

## ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ НЕУПРУГИХ ИЗГИБАЕМЫХ СТЕРЖНЕЙ НА ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Романова Т.П., Янковский А.П.

*Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

Настоящая работа продолжает исследования, опубликованные автором в [1, 2], где были разработаны численные методы интегрирования динамических задач изгиба стержней при линейно-упругом и упругопластическом поведении их материалов. На практике же часто встречаются ситуации, когда стержень покоится на упругом основании. При этом, как известно [3], разрешающее уравнение качественно отличается от уравнения динамического изгиба стержней, закрепленных лишь на опорах, поэтому актуальной является проблема разработки численных процедур расчета упругопластической динамики стержней на упругом основании. В силу этого данная работа посвящена построению численного алгоритма расчета таких стержней, покоящихся на двухпараметрическом основании [3], и анализу их динамического поведения.

Поперечные колебания рассматриваемых стержней, подчиняющихся гипотезам Бернулли, в предположении о малости прогибов  $w$  описываются следующим уравнением движения [2, 3]:

$$R_*(x)w_{,tt}(x, t) = p(x, t) - D(x; w) - k_p(x)w(x, t) + 2t_p(x)w_{,xx}(x, t), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1)$$

где

$$D(x; w) = \left[ A(x, w_{,xx}, w_{,xx}^*)w_{,xx} - B(x, w_{,xx}, w_{,xx}^*, w_{,xx}^{**}) \right]_{,xx}, \quad R_*(x) = R(x) + m_0; \quad (2)$$

$$k_p = \frac{E_0 b}{1 - \nu_0^2} \int_0^H \psi'^2(y) dy, \quad t_p = \frac{E_0 b}{4(1 + \nu_0)} \int_0^H \psi^2(y) dy, \quad (3)$$

$$m_0 = \rho_{гр} b \int_0^H \psi^2(y) dy, \quad E_0 = \frac{E_{гр}}{1 - \nu_{гр}^2}, \quad \nu_0 = \frac{\nu_{гр}}{1 - \nu_{гр}};$$

$R(x)$  – погонная масса стержня;  $b$  – ширина стержня;  $E_{гр}$ ,  $\nu_{гр}$ ,  $\rho_{гр}$  – модуль Юнга, коэффициент Пуассона и объемная плотность грунта;  $H$  – глубина, на которой в грунте полностью рассеивается воздействие, приложенное к его поверхности;  $k_p$  – коэффициент постели по Винклеру [3] (первый параметр упругого основания);  $t_p$  – второй параметр упругого основания, учитывающий сопротивление грунта сдвигу;  $m_0$  – инерционная характеристика основания;  $p(x, t)$  – погонная динамическая поперечная нагрузка;  $t$  – время;  $x$  – координата вдоль оси стержня длиной  $l$ ;  $\psi$  – функция поперечного распределения перемещений в основании, которая может иметь разные выражения [3], в настоящем же исследовании будем ее задавать в виде (хотя это и не принципиально)

$$\psi(y) = (H - y)/H; \quad (4)$$

нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной  $t, x$ . Конкретный вид операторов  $A, B$  в (2) зависит от механического состояния материала стержня в сечении  $x$  (от наличия лишь упругих или упругопластических деформаций в этом сечении, от наличия разгрузки материала и т. п.). Для стержней прямоугольного поперечного сечения, материал которых имеет линейное упрочнение, выражения для  $A, B$  вплоть до состояния третичной знакопеременной пластичности приведены в [2]. (В (1)–(4) использованы те же обозначения, что и в [2, 3].)

Для однозначного интегрирования уравнения (1) к нему необходимо присоединить общеизвестные начальные и граничные условия (см., например, (26)–(29) в [2]).

Для приближенного интегрирования по времени  $t$  начально-краевой задачи, соответствующей уравнению (1), используем один из обобщенных методов Рунге – Кутты [4], а именно, метод трапе-

ций. Применяя к уравнению (1) рассуждения (31)–(40) из [2], получим следующий численный алгоритм: в каждый момент времени  $t_{n+1}$  прогиб  $w^{n+1}(x)$  определяется уравнением

$$\tau^2 D(x; w^{n+1}(x)) - 2\tau^2 t_p w_{,xx}^{n+1}(x) + (4R_*(x) + \tau^2 k_p) w^{n+1}(x) = P_{n+1}(x), \quad (5)$$

где правая часть известна и определяется по рекуррентной формуле (см. (37)–(40) в [2], в которых следует  $R(x)$  заменить на  $R_*(x)$ );  $\tau$  – шаг интегрирования по времени, возможно, переменный ( $t_{n+1} = t_n + \tau$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $t_0 = 0$ ).

