

СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ РЕКОНСТРУИРОВАННОГО СРЕДНЕГО УША, ПОДВЕРГНУТОГО ТИМПАНОПЛАСТИКЕ И СТАПЕДОТОМИИ

Славашевич И. Л., Михасев Г. И., Ботогова М.Г.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

Введение. Поражение и нарушение функций звукопроводящих структур среднего уха чаще всего возникают в связи с перенесенным ранее или текущим воспалительным процессом в барабанной полости. При этом обычно наступает значительная потеря слуха. В ряде случаев для улучшения слуха прибегают к хирургическому вмешательству и, в частности, к тотальной реконструкции, предполагающей одновременно тимпаноластику и полную оссикулопластику. Тимпаноластика – это операция, выполняемая для восстановления барабанной перепонки после перфорации или разрыва, либо на ее полную реставрацию с использованием хрящевого трансплантата. Тотальная оссикулопластика – замена всей цепи косточек на протез типа TORP [1]. При распространении отосклеротического процесса на кольцевидную связку и подножную пластинку стремени, т. е. когда наступает анкилоз стремени (клиническое проявление отосклероза), в хирургической практике часто выполняют стапедотомию, которая заключается в перфорации подножной пластинки с последующим вводом ствола протеза через отверстие в кохлеарную жидкость улитки. Одним из негативных последствий данной операции является снижение общей жесткости всей системы [2], а также искажение спектра собственных частот реконструированного среднего уха (PCY) по сравнению с частотами СУ в норме [3].

Целью работы является построение динамической модели звукопроводящей системы реконструированного среднего уха (PCY) с учетом тангенциальных деформаций тимпанальной мембраны (ТМ) и, соответственно, мембранных усилий.

Постановка задачи. Разрешающие уравнения. ТМ будем моделировать как круглую упругую изотропную пластинку радиуса a , изготовленной из хрящевого трансплантата. [4] Протез типа TORP состоит из недеформируемой пластинки (основания) радиуса b и стержня, жестко сопряженного с ней (рис. 1а). Пусть l – длина ствола протеза, а l_0 – расстояние между центрами ТМ и точкой перфорации подножной пластины стремени. В работе [5] показано, что наиболее предпочтительной техникой установки протеза, с точки зрения минимизации начальных напряжений, является техника, когда основание протеза размещается на восстановленной ТМ как можно ближе к центру, а его ствол изгибается на некоторый угол γ . Рассмотрим здесь случай, когда центры восстановленной ТМ и основания протеза совпадают. Будем считать, что основание протеза и хрящевой трансплантат жестко склеены, тогда ТМ рассматриваем как кольцевую пластинку с внутренним и внешним радиусами b и a соответственно.

Пусть перфорация подножной пластинки стремени выполняется в месте, где ее толщина минимальна. Тогда, протез имеет две степени свободы, перемещение и поворот (рис. 1б).

В качестве уравнений, описывающих движение PCY, примем уравнения [6]:

$$D\Delta^2 W - \lambda W = 0. \quad (1)$$

$$r \frac{\partial T_1}{\partial r} + T_1 - T_2 + \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0, \quad r \frac{\partial S}{\partial r} + 2S + \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} = 0. \quad (2)$$

где $T_1 = K \left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\nu}{r} U + \frac{\nu}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)$, $T_2 = K \left(\nu \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r} U + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)$, $S = \frac{K(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{r} V + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right)$ – мем-

бранные усилия, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$ – жесткости пластины, E , ν и ρ – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность хрящевой ткани соответственно, h – толщина пластины, λ – частотный параметр, связанный с частотой собственных колебаний ω соотношением $\lambda = \rho h \omega^2 / D$, W и U , V – нормальное и тангенциальные перемещения соответственно, точек срединной поверхности пластины, а Δ – оператор Лапласа в полярной системе координат r , φ (рис. 2).

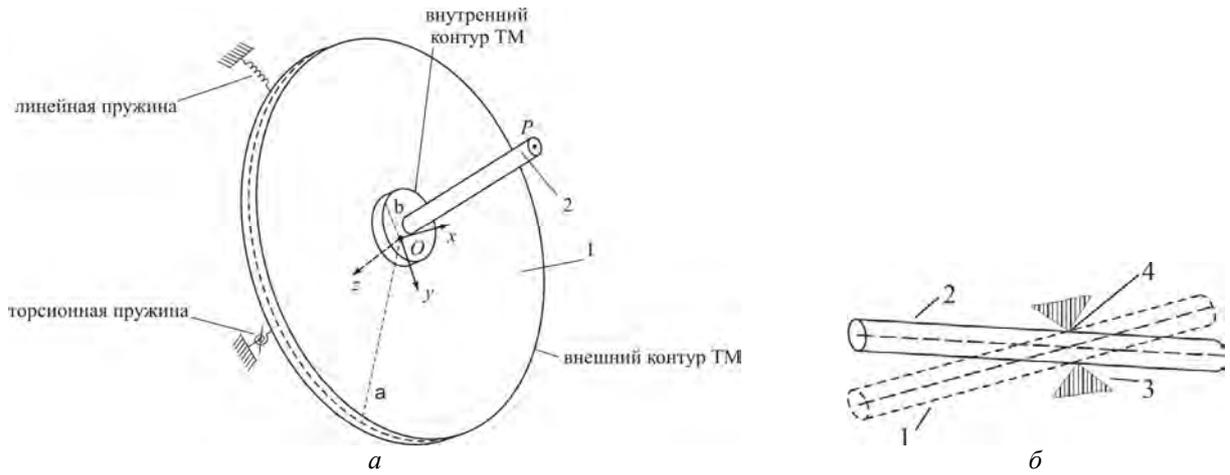


Рисунок 1. – а) реконструированная ТМ радиуса a (1) и протез типа TORP (2); б) ствол протеза, введенный в отверстие (перфорацию) подножной пластинки стремени, его начальное положение (1), 2 – конечное положение протеза, 3 – остатки ножек стремени, 4 – перфорация в подножной пластинке

Граничные условия на внутреннем контуре сопряжения пластины с основанием протеза ($r=b$) в случае жесткой заделки примут вид:

$$W|_{r=b} = W_p + b \sin \alpha \cos \varphi, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=b} = \sin \alpha \cos \varphi. \quad (3)$$

$$U|_{r=b} = U_p \cos \varphi + b(1 - \cos \alpha) \cos \varphi, \quad V|_{r=b} = U_p \sin \varphi. \quad (4)$$

где W_p, U_p – перемещение основания протеза вдоль осей Ox и Oy соответственно.

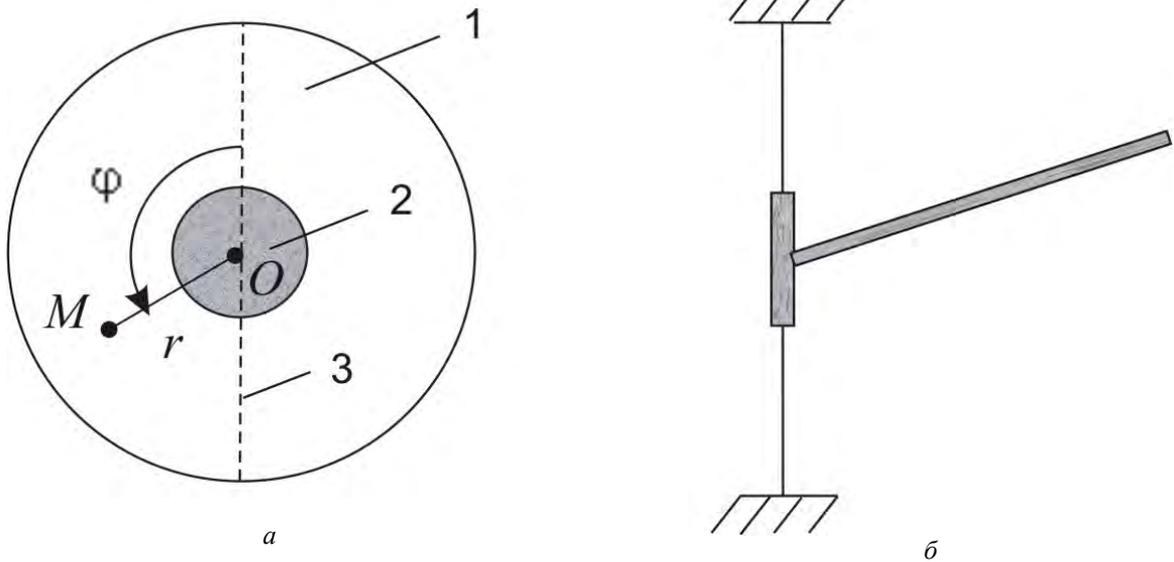


Рисунок 2. – а) Полярная система координат с центром в точке O : 1 – ТМ; 2 – основание протеза; 3 – линия, вдоль которой происходит тангенциальное смещение основания протеза; б) поперечное сечение системы “ТМ-протез”

На внешнем контуре ТМ рассмотрим условия [5, 7]:

$$W|_{r=a} = \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=a} = 0. \quad (5)$$

$$U|_{r=a} = 0, \quad V|_{r=a} = 0. \quad (6)$$

Выберем в качестве обобщенных координат перемещение s и угол поворота протеза α , то есть $q_1 = s$, а $q_2 = \alpha$ (рис. 3) и выпишем уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = Q_1, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_2. \quad (7)$$

Кинетическую энергию системы T можно представить как поступательное движение центра масс и вращение вокруг центра масс, то

$$T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2} J_{C\dot{\alpha}} \dot{\alpha}^2. \quad (8)$$

где V_c – абсолютная скорость центра масс протеза, $\dot{\alpha}$ – абсолютная угловая скорость протеза, $J_{C\omega}$ – момент инерции протеза относительно оси вращения, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости движения, равный

$$J_{C\dot{\alpha}} = \frac{m_2 l^2}{12} + \frac{1}{4} m_1 b^2 + m s^2 + \frac{m_1 m_2 l^2}{4m}. \quad (9)$$

где m_1, m_2 – массы основания и стержня протеза соответственно.

Подставляя в (8) значения скоростей, выраженные через обобщенные координаты и значение $J_{C\dot{\alpha}}$, имеем

$$T = \frac{m \dot{s}^2}{2} + \frac{m}{2} \left(2s + l_0 - \frac{m_2 l}{2m} \right)^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{m_2 l^2}{12} + \frac{1}{4} m_1 b^2 + m s^2 + \frac{m_1 m_2 l^2}{4m} \right] \dot{\alpha}^2. \quad (10)$$

Находим частные производные от кинетической энергии по уравнениям (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m \dot{s}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = m \left(2s + l_0 - \frac{m_2 l}{2m} \right) \dot{\alpha} + \left[\frac{m_2 l^2}{12} + \frac{1}{4} m_1 b^2 + m s^2 + \frac{m_1 m_2 l^2}{4m} \right] \dot{\alpha}, \\ \frac{\partial T}{\partial s} = 2m \left(2s + l_0 - \frac{m_2 l}{2m} \right) \dot{\alpha}^2 + m s \dot{\alpha}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь определим обобщенные силы Q_1 и Q_2 . Изображаем действующие на систему активные силы: Q_p, T_p, F_{st} и момент M_p (рис. 3).

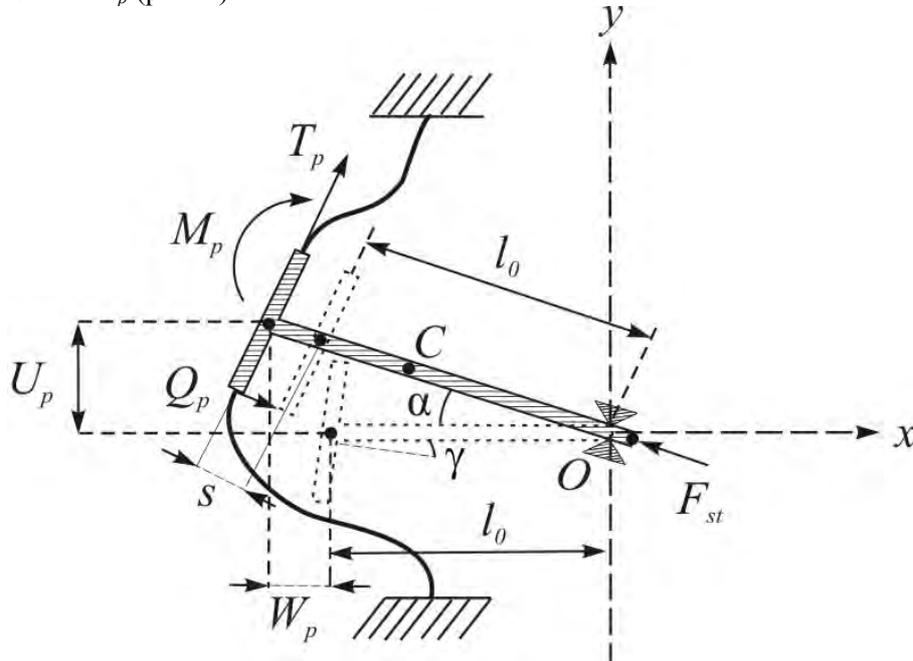


Рисунок 3. – Механическая модель колебательной системы “ТМ-протез”

а) Для определения Q_1 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата s получает приращение $\delta s > 0$, а α не изменяется, т.е. $\delta \alpha = 0$ (протез при таком перемещении не поворачивается). Тогда элементарная работа всех действующих сил будет равна

$$\delta A_1 = \left(-Q_p \cos \gamma - T_p \sin \gamma + F_{st} \right) \delta s. \quad (12)$$

Здесь Q_p, M_p – равнодействующие перерезывающих сил и изгибающих моментов, возникающих вдоль внутреннего контура $r = b$ со стороны ТМ, а

$$F_{st} = ks \quad (13)$$

– сила, являющаяся мерой взаимодействия внутреннего уха и основания стремени и возникающая в результате деформации мембраны круглого окна, k – коэффициент жесткости системы «кохлеарная жидкость – мембрана круглого окна» [8].

б) Для определения Q_2 сообщим системе возможное перемещение, при котором координата α получает приращение $\delta\alpha > 0$, а s не изменяется, т.е. $\delta s = 0$ (протез при таком перемещении системы не смещается). Тогда

$$\delta A_2 = (-Q_p b - Q_p(l_0 + s)\sin\gamma + M_p)\delta\alpha. \quad (14)$$

Коэффициенты при δs и $\delta\alpha$ в равенствах (13) и (14) и будут искомыми обобщенными силами. Отсюда

$$\begin{aligned} Q_1 &= -Q_p \cos\gamma - T_p \sin\gamma + F_{st}, \\ Q_2 &= -Q_p b - Q_p(l_0 + s)\sin\gamma + M_p, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} Q_p &= -bD \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) \Big|_{r=b} d\varphi, \\ T_p &= b \int_0^{2\pi} [T_1 \cos\varphi + S \sin\varphi] \Big|_{r=b} d\varphi. \end{aligned} \quad (16)$$

$$M_p = bD \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \right) \Big|_{r=b} d\varphi.$$

Подставим выражения обобщенных сил (15) и частные производные от кинетической энергии (10) в уравнения Лагранжа (7). После несложных преобразований получаем дифференциальные уравнения движения протеза:

$$\begin{aligned} m\ddot{s} - 2m \left(2s + l_0 - \frac{m_2 l}{2m} \right)^2 \dot{\alpha}^2 - ms\dot{\alpha}^2 &= -Q_p \cos\gamma - T_p \sin\gamma + F_{st}, \\ \left[\frac{m_2 l^2}{12} + \frac{1}{4} m_1 b^2 + 5ms^2 + \frac{m_1 m_2 l^2}{4m} + 4msl_0 + ml_0^2 + \frac{m_2^2 l^2}{4m} - (2s + l_0)m_2 l \right] \ddot{\alpha} + \\ + 8ms\dot{s}\dot{\alpha} + 4ml_0\dot{s}\dot{\alpha} + 2ms\dot{s} - 2m_2 l\dot{s}\dot{\alpha} &= -[b + (l_0 + s)\sin\gamma]Q_p + M_p. \end{aligned} \quad (17)$$

Решение краевой задачи. Получили замкнутую краевую задачу (1) – (6), (17) на собственные значения λ . Решение неоднородной краевой задачи (1), (3) и (5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} W &= \frac{W_p}{|M|} \left\{ \bar{M}_{31} J_0(\sqrt[4]{\lambda} r) + \bar{M}_{32} Y_0(\sqrt[4]{\lambda} r) + \bar{M}_{33} I_0(\sqrt[4]{\lambda} r) + \bar{M}_{34} K_0(\sqrt[4]{\lambda} r) \right\} + \\ &+ \frac{\sin\alpha}{|N|} \left\{ (b\bar{N}_{31} - \bar{N}_{41}) J_1(\sqrt[4]{\lambda} r) + (b\bar{N}_{32} - \bar{N}_{42}) Y_1(\sqrt[4]{\lambda} r) + \right. \\ &\left. + (b\bar{N}_{33} - \bar{N}_{43}) I_1(\sqrt[4]{\lambda} r) + (b\bar{N}_{34} - \bar{N}_{44}) K_1(\sqrt[4]{\lambda} r) \right\} \cos\varphi \end{aligned} \quad (18)$$

где J_0, Y_0, J_1, Y_1 – функции Бесселя первого и второго рода нулевого и первого порядков, I_0, K_0, I_1, K_1 – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого и первого порядков, \mathbf{M}, \mathbf{N} – матрицы размерности 4×4 , элементы которых находятся из граничных условий (3), (5) и ввиду их громоздкости здесь не выписываются, а $\bar{M}_{3j}, \bar{N}_{3j}, \bar{N}_{4j}$ ($j=1, \dots, 4$) – соответствующие миноры матриц \mathbf{M} и \mathbf{N} .

Принимая во внимание функциональную зависимость (4) тангенциальных перемещений u и v ТМ от окружной координаты φ на линии контакта с основанием протеза (при $r = b$), решение уравнений (2) ищем в виде:

$$u = u_0^c(r) \cos\varphi + u_0^s(r) \sin\varphi, \quad v = v_0^c(r) \cos\varphi + v_0^s(r) \sin\varphi,$$

$$\begin{aligned}
u_0^c(r) &= (1-3\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2}\frac{1}{r^2} + C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - C_{1,3}(1-\nu^2) - C_{1,4}, \\
v_0^c(r) &= -(5+\nu)C_{1,5}r^2 - C_{1,6}\frac{1}{r^2} + C_{1,7}(3-\nu)^2 \ln r + 2C_{1,7}(1+\nu) - C_{1,8}, \\
u_0^s(r) &= (1-3\nu)C_{1,5}r^2 + C_{1,6}\frac{1}{r^2} + C_{1,7}(3-\nu)^2 \ln r - C_{1,7}(1-\nu^2) - C_{1,8}, \\
v_0^s(r) &= (5+\nu)C_{1,1}r^2 + C_{1,2}\frac{1}{r^2} - C_{1,3}(3-\nu)^2 \ln r - 2C_{1,3}(1+\nu) + C_{1,4},
\end{aligned} \tag{19}$$

а постоянные C_{ij} находятся из граничных условий (4), (6) и в силу их громоздкости также не приводятся. Заметим лишь, что C_{ij} – линейные функции параметра α .

Выразим нормальное и тангенциальные перемещения точек пластины через обобщенные координаты s и α . В итоге получаем:

$$W_p = (s + l_0)\cos \alpha - l_0, \quad U_p = (s + l_0)\sin \alpha, \tag{20}$$

Найденные перемещения (18), (19), с учетом (20), позволяют определить силы Q_p и T_p , действующие на протез со стороны ТМ. Система уравнений (17) является нелинейной относительно s и α . После линеаризации приходим к системе линейных уравнений

$$\begin{aligned}
m\ddot{s} &= -Q_p(s)\cos \gamma - T_p(\alpha)\sin \gamma + F_{st}(s), \\
\left[\frac{m_2 l^2}{12} + \frac{1}{4}m_1 b^2 + \frac{m_1 m_2 l^2}{4m} + ml_0^2 + \frac{m_2^2 l^2}{4m} - l_0 m_2 l \right] \ddot{\alpha} &= \\
&= -[b + l_0 \sin \gamma]Q_p(s) + M_p(s),
\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$Q_p = A \cdot s, \quad T_p = B \cdot \alpha, \quad M_p = N \cdot s. \tag{22}$$

Проведем разделение переменных по формулам:

$$s = S e^{i\omega t}, \quad \alpha = \Lambda e^{i\omega t}, \tag{23}$$

где ω – искомая частота колебаний.

Принимая во внимание (22)-(23), приходим к системе уравнений относительно искомой частоты ω :

$$\begin{aligned}
m\omega^2 S &= -AS \cos \gamma - B\Lambda \sin \gamma + kS \\
\left[\frac{m_2 l^2}{12} + \frac{1}{4}m_1 b^2 + \frac{m_1 m_2 l^2}{4m} + ml_0^2 + \frac{m_2^2 l^2}{4m} - m_2 l l_0 \right] \omega^2 \Lambda &= \\
&= -[b + l_0 \sin \gamma]AS + NS,
\end{aligned} \tag{24}$$

где A, B, N в силу громоздкости здесь не приводятся.

Численный анализ. Численное решение полученной системы уравнений позволяет исследовать влияние геометрических и физических параметров трансплантата, а также протеза на частотные характеристики РСУ. В таблице 1 представлены зависимости первых пяти собственных частот от массы протеза, при $a=5$ мм, $b=1.5$ мм, $E=3.4$ Н/мм², $\nu=0.4$, $h=0.5$, $T_0=10^{-5}$ Н/м [2,6].

Таблица 1 – Зависимость собственных частот ω_j (Гц) от массы протеза m

$10^{-6} m$, кг	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
4.00	118.63	319.39	968.28	2264.05	4005.59
6.00	106.59	306.78	1088.55	2401.23	4129.39
8.00	98.55	324.82	1159.57	2463.48	4184.09

Приведенные в табл. 1 результаты указывают на то, что увеличение массы протеза приводит к заметному уменьшению первых двух частот. Объясняется это тем, что для соответствующих мод определяющим является движение протеза, а частоты ω_j , при $j \geq 3$ отвечают интенсивным колебаниям барабанной перепонки. Табл. 2 показывает сильную зависимость собственных частот от параметров трансплантата: увеличение толщины пластины приводит к росту собственных частот.

Таблица 2 – Зависимость собственных частот ω_i (Гц) от толщины h пластины.

h , мм	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
0.3	68.53	237.4	723.346	1999.22	2528.86
0.5	106.59	306.78	1088.55	2401.23	4129.39
0.7	146.67	371.66	1369.07	3205.75	5643.48

Значительное влияние на динамические характеристики РСУ оказывает модуль упругости хрящевой ткани, замещающей барабанную перепонку. Из таблицы 3 видно, что все собственные частоты РСУ возрастают вместе с модулем упругости хрящевого трансплантата.

Таблица 3 – Зависимость собственных частот ω_i (Гц) от модуля Юнга E

E , Н/мм ²	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
1,2	65.09	188.2	647.62	1426.71	2453.27
3,4	106.59	306.78	1088.55	2401.23	4129.39
5,2	135.5	391.77	1343.13	2970.0	5106.89

В табл. 4 приведены первые пять частот колебательной системы среднего уха, при тотальной реконструкции в случае ограниченной подвижности протеза, когда он имеет лишь одну степень свободы, определяемую направляющей перфорации [3]. Сравнивая частоты, приведенные в последних двух строчках из табл. 1 и 4, приходим к выводу: придание протезу дополнительной подвижности приводит к снижению всего спектра собственных частот системы.

