

ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕМАТИКИ МАНИПУЛЯТОРА В АППАРАТЕ КВАТЕРНИОНОВ И ИХ ДУАЛЬНЫХ АНАЛОГОВ

Громько О.В., Царева А.А.

Белорусский государственный университет, Минск

Задачи кинематики и динамики манипуляторов приходится решать на различных этапах проектирования и при управлении роботами. Проектирование промышленного робота начинается с исследования операций и условий производства, в которых предполагается использовать робот. Для формулировки требований к манипулятору возникает необходимость решения прямой и обратной задачи кинематики.

Решение прямой задачи кинематики с использованием нетрадиционных кинематических параметров, таких как кватернионы и их дуальные аналоги, выполнено для робота-манипулятора M710-iC с шестью вращательными парами семейства Fanuc. Изображение и кинематическая схема рассматриваемого манипулятора представлена ниже на рис. 1.

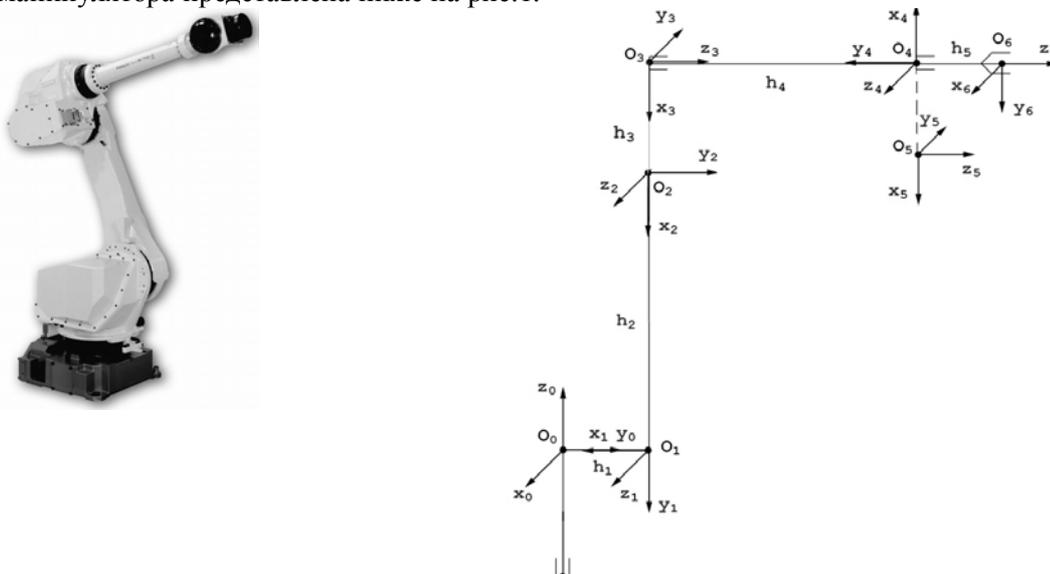


Рисунок 1 – Вид и кинематическая схема манипулятора M-710iC/70

Свяжем с каждым звеном системы координат, как показано на рис. 1, составим таблицу параметров Денави-Хартенберга:

Таблица 1

N	Тип	θ	S	a	α
1	R	q_1	0	$-h_1$	$-\pi/2$
2	R	q_2	0	$-h_2$	0
3	R	q_3	0	$-h_3$	$-\pi/2$
4	R	q_4	h_4	0	$-\pi/2$
5	R	q_5	0	0	$-\pi/2$
6	R	q_6	h_5	0	0

Матрицы дуальных направляющих косинусов. Согласно теории винтового исчисления дуальный угол позволяет одновременно описать поворот и смещение, т.е. для совмещения двух соседних систем координат звеньев по схеме Денави-Хартенберга требуется осуществить повороты па два дуальных угла $Q_i = q_i + s s_i$, $A_i = \alpha_i + s a_i$ вокруг осей Z_i и X_i ($s^2 = 0$ – комплексность Клиффорда). Описание пространственного положения рабочего органа рассматриваемого манипулятора требует 12 дуальных углов $Q_i, A_i, i = \overline{1, 6}$.