Таким образом, для определения прогиба  $w^{n+1}$  в момент времени  $t_{n+1}$  необходимо проинтегрировать по  $x$  уравнение (5) с известной правой частью при граничных условиях, которые полностью соответствуют граничным условиям исходной начально-краевой задачи. (В частности, в граничных условиях (28), (29) из [2] необходимо заменить  $w$  на  $w^{n+1}$ .)

После деления на  $\tau^2$  уравнение (5) будет формально совпадать с уравнением статического упругопластического изгиба стержня на двухпараметрическом упругом основании с приведенным коэффициентом постели  $\bar{k}_p(x) = k_p + 4\tau^{-2}R_*(x)$ . Для интегрирования двухточечной граничной задачи, соответствующей уравнению (5), можно использовать известные методы статики (в частности, метод матричной прогонки [2, 5]).

Если в (2), (5) принять  $t_p = 0$ ,  $m_0 = 0$  ( $R_*(x) \equiv R(x)$ ), то получим численный алгоритм решения задачи о динамическом изгибе стержня на упругом винклеровском основании [3], не учитывающем сопротивление грунта сдвигу и его инерционную характеристику.

**З а м е ч а н и е.** При  $R_*(x) = 0$  и  $p^0 = 0$ ,  $p^1(x) = p(x)$  (см. (39), (40) в [2]) в момент времени  $t_1 = \tau$  получаем из (5) решение задачи о статическом изгибе стержня на двухпараметрическом упругом основании под действием распределенной нагрузки  $p(x)$ .

Таблица 1 – Физико-механические характеристики материалов стержней [5, 6]

Материал	$E$ , ГПа	$\sigma_s$ , МПа	$\sigma_B$ , МПа	$\delta$ , %	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
Сплав Д16	71	380	520	11	2780
Сталь 45	210	360	610	19	7800

В качестве примеров исследуем статическое и динамическое упругопластическое поведение изгибаемых стержней прямоугольного поперечного сечения из стали 45 и алюминиевого сплава Д16. (Физико-механические характеристики этих материалов приведены в табл. 1.) Ширина  $b(x)$  поперечных сечений стержней предполагается постоянной ( $b(x) = b = \text{const}$ ) и одинаковой для всех рассматриваемых ниже конструкций, высота сечений  $h(x)$  может быть постоянной ( $h(x) = h_* = \text{const}$ ) или переменной и определяется формулой

$$h(x) = sh_* + \pi \sin(\pi x/l)(1-s)h_*/2 \quad (0 \leq x \leq l, \quad s \geq 0). \quad (6)$$

(При задании высоты сечения стержня в виде (6) его объем при любых  $s$  будет равен объему  $h_*lb$  эталонного стержня постоянного поперечного сечения. При  $0 \leq s < 1$  из (6) следует, что высота концевых сечений стержня меньше, чем центрального сечения; при  $s = 1$  получаем балку постоянного сечения высотой  $h_*$ .) Длина стержней  $l = 3$  м, высота эталонных стержней постоянного сечения  $h_* = 0,15$  м. Концы стержней могут быть шарнирно оперты или жестко защемлены. Внешняя распределенная нагрузка является нагрузкой взрывного типа, не зависит от  $x$  и затухает по экспоненциальному закону

$$p(x, t) = p(t) = p_0 \exp(-\alpha t), \quad \alpha = 12 \text{ с}^{-1}, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

где  $p_0$  – значение погонной нагрузки в начальный момент времени  $t = t_0 = 0$ , в который стержни находятся в покое. Стержни могут покоиться на песчаном или на гравийном основании. (Физико-механические характеристики этих грунтов приведены в табл. 2.)

Таблица 2 – Физико-механические характеристики упругого основания [8, 9]

Материал	$E_{гр}$ , ГПа	$\nu_{гр}$	$\rho_{гр}$ , кг/м <sup>3</sup>	$k_p$ , МПа/м
Песок	55	0,3	1600	5
Гравий	28	0,25	2600	100

После подстановки (4) в (3) из первого равенства (3) с учетом данных, приведенных в табл. 2, определим неизвестную пока величину  $H$  для того или иного типа грунта, а затем из второго и третьего соотношений (3) можно определить дополнительные (недостающие для расчета) характеристики  $t_p$ ,  $m_0$  этих грунтов.