Таблица 4 – Зависимость собственных частот ω_i (Гц) от массы протеза m при $h=0.15$

$10^{-6} m$, кг	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
2.00	114.34	342.45	674.28	1090.72	1566.66
6.00	107.1	327.36	657.49	1074.39	1550.84
8.00	105.40	324.78	654.92	1072.01	1548.6

Для сравнения в табл. 5 приведены первые восемь частот колебательной системы среднего уха в норме, найденные с использованием метода МКЭ [9] с учетом влияния всех связок и мышц барабанной полости.

Таблица 5 – Собственные частоты среднего уха в норме

Номер моды, □	1	2	3	4	5	6	7	8
$\omega^{(□)}$, Гц	91	172	228	271	483	647	857	1189

Из таблиц 1-2 и 5 видно, что варьирование массы протеза и хрящевого трансплантата позволяет приблизить первую частоту РСУ к частоте СУ в норме.

Построенная здесь динамическая модель может быть использована для прогнозирования динамических характеристик РСУ при тимпанопластике и стапедотомии при различных характеристиках вводимого протеза TORP и хрящевого трансплантата.

Резюме

Предложена биомеханическая модель реконструированного среднего уха, подвергнутого тимпанопластике и стапедотомии. Основной целью данного исследования является изучение влияния тангенциальных перемещений в барабанной перепонке на собственные частоты и формы колебаний реконструированного среднего уха. Реконструированная тимпанальная мембрана моделируется как упругая изотропная кольцевая пластина.

Литература

1. Hüttenbrink, K. Titanium clip prosthesis / T. Zahnert, E.G. Wüstenberg // *Audiology and Neuro-Otology*. 2004. Vol. 25. – P. 436–442.
2. Вульштейн, Х. Слухулучшающие операции / Х. Вульштейн – М.: Медицина, 1972. – 423с.
3. Михасев, Г.И. Собственные частоты колебательной системы среднего уха после тотальной реконструкции / Г.И. Михасев, И.Л. Славашевич // *Вестник СПбГУ. Сер. 1*. 2012. Вып. 3. – С. 107-116.
4. Zahnert, Th. Experimental investigations of the use of cartilage in tympanic membrane reconstruction / Th. Zahnert, K.-B. Hüttenbrink, D. Murbe, M. Bornitz // *The American Journal of Otology*. 2000. Vol. 21. – P. 322–328.
5. Mikhasev, G. I. On the strain-stress state of the reconstructed middle ear after inserting a malleus-incus prosthesis / G. I. Mikhasev, S. A. Ermochenko, M. Bornitz // *Mathematical Medicine and Biology*. 2010. Vol. 27 (4). – P. 289–312.
6. Михасев, Г.И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках: Асимптотические методы / Г.И. Михасев, П.Е. Товстик – М.: Физматлит, 2009. – 290с.
7. Wada, H. Three-dimensional finite-element method (FEM) analysis of the human middle ear / H. Wada, T. Koike, T. Kobayashi // *Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery* (Eds. K.-B. Hüttenbrink). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology, 1997. – P. 76–81.
8. Чигарев, А.В. Биомеханика: Учебник / А.В. Чигарев, Г.И. Михасев, А.В. Борисов. – Мн.: Изд-во Гревцова, 2010. – 284с.
9. Beer, H.-J. Finite element modeling of the human eardrum and applications / M. Bornitz, H.-J. Hardke, R. Schmidt, G. Hofman, V. Vogel, T. Zahnert, K.-B. Hüttenbrink // *Middle Ear Mechanics in Research and Otosurgery*. (Eds. K.-B. Hüttenbrink). – Dresden: Dept. of Oto-Rhino-Laryngology, Univ. of Technology. 1977. – P. 40–47.

Summary

Biomechanical model of the reconstructed middle ear subjected to tympanoplasty and stapedotomy is proposed. The basic goal of this study is to clear up the influence of the tangential displacements in an eardrum at modes and fundamental frequencies of the reconstructed middle ear. The reconstructed tympanic membrane is modeled as an isotropic elastic annular plate.

Поступила в редакцию 20.11.2012