Используя аппарат матриц дуальных направляющих косинусов, переход между соседними звеньями опишем при помощи матриц вида C'_{i+1}, C''_{i+1} ,

$$C_{i+1} = C'_{i+1} \cdot C''_{i+1} = \begin{bmatrix} CQ_i & -SQ_i & 0 \\ SQ_i & CQ_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & CA_i & -SA_i \\ 0 & SA_i & CA_i \end{bmatrix}$$

Учитывая комплексность Клиффорда $s^2 = 0$, получим результаты для звеньев исследуемого манипулятора (решение приведем на примере первых трех звеньев манипулятора):

Для первого звена имеем: для перехода от системы координат $X_0Y_0Z_0$ к системе координат $X_1Y_1Z_1$ необходимо осуществить два поворота: на q_1 вокруг оси Z_0 и на $\alpha_1 = -\pi/2$ вокруг оси X_0 ; и два перемещения на $s_1 = 0$ и на $a_1 = -h_1$ согласно таблице параметров Денави-Хартенберга 1. С учетом правила умножения дуальных матриц и дуальных элементов получим:

$$C_{01} = C_{01} + sC_{01}^0 \quad C_{01} = \begin{bmatrix} Cq_1 & 0 & -Sq_1 \\ Sq_1 & 0 & Cq_1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{01}^0 = \begin{bmatrix} 0 & h_1Sq_1 & 0 \\ 0 & -h_1Cq_1 & 0 \\ 0 & 0 & -h_1 \end{bmatrix}$$

Аналогично для второго звена: переход от системы координат координат $X_1Y_1Z_1$ к системе координат $X_2Y_2Z_2$ получается посредством поворота системы координат $X_1Y_1Z_1$ вокруг оси Z_1 на угол q_2 и перемещений $s_2 = 0$ и $a_2 = -h_2$. Таким образом, получим:

$$C_{12} = C_{12} + sC_{12}^0, \quad \text{где:} \quad C_{12} = \begin{bmatrix} Cq_2 & -Sq_2 & 0 \\ Sq_2 & Cq_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{12}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -h_2Sq_2 \\ 0 & 0 & h_2Cq_2 \\ 0 & -h_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Для третьего звена: смещение системы координат $X_2Y_2Z_2$ к $X_3Y_3Z_3$ получается при повороте системы координат $X_2Y_2Z_2$ вокруг оси Z_2 на q_3 , вокруг оси X_2 на $\alpha_3 = -\pi/2$, перемещений $s_3 = 0$ и $a_3 = -h_3$. Таким образом, получим:

$$C_{23} = C_{23} + sC_{23}^0, \quad C_{23} = \begin{bmatrix} Cq_3 & 0 & -Sq_3 \\ Sq_3 & 0 & Cq_3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{23}^0 = \begin{bmatrix} 0 & h_3Sq_3 & 0 \\ 0 & -h_3Cq_3 & 0 \\ 0 & 0 & -h_3 \end{bmatrix}$$

После получения всех трех матриц C_{01} , C_{12} и C_{23} , последовательно перемножая их, в результате будем иметь результирующую дуальную матрицу направляющих косинусов, связывающую систему координат основания $X_0Y_0Z_0$ с системой координат последнего звена манипулятора $X_3Y_3Z_3$:

$$C_{03} = C_{03} + sC_{03}^0, \quad C_{03} = \begin{bmatrix} Cq_1C(q_2+q_3) & Sq_1 & -Cq_1S(q_2+q_3) \\ Sq_1C(q_2+q_3) & -Cq_1 & -Sq_1S(q_2+q_3) \\ -S(q_2+q_3) & 0 & -C(q_2+q_3) \end{bmatrix},$$

$$C_{03}^0 = \begin{bmatrix} Sq_1[h_2Sq_3 + h_1S(q_2+q_3)] & Cq_1[h_2Sq_2 + h_3S(q_2+q_3)] & Sq_1[h_3 + h_2Cq_3 + h_1C(q_2+q_3)] \\ -Cq_1[h_2Sq_3 + h_1S(q_2+q_3)] & Sq_1[h_2Sq_2 + h_3S(q_2+q_3)] & -Cq_1[h_3 + h_2Cq_3 + h_1C(q_2+q_3)] \\ 0 & h_1 + h_2Cq_2 + h_3C(q_2+q_3) & 0 \end{bmatrix}$$

Бикватернионы и бикватернионные матрицы. Теперь решим прямую задачу манипулятора Fanuc M710-iC, используя аппарат кватернионов и их дуальных аналогов. Каждый плоский поворот на дуальный угол можно описать бикватернионом вращения $\Lambda = \cos \Phi/2 + i \sin \Phi/2$, где i - единичный вектор оси вращения, $\Phi = \varphi + s\varphi^0$ - дуальный угол поворота. В результате составления матриц перехода получим ряд бикватернионов, характеризующих положение одного звена относительно другого.

Совмещая системы координат $X_0Y_0Z_0$ и $X_1Y_1Z_1$ для первого звена получим два бикватерниона:

1. $\Lambda'_{01} = CQ_1/2 + i_3SQ_1/2 = Cq_1/2 + i_3Sq_1/2$ – бикватернион поворота вокруг оси Z_0 на $Q_i = q_i + s s_i = q_1$
2. $\Lambda''_{01} = CA_1/2 + i_1SA_1/2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{h_1s}{2}\right) + \frac{i_1}{\sqrt{2}}\left(-1 - \frac{h_1s}{2}\right)$ – бикватернион поворота вокруг оси X_0 на $A_i = \alpha_i + s a_i = -\pi/2 - s h_1$.

Результирующий бикватернион получаем перемножением бикватернионов Λ'_{01} и Λ''_{01} в соответствии с правилами кватернионного произведения:

$$\begin{aligned}\Lambda_{01} &= \Lambda'_{01} \circ \Lambda''_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(C\frac{q_1}{2} + i_3S\frac{q_1}{2}\right) \circ \left[\left(1 - \frac{h_1s}{2}\right) + i_1\left(-1 - \frac{h_1s}{2}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(C\frac{q_1}{2} - i_1C\frac{q_1}{2} - i_2S\frac{q_1}{2} + i_3S\frac{q_1}{2}\right) - \frac{sh_1}{2\sqrt{2}}\left(C\frac{q_1}{2} + i_1C\frac{q_1}{2} + i_2S\frac{q_1}{2} + i_3S\frac{q_1}{2}\right)\end{aligned}$$

Аналогичным образом, получим бикватернионы перехода для других звеньев.

Совмещая системы координат $X_1Y_1Z_1$ и $X_2Y_2Z_2$ для второго звена получим два бикватерниона:

1. $\Lambda'_{12} = \left(C\frac{q_1}{2} + i_3S\frac{q_1}{2}\right)$ – бикватернион поворота вокруг оси Z_1 на $Q_2 = q_2$
2. $\Lambda''_{12} = 1 - \frac{h_2i_1s}{2}$ – бикватернион поворота вокруг оси X_1 на $A_2 = \alpha_2 + sa_2 = -sh_2$.

Результирующий бикватернион имеет вид: $\Lambda_{12} = \left(C\frac{q_2}{2} + i_3S\frac{q_2}{2}\right) - \frac{s}{2}\left(h_2i_1C\frac{q_2}{2} + h_2i_2S\frac{q_2}{2}\right)$

Совмещая системы координат $X_2Y_2Z_2$ и $X_3Y_3Z_3$ для третьего звена получим два бикватерниона:

1. $\Lambda'_{23} = \left(C\frac{q_3}{2} + i_3S\frac{q_3}{2}\right)$ – бикватернион поворота вокруг оси Z_2 на $Q_3 = q_3$
2. $\Lambda''_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{h_3s}{2}\right) + \frac{i_1}{\sqrt{2}}\left(-1 - \frac{h_3s}{2}\right)$ – бикватернион поворота вокруг оси X_2 на $A_3 = -\pi/2 - sh_3$.

Результирующий бикватернион имеет вид:

$$\Lambda_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(C\frac{q_3}{2} - i_1C\frac{q_3}{2} - i_2S\frac{q_3}{2} + i_3S\frac{q_3}{2}\right) - \frac{sh_3}{2\sqrt{2}}\left(C\frac{q_3}{2} + i_1C\frac{q_3}{2} + i_2S\frac{q_3}{2} + i_3S\frac{q_3}{2}\right)$$

Окончательно, результирующий бикватернион Λ_{03} , описывающий положение третьего звена относительно основания манипулятора, имеет вид:

$$\Lambda_{03} = \Lambda_{01} \circ \Lambda_{12} \circ \Lambda_{13} = \Lambda_{03} + s\Lambda_{03}^0,$$

где
$$\Lambda_{03} = -S\frac{q_1}{2}S\left(\frac{q_2 + q_3}{2}\right) - i_1C\frac{q_1}{2}C\left(\frac{q_2 + q_3}{2}\right) - i_2S\frac{q_1}{2}C\left(\frac{q_2 + q_3}{2}\right) + i_3C\frac{q_1}{2}S\left(\frac{q_2 + q_3}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{03}^0 &= \frac{1}{2}\left[-h_2C\frac{q_1}{2}C\frac{q_2 - q_3}{2} - (h_1 + h_3)C\frac{q_1}{2}C\frac{q_2 + q_3}{2}\right] + \\ &+ \frac{1}{2}i_3\left[-h_2S\frac{q_1}{2}C\frac{q_2 - q_3}{2} - (h_1 + h_3)S\frac{q_1}{2}C\frac{q_2 + q_3}{2}\right] + \\ &+ \frac{1}{2}i_2\left[-h_2C\frac{q_1}{2}S\frac{q_2 - q_3}{2} + (h_1 - h_3)C\frac{q_1}{2}S\frac{q_2 + q_3}{2}\right] + \\ &+ \frac{1}{2}i_1\left[h_2S\frac{q_1}{2}S\frac{q_2 - q_3}{2} + (-h_1 + h_3)S\frac{q_1}{2}S\frac{q_2 + q_3}{2}\right]\end{aligned}$$

Бикватерниону вращения можно поставить в соответствие кватернионную матрицу размерностью 4x4, составленную из дуальных параметров Родрига–Гамильтона, вида:

$$m(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{bmatrix},$$

а операция перемножения кватернионов будет соответствовать перемножению матриц, составленных из компонент соответствующих кватернионов.

Тогда для первого звена получим:

$$B'_{01} = B'_{01} + sB_{01}^0, \quad B''_{01} = B''_{01} + sB_{01}^0$$

$$B_{01} = B'_{01} B''_{01} = B_{01} + sB_{01}^0$$

$$B'_{01} = \begin{bmatrix} C \frac{q_1}{2} & 0 & 0 & -S \frac{q_1}{2} \\ 0 & C \frac{q_1}{2} & -S \frac{q_1}{2} & 0 \\ 0 & S \frac{q_1}{2} & C \frac{q_1}{2} & 0 \\ S \frac{q_1}{2} & & & C \frac{q_1}{2} \end{bmatrix}, \quad B_{01}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B'_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad B_{01}^0 = \frac{h_1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$B_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} C \frac{q_1}{2} & C \frac{q_1}{2} & S \frac{q_1}{2} & -S \frac{q_1}{2} \\ -C \frac{q_1}{2} & C \frac{q_1}{2} & -S \frac{q_1}{2} & -S \frac{q_1}{2} \\ -S \frac{q_1}{2} & S \frac{q_1}{2} & C \frac{q_1}{2} & C \frac{q_1}{2} \\ S \frac{q_1}{2} & S \frac{q_1}{2} & -C \frac{q_1}{2} & C \frac{q_1}{2} \end{bmatrix}; \quad B_{01}^0 = \frac{h_1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -C \frac{q_1}{2} & C \frac{q_1}{2} & S \frac{q_1}{2} & S \frac{q_1}{2} \\ -C \frac{q_1}{2} & -C \frac{q_1}{2} & S \frac{q_1}{2} & -S \frac{q_1}{2} \\ -S \frac{q_1}{2} & -S \frac{q_1}{2} & -C \frac{q_1}{2} & C \frac{q_1}{2} \\ -S \frac{q_1}{2} & S \frac{q_1}{2} & -C \frac{q_1}{2} & -C \frac{q_1}{2} \end{bmatrix};$$

Переход между первым и вторым звеньями опишется матрицей B_{12} :

$$B'_{12} = B'_{12} + sB_{12}^0, \quad B''_{12} = B''_{12} + sB_{12}^0, \quad B_{12} = B'_{12} B''_{12} = B_{12} + sB_{12}^0,$$

$$B'_{12} = \begin{bmatrix} C \frac{q_2}{2} & 0 & 0 & -S \frac{q_2}{2} \\ 0 & C \frac{q_2}{2} & -S \frac{q_2}{2} & 0 \\ 0 & S \frac{q_2}{2} & C \frac{q_2}{2} & 0 \\ S \frac{q_2}{2} & 0 & 0 & C \frac{q_2}{2} \end{bmatrix}, \quad B_{12}^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B''_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{12}^0 = \frac{h_2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} C \frac{q_2}{2} & 0 & 0 & -S \frac{q_2}{2} \\ 0 & C \frac{q_2}{2} & -S \frac{q_2}{2} & 0 \\ 0 & S \frac{q_2}{2} & C \frac{q_2}{2} & 0 \\ S \frac{q_2}{2} & 0 & 0 & C \frac{q_2}{2} \end{bmatrix} \quad B_{12}^0 = \frac{h_2}{2} \begin{bmatrix} 0 & C \frac{q_2}{2} & S \frac{q_2}{2} & 0 \\ -C \frac{q_2}{2} & 0 & 0 & -S \frac{q_2}{2} \\ -S \frac{q_2}{2} & 0 & 0 & C \frac{q_2}{2} \\ 0 & S \frac{q_2}{2} & -C \frac{q_2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Аналогично, переход между вторым и третьим звеньями опишется матрицей B_{23}

$$B'_{23} = B'_{23} + sB_{23}^0, \quad B''_{23} = B''_{23} + sB_{23}^0, \quad B_{23} = B'_{23}B''_{23} = B_{23} + sB_{23}^0$$

Тогда в итоге получим:

$$B_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} C \frac{q_3}{2} & C \frac{q_3}{2} & S \frac{q_3}{2} & -S \frac{q_3}{2} \\ -C \frac{q_3}{2} & C \frac{q_3}{2} & -S \frac{q_3}{2} & -S \frac{q_3}{2} \\ -S \frac{q_3}{2} & S \frac{q_3}{2} & C \frac{q_3}{2} & C \frac{q_3}{2} \\ S \frac{q_3}{2} & S \frac{q_3}{2} & -C \frac{q_3}{2} & C \frac{q_3}{2} \end{bmatrix}; \quad B_{23}^0 = \frac{h_3}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -C \frac{q_3}{2} & C \frac{q_3}{2} & S \frac{q_3}{2} & S \frac{q_3}{2} \\ -C \frac{q_3}{2} & -C \frac{q_3}{2} & S \frac{q_3}{2} & -S \frac{q_3}{2} \\ -S \frac{q_3}{2} & -S \frac{q_3}{2} & -C \frac{q_3}{2} & C \frac{q_3}{2} \\ -S \frac{q_3}{2} & S \frac{q_3}{2} & -C \frac{q_3}{2} & -C \frac{q_3}{2} \end{bmatrix};$$

Тогда результирующая бикватернионная матрица имеет вид: $B_{03} = B_{01}B_{12}B_{23} = B_{03} + sB_{03}^0$

$$B_{03} = \begin{bmatrix} -S \frac{q_1}{2} S \frac{q_2+q_3}{2} & C \frac{q_1}{2} C \frac{q_2+q_3}{2} & S \frac{q_1}{2} C \frac{q_2+q_3}{2} & -C \frac{q_1}{2} S \frac{q_2+q_3}{2} \\ -C \frac{q_1}{2} C \frac{q_2+q_3}{2} & -S \frac{q_1}{2} S \frac{q_2+q_3}{2} & -C \frac{q_1}{2} S \frac{q_2+q_3}{2} & -S \frac{q_1}{2} C \frac{q_2+q_3}{2} \\ -S \frac{q_1}{2} C \frac{q_2+q_3}{2} & C \frac{q_1}{2} S \frac{q_2+q_3}{2} & -S \frac{q_1}{2} S \frac{q_2+q_3}{2} & C \frac{q_1}{2} C \frac{q_2+q_3}{2} \\ C \frac{q_1}{2} S \frac{q_2+q_3}{2} & S \frac{q_1}{2} C \frac{q_2+q_3}{2} & -C \frac{q_1}{2} C \frac{q_2+q_3}{2} & -S \frac{q_1}{2} S \frac{q_2+q_3}{2} \end{bmatrix}$$

$$B_{03}^0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} C \frac{q_1}{2} \left[h_2 C \frac{q_2-q_3}{2} + (h_1+h_3) C \frac{q_2+q_3}{2} \right] & -\frac{1}{2} S \frac{q_1}{2} \left[h_2 S \frac{q_2-q_3}{2} + (-h_1+h_3) S \frac{q_2+q_3}{2} \right] \\ \frac{1}{2} S \frac{q_1}{2} \left[h_2 S \frac{q_2-q_3}{2} + (-h_1+h_3) S \frac{q_2+q_3}{2} \right] & -\frac{1}{2} C \frac{q_1}{2} \left[h_2 C \frac{q_2-q_3}{2} + (h_1+h_3) C \frac{q_2+q_3}{2} \right] \\ -\frac{1}{2} C \frac{q_1}{2} \left[h_2 S \frac{q_2-q_3}{2} + (-h_1+h_3) S \frac{q_2+q_3}{2} \right] & -\frac{1}{2} S \frac{q_1}{2} \left[h_2 C \frac{q_2-q_3}{2} + (h_1+h_3) C \frac{q_2+q_3}{2} \right] \\ -\frac{1}{2} S \frac{q_1}{2} \left[h_2 C \frac{q_2-q_3}{2} + (h_1+h_3) C \frac{q_2+q_3}{2} \right] & \frac{1}{2} C \frac{q_1}{2} \left[h_2 S \frac{q_2-q_3}{2} + (-h_1+h_3) S \frac{q_2+q_3}{2} \right] \\ \frac{1}{2} C \frac{q_1}{2} \left[h_2 S \frac{q_2-q_3}{2} + (-h_1+h_3) S \frac{q_2+q_3}{2} \right] & \frac{1}{2} S \frac{q_1}{2} \left[h_2 C \frac{q_2-q_3}{2} + (h_1+h_3) C \frac{q_2+q_3}{2} \right] \\ \frac{1}{2} S \frac{q_1}{2} \left[h_2 C \frac{q_2-q_3}{2} + (h_1+h_3) C \frac{q_2+q_3}{2} \right] & -\frac{1}{2} C \frac{q_1}{2} \left[h_2 S \frac{q_2-q_3}{2} + (-h_1+h_3) S \frac{q_2+q_3}{2} \right] \\ -\frac{1}{2} C \frac{q_1}{2} \left[h_2 C \frac{q_2-q_3}{2} + (h_1+h_3) C \frac{q_2+q_3}{2} \right] & -\frac{1}{2} S \frac{q_1}{2} \left[h_2 S \frac{q_2-q_3}{2} + (-h_1+h_3) S \frac{q_2+q_3}{2} \right] \\ \frac{1}{2} S \frac{q_1}{2} \left[h_2 S \frac{q_2-q_3}{2} + (-h_1+h_3) S \frac{q_2+q_3}{2} \right] & -\frac{1}{2} C \frac{q_1}{2} \left[h_2 C \frac{q_2-q_3}{2} + (h_1+h_3) C \frac{q_2+q_3}{2} \right] \end{bmatrix}$$

Параметры и матрицы параметров Кейли-Клейна. Дуальные параметры Кейли-Клейна являются комплексно-сопряженными комбинациями составляющих бикватерниона, а именно, дуальных параметров Родрига-Гамильтона, вида

$$\begin{aligned} A &= \Lambda_0 + i\Lambda_3, \quad \Delta = \Lambda_0 - i\Lambda_3, \\ B &= \Lambda_2 + i\Lambda_1, \quad \Gamma = i\Lambda_1 - \Lambda_2 \end{aligned}$$

Матрицей дуальных параметров Кейли-Клейна, составленной из этих элементов можно описать поворот на произвольный дуальный угол.

$$Q = \begin{bmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_0 + i\Lambda_3 & \Lambda_2 + i\Lambda_1 \\ i\Lambda_1 - \Lambda_2 & \Lambda_0 - i\Lambda_3 \end{bmatrix}$$

Последовательное перемещение от одного звена к другому можно описать дуальными матрицами перехода вида (3.8), которые, если их перемножить между собой в том же порядке, позволят получить результирующую дуальную матрицу параметров Кейли-Клейна, связывающую основание манипулятора с последним звеном.

Учитывая вышесказанное для первого звена, совмещая системы координат $X_0Y_0Z_0$ и $X_1Y_1Z_1$, получим две матрицы параметров Кейли-Клейна:

1. $Q'_{01} = \begin{bmatrix} CQ_1/2 + iSQ_1/2 & 0 \\ 0 & CQ_1/2 - iSQ_1/2 \end{bmatrix}$ – матрица дуальных параметров Кейли-Клейна, описывающая поворот вокруг оси Z_0 на дуальный угол $Q_1 = q_1 + s s_1$

2. $Q''_{01} = \begin{bmatrix} CA_1/2 & iSA_1/2 \\ iSA_1/2 & CA_1/2 \end{bmatrix}$ – матрица дуальных параметров Кейли-Клейна, описывающая поворот вокруг оси X_0 на дуальный угол $A_1 = \alpha_1 + s a_1 = -\pi/2 - s h_1$.

Результирующую матрицу дуальных параметров Кейли-Клейна для первого звена получаем перемножением матрицы Q'_{01} и Q''_{01} в соответствии с правилами кватернионного произведения

$$\begin{aligned} Q_{01} &= Q'_{01} Q''_{01} = \begin{bmatrix} CQ_1/2 + iSQ_1/2 & 0 \\ 0 & CQ_1/2 - iSQ_1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CA_1/2 & iSA_1/2 \\ iSA_1/2 & CA_1/2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} C \frac{q_1}{2} + iS \frac{q_1}{2} & -iC \frac{q_1}{2} + S \frac{q_1}{2} \\ -iC \frac{q_1}{2} - S \frac{q_1}{2} & C \frac{q_1}{2} - iS \frac{q_1}{2} \end{pmatrix} + \frac{s h_1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -C \frac{q_1}{2} - iS \frac{q_1}{2} & -iC \frac{q_1}{2} + S \frac{q_1}{2} \\ -iC \frac{q_1}{2} - S \frac{q_1}{2} & -C \frac{q_1}{2} + iS \frac{q_1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Аналогичным образом получим бикватернионы перехода для других звеньев.

Результирующая матрица дуальных параметров Кейли-Клейна для второго звена манипулятора имеет вид:

$$Q_{12} = \begin{bmatrix} C \frac{q_2}{2} + iS \frac{q_2}{2} & 0 \\ 0 & C \frac{q_2}{2} - iS \frac{q_2}{2} \end{bmatrix} + \frac{s h_2}{2} \begin{bmatrix} 0 & -iC \frac{q_2}{2} + S \frac{q_2}{2} \\ -iC \frac{q_2}{2} - S \frac{q_2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Совмещая системы координат $X_2Y_2Z_2$ и $X_3Y_3Z_3$ для третьего звена получим две матрицы параметров Кейли-Клейна:

1. $Q'_{23} = \begin{bmatrix} C \frac{q_3}{2} + iS \frac{q_3}{2} & 0 \\ 0 & C \frac{q_3}{2} - iS \frac{q_3}{2} \end{bmatrix}$ – матрица дуальных параметров Кейли-Клейна, описывающая по-

ворот вокруг оси Z_2 на дуальный угол $Q_3 = q_3$

2. $Q_{12}'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} - \frac{sh_3}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ – матрица дуальных параметров Кейли-Клейна, описывающая поворот вокруг оси X_2 на дуальный угол $A_3 = -\pi/2 - sh_3$.

Результирующая матрица дуальных параметров Кейли-Клейна для третьего звена имеет вид:

$$Q_{01} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} C \frac{q_3}{2} + iS \frac{q_3}{2} & -iC \frac{q_3}{2} + S \frac{q_3}{2} \\ -iC \frac{q_3}{2} - S \frac{q_3}{2} & C \frac{q_3}{2} - iS \frac{q_3}{2} \end{bmatrix} + \frac{sh_3}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -C \frac{q_3}{2} - iS \frac{q_3}{2} & -iC \frac{q_3}{2} + S \frac{q_3}{2} \\ -iC \frac{q_3}{2} - S \frac{q_3}{2} & -C \frac{q_3}{2} + iS \frac{q_3}{2} \end{bmatrix}$$

Таким образом, результирующая дуальная матрица параметров Кейли-Клейна для первых трех звеньев имеет вид:

$$Q_{03} = Q_{01}Q_{12}Q_{23} = Q_{03} + sQ_{03}^0 = Q_{03} + \frac{s}{2} \begin{bmatrix} \alpha_{03}^0 & \beta_{03}^0 \\ \gamma_{03}^0 & \delta_{03}^0 \end{bmatrix}$$

где

$$Q_{03} = \begin{bmatrix} iS \left(\frac{q_2 + q_3}{2} \right) \left[C \frac{q_1}{2} + iS \frac{q_1}{2} \right] & C \left(\frac{q_2 + q_3}{2} \right) \left[-iC \frac{q_1}{2} + S \frac{q_1}{2} \right] \\ -iC \left(\frac{q_2 + q_3}{2} \right) \left[C \frac{q_1}{2} - iS \frac{q_1}{2} \right] & -iS \left(\frac{q_2 + q_3}{2} \right) \left[C \frac{q_1}{2} - iS \frac{q_1}{2} \right] \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{03}^0 = - \left[h_2 C \left(\frac{q_2 - q_3}{2} \right) + (h_1 + h_3) C \left(\frac{q_2 + q_3}{2} \right) \right] \left[C \frac{q_1}{2} + iS \frac{q_1}{2} \right]$$

$$\beta_{03}^0 = \left[h_2 S \left(\frac{q_2 - q_3}{2} \right) + (-h_1 + h_3) S \left(\frac{q_2 + q_3}{2} \right) \right] \left[C \frac{q_1}{2} + iS \frac{q_1}{2} \right]$$

$$\gamma_{03}^0 = - \left[h_2 S \left(\frac{q_2 - q_3}{2} \right) + (-h_1 + h_3) S \left(\frac{q_2 + q_3}{2} \right) \right] \left[C \frac{q_1}{2} - iS \frac{q_1}{2} \right]$$

$$\delta_{03}^0 = - \left[h_2 C \left(\frac{q_2 - q_3}{2} \right) + (h_1 + h_3) C \left(\frac{q_2 + q_3}{2} \right) \right] \left[C \frac{q_1}{2} - iS \frac{q_1}{2} \right]$$

Таким образом, была решена прямая задача кинематики манипулятора M710-iC семейства fanuc с использованием кватернионов, бикватернионов и их дуальных аналогов. Результаты, полученные разными методами, полностью совпадают для исследуемого манипулятора.

Резюме

В работе приводятся результаты решения прямой задачи кинематики с использованием нетрадиционных кинематических параметров, в частности, таких как кватернионы, бакватернионы, параметры Кейли-Клейна и их дуальные аналоги. Решение выполнено для робота-манипулятора M710-iC семейства Fanuc с шестью вращательными парами.

Литература

1. Аксельрод, Б.В. Описание динамики манипулятора с применением теории винтов / Б.В.Аксельрод // Известия АН СССР. Механика твердого тела. -1985. -№2, -С26-31.
2. Бранец, В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. -М.: Наука, 1973.-320 с.
3. Глазков, В.П. Метод ускоренного умножения кватернионов/В.П.Глазков, С.К.Дауров // Математические методы в технике и технологиях: сб. трудов XII Междунар. науч. конф. - Великий Новгород, 1999.-С.91-94.

Summary

The paper presents the results of the direct kinematics problem using innovative kinematic parameters, in particular, such as quaternions, bakvaterniony, Kaylee-Klein parameters and their dual counterparts. The solution holds for robotic manipulator M710-iC Fanuc family with six rotary pairs.

Поступила в редакцию 16.11.2012