Будем подбирать максимальные значения  $p_0$  в (7) так, чтобы за характерный период времени  $T > 0$ , в течение которого исследуется процесс колебаний, напряженное состояние в стержне не превышало некоторого предельного состояния. Через  $p_s$  обозначим  $\min p_0/b$ , при котором напряжение в стержне впервые достигает предела текучести  $\sigma_s$ ; через  $p_{ss}$  обозначим  $\min p_0/b$ , при котором впервые достигается вторичная пластичность; через  $p_{sss}$  обозначим  $\min p_0/b$ , при котором впервые достигается знакопеременная третичная пластичность; через  $p_b$  обозначим значение  $\min p_0/b$ , при котором впервые напряжения достигают предела прочности  $\sigma_b$  (начальное разрушение) до появления третичной пластичности.

В качестве характерного периода  $T$  выберем время, в течение которого нагрузка (7) уменьшается в 1000 раз ( $T = T_* = -\ln(0,001)/\alpha = 0,576 \text{ с}$ ). При  $t > T_*$  внешняя нагрузка ничтожно мала ( $p(t) < 0,001p_0$ ) и колебания можно считать установившимися.

В расчетах характерный период времени  $T$  будем разбивать на 1000 слоев ( $\tau = T_*/1000$ ), а по длине стержня введем 401 узел.

В табл. 3 приведены значения  $p_s$ ,  $p_b$  для стержней, нагруженных статически ( $p(x, t) = p_0$ ,

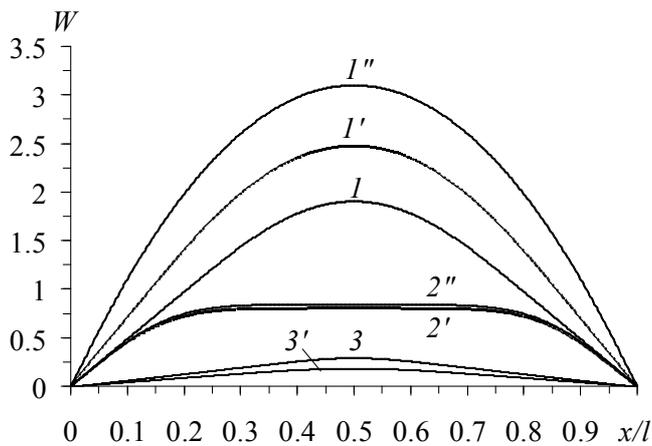


Рисунок 1 – Эпюры безразмерных прогибов

см. замечание), причем рассматриваются стержни постоянной ( $s = 1$ , см. (6)) или переменной ( $s = 0,55$ ) высоты. Как показано в [2], при  $s \approx 0,55$  и задании высоты стержня в виде (6) получаем рациональный, в смысле динамического поведения, шарнирно опертый стержень, не покоящийся на упругом основании. (В табл. 3–5 в числителях приведены результаты расчетов, полученных при использовании винклеровской модели основания ( $t_p = 0$ ,  $m_0 = 0$ ), а в знаменателях – двухпараметрической модели основания ( $t_p \neq 0$ ,  $m_0 \neq 0$ )).

Так как значения пределов текучести  $\sigma_s$  для обоих рассматриваемых материалов стержней близки (см. табл. 1), то значения  $p_s$  для них при  $k_p = 0$  также близки (различаются при-

мерно на 6 %, см. табл. 3). Однако при наличии упругого основания ( $k_p \neq 0$ ) различие значений  $p_s$ ,  $p_B$ , полученных для стержней из стали 45 и сплава Д16, становится существенным (эти значения могут различаться в разы, ср., например, значения  $p_s$  во втором столбце табл. 3 при  $k_p = 100$  МПа/м). Кроме того, если при  $k_p = 0$  значения  $p_s$ ,  $p_B$  для стержней с защемленными концами больше тех же величин для шарнирно опертых стержней (как постоянной, так и переменной высоты), то при наличии упругого основания картина может поменяться на противоположную (см., например, в табл. 3 строки, соответствующие  $k_p = 100$  МПа/м). Аналогично, рациональное профилирование стержня, полученное без учета работы упругого основания, может оказаться неэффективным при наличии такого основания (см. те же строки в табл. 3).

Таблица 3 – Предельные нагрузки при статическом деформировании балок

$k_p$ , МПа/м	Шарнирное опирание				Жесткая заделка	
	$h = \text{const}$ ( $s = 1$ )		$h \neq \text{const}$ ( $s = 0,55$ )		$h = \text{const}$ ( $s = 1$ )	
	$p_s$ , МПа	$p_B$ , МПа	$p_s$ , МПа	$p_B$ , МПа	$p_s$ , МПа	$p_B$ , МПа
Сталь 45						
0	1,200	2,648	1,748	3,830	1,828	4,725
5	1,287	11,645	1,833	10,378	1,850	5,618
	3,350	275,8	3,990	230,8	2,30	15,20
100	3,017	69,834	3,411	45,976	2,265	16,870
	3,044	73,840	3,437	50,840	2,270	16,920
Алюминиевый сплав Д16						
0	1,266	2,355	1,844	3,429	1,929	4,304
5	1,539	6,693	2,115	7,164	1,999	4,734
	8,270	167,9	8,810	142,0	3,190	10,40
100	7,445	48,531	6,551	31,024	3,227	10,999
	7,540	50,830	6,637	33,590	3,240	11,040

Сопоставление значений, приведенных в числителях и знаменателях в строках табл. 3, соответствующих  $k_p = 100$  МПа/м, показывает, что учет второго параметра  $t_p$  гравийного основания приводит к незначительному уточнению нагрузок  $p_s$ ,  $p_B$  (не более 10 %); для песчаного же основания ( $k_p = 5$  МПа/м) учет второго параметра  $t_p$  приводит к существенному (в разы и на порядки) увеличению расчетных значений  $p_s$ ,  $p_B$ , причем для шарнирно опертых стержней значения нагрузки  $p_B$  в этом случае уже сопоставимы с напряжениями  $\sigma_s$ ,  $\sigma_B$  материала стержня, т. е. в действительности такие стержни уже нельзя рассчитывать на основе теории Бернулли. Следовательно, для определенных типов упругих оснований (например, гравийных) с инженерной точки зрения вполне достаточно проводить расчет по винклеровской модели; для других же оснований (например, песчаных) модель Винклера оказывается недостаточной для проведения адекватных реальности расчетов, в этих случаях требуется использование более точных моделей упругого основания [3] (например, двухпараметрических).

Все эти обстоятельства объясняются особенностями деформирования стержней на упругом основании, которое качественно отличается от деформации таких же стержней, не контактирующих с упругим основанием. Так, на рис. 1 изображены эпюры безразмерных прогибов (формула безразмеривания приведена в [2]) стержней из стали 45 постоянной высоты ( $s = 1$ ) с учетом и без учета работы упругого основания при уровне нагрузок  $p_B$ . Кривые 1, 1', 1'', 2', 2'' соответствуют шарнирно

опертым стержням, а линии 3, 3' – заземленным; кривые 1, 3 получены при отсутствии упругого основания, линии 1', 1'' – при  $k_p = 5$  МПа/м, а кривые 2', 2'', 3' – при  $k_p = 100$  МПа/м. Линии 1', 2', 3' соответствуют винклеровскому основанию ( $t_p = 0$ ), кривые 1'', 2'' – двухпараметрическому основанию ( $t_p \neq 0$ ). Сравнение кривых на рис. 1 дает наглядное представление о качественно разном деформировании стержней при наличии и отсутствии упругого основания. Поведение кривых 1', 1'' указывает на то, что в шарнирно опертых стержнях, покоящихся на песчаном основании, производная  $w'(x)$  на большей части отрезка  $0 \leq x \leq l$  может иметь относительно большие по модулю значения, что вызывает значительные сдвиговые деформации в упругом основании, поэтому-то в случае песчаного грунта учет второго параметра основания  $t_p$  приводит к существенному уточнению решения по сравнению с винклеровской моделью. Кривые 2', 2'' различаются незначительно, причем для них на большей части отрезка  $0 \leq x \leq l$  имеет место  $|w'(x)| \approx 0$  (см. центральные горизонтальные участки линий 2', 2''), поэтому сдвиги в соответствующем гравийном основании здесь относительно малы и учет второго параметра  $t_p$  основания в этