, t), \quad u_2 = u_2(x_1, t), \quad u_3 = 0. \quad (9)$$

Введём автомодельную переменную следующего вида:

$$\xi = \frac{x_1}{c_1 t}. \quad (10)$$

Здесь  $c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$  и положим, что компоненты вектора перемещения выражаются зависимостями:

$$u_1 = c_1 t T(\xi), \quad u_2 = c_1 t \Theta(\xi), \quad u_3 = 0, \quad (11)$$

где  $T$  и  $\Theta$  – компоненты безразмерного вектора перемещений в координатном пространстве. Отметим, что согласно соотношениям (10) и (11)

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= T'(\xi), \quad u_{2,1} = \Theta'(\xi) \\ v_1 = \dot{u}_1 &= \dot{c}_1 (T - T\xi), \\ v_2 = \dot{u}_2 &= \dot{c}_1 (\Theta - \Theta\xi). \end{aligned} \quad (12)$$

Рассматривается плоская деформация среды, т.е.  $\sigma_3$  является главным напряжением. Тогда для главных напряжений, имеем:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}, \\ \sigma_3 &= \sigma_{33}.\end{aligned}\quad (13)$$

Предел текучести запишем, используя условие пластичности треска  $f = \frac{1}{2} \max |\sigma_i - \sigma_j| = k$ , в нашем случае это:

$$f = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (14)$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k. \quad (15)$$

Используя соотношения (4) найдём зависимость  $\psi = f(e_{ij}, T', T'', \Theta', \Theta'', e'_{ij})$ .

Для этого распишем,  $\frac{de_{11}}{dt} - \frac{de_{22}}{dt}$ , заменяя  $\varepsilon_{ij}^p$ , используя формулу (6) и (14) и (13), расписав

напряжения используя формулу Мурнагана,  $r_{ij}$ , по формуле (5) и заменяя производную по времени на производную по автомодельной переменной. Таким образом, получаем  $\psi = f(e_{ij}, T', T'', \Theta', \Theta'', e'_{ij})$ . Расписать её в явном виде не представляется возможным из-за её объёма.

Используя продифференцированный тензор деформации Альманси, заменяя производные пластических деформаций по формуле (2) и уравнение движения получаем систему пяти дифференциальных уравнений с пятью неизвестными вида:

$$\begin{pmatrix} F_1(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \\ \dots \\ F_5(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T'' \\ \Theta'' \\ e'_{11} \\ e'_{21} \\ e'_{22} \end{pmatrix} = 0. \quad (16)$$

Система имеет тривиальное решение, когда  $T'', \Theta'', e'_{11}, e'_{21}, e'_{22}$ , в этом случае деформации и скорости будут постоянными величинами. Нетривиальное решение система допускает если  $\det \begin{pmatrix} F_1(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \\ \dots \\ F_5(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \end{pmatrix} = 0$ . Такое решение описывает слой пластического течения, в котором деформации, напряжения, скорости перемещений точек среды не являются постоянными.

Согласно проведённым численным расчётам, было установлено, что возможно существование двух решений, каждое из которых описывает слой пластического течения. Причём, большая скорость распространения слоя находится между значениями скоростей безвихревой и эквивалюминальной упругими волнами, а меньшая за скоростью эквиволлюминальной упругой волны.

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} F_1(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \\ \dots \\ F_5(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \end{pmatrix} = 0, \\ d'_1 = T'' - (T'' + \Theta''), \\ \sigma'_1 - \sigma'_2 = 0, \\ \sigma_{11,1} = \rho \frac{dv_1}{dt}, \\ \sigma_{21,1} = \rho \frac{dv_2}{dt}. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь второе уравнение – производная от тензора деформации Альманси, третье – производная от предела текучести, а четвертое и пятое – уравнения движения. Таким образом, получается замкнутая система. Нетривиальное решение описывает область, в которой напряжение, деформации и скорости изменяются непрерывно. Данные области называются простыми волнами. Согласно полученным вычислениям возможны две центрированные волны.

До начала ударного воздействия на границу тело находится в свободном состоянии. Положим, что в начальный момент времени граница тела начинает подвергаться нагружению, вследствие чего деформации на границе начинают удовлетворять следующим равенствам.

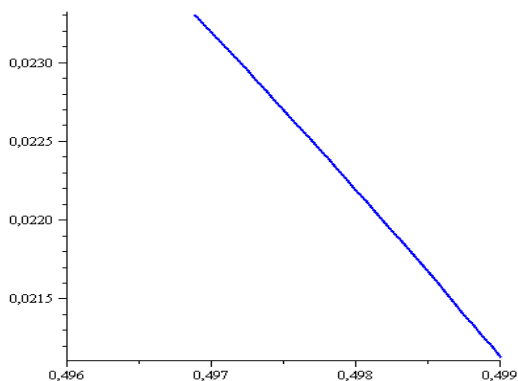
В качестве начальных параметров системы нам известны  $u_{1,1} = 0.02$ , и  $u_{1,1} = 0.03$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\mu = 0.25$  здесь параметры Ламэ безразмерны. Для удобства выберем предварительные пластические деформации равными нулю.

Используя данные параметры, решая уравнение  $\det \begin{pmatrix} F_1(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \\ \dots \\ F_5(e_{11}, e_{21}, e_{22}, T', \Theta') \end{pmatrix} = 0$ , из (16) мы получаем  $\xi = 4.9999999999$

Для полученного  $\xi$  решаем систему (17), решения данной системы представлены ниже. На рисунке 4 изображена зависимость компонент градиента вектора перемещений на простой волне.

На рис. 5 и 6 приводится зависимость компонент тензора обратимых деформаций  $e_{ij}$  от автономной переменной внутри простой волны.

$U_{1,1}(\xi)$ :



$U_{2,1}(\xi)$ :

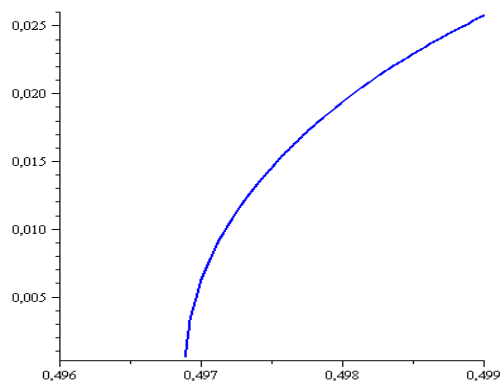
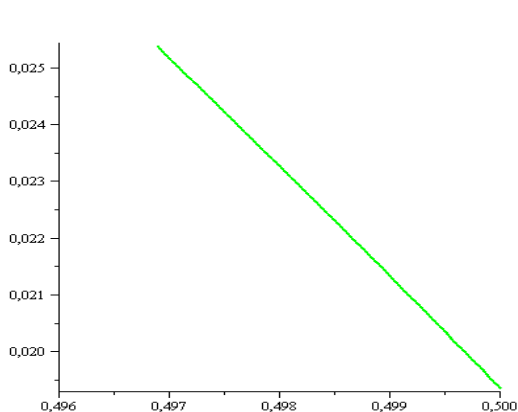


Рисунок 4

$e_{11}(\xi)$ :



$e_{21}(\xi)$ :

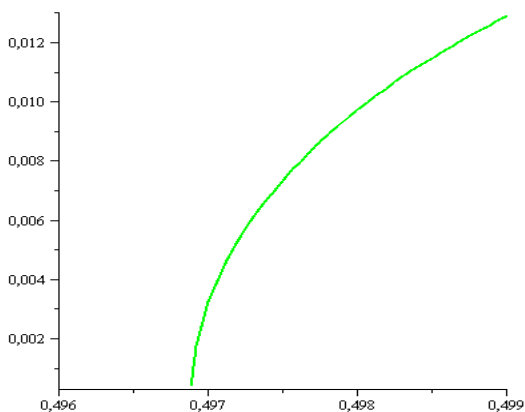


Рисунок 5

$e_{22}(\xi)$ :

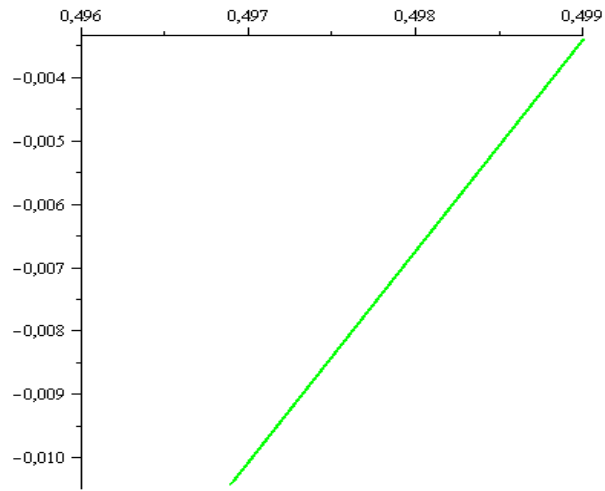
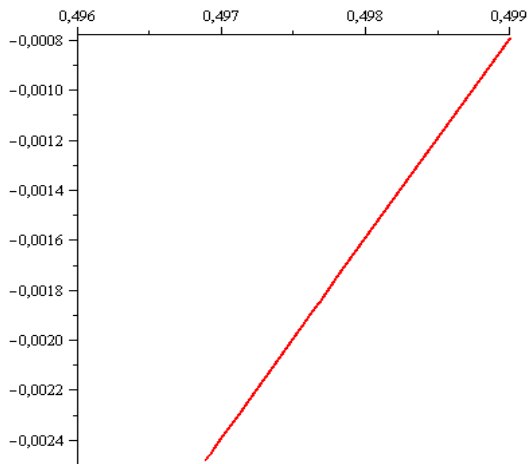


Рисунок 6

$p_{11}(\xi)$ :



$p_{21}(\xi)$ :

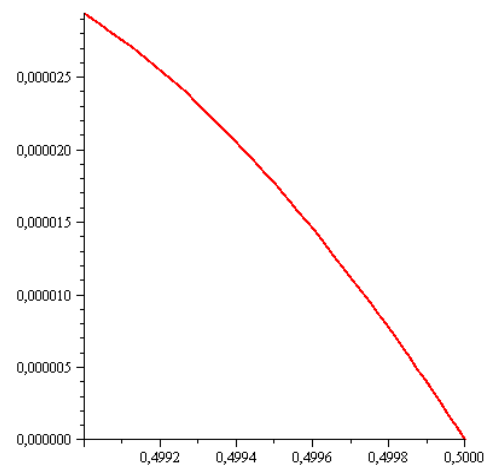


Рисунок 7

$p_{22}(\xi)$ :

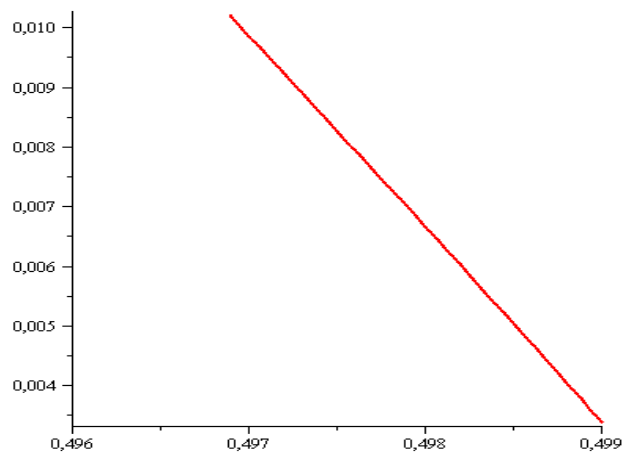


Рисунок 8

На рис. 7 и 8 приводится зависимость компонент тензора необратимых деформаций  $p_{ij}$  от автомодельной переменной внутри простой волны. Из представленных результатов видно, что пластические деформации накапливаются внутри простых волн, причем скорости распространения их меньше, чем скорости соответствующих им упругих ударных волн, что согласуется с классическими результатами.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, гранты 12-01-90004-Бел\_а, 11-01-00360-а.*

**Заключение.** В рамках модели больших упругопластических деформаций, рассматривается одномерная автомодельная задача ударного деформирования полупространства. Получено, что в данной постановке задачи, пластические деформации могут изменяться на двух простых волнах Римана. Из полученных численных расчетов видно, что скорости распространения пластических волн меньше скорости распространения соответствующих им упругих ударных волн.

### Литература

1. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232с.
2. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528с.
3. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением // Украинский математический журнал 1954. Т. 6, вып. 3 С. 314–324.
4. Ильющин А.А. Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
5. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука. 1986. 232 с.
6. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains // Trans ASME: J. Appl. Mech. 1969. 36. № 1. P. 1–6.
7. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев.: Наукова думка, 1987. 232 с.
8. Быковцев Г.И., Шитиков А.В. Конечные деформации упругопластических сред // Доклады АН СССР. 1990. Т. 311, №1. С. 59–62.
9. Роговой А.А. Определяющие соотношения для конечных упруго–неупругих деформаций // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46, №5. С. 138–149.
10. Чернышов А.Д. Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях // Известия РАН. Механика твердого тела. 2000. №1. С. 120–128.
11. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Доклады РАН. 1996. Т. 347, №2. С. 199–201.
12. Мясников В.П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестник ДВО РАН. 1996. №4. С. 8–13.
13. Ковтанюк Л.В. Моделирование больших упругопластических деформаций в неизотермическом случае // Дальневосточный математический журнал. 2004. Т. 5, №1. С. 107–117.

### Summary

*The one-dimensional automodel problem, about deforming elastic-plastic half-space with large deformation, was considered. It was obtained, that the plastic deformations can change in two type of simple Riman waves. The sped of plastic waves are less then velocity of elastic shock waves, was shown in numerical calculations.*

Поступила в редакцию 15.11.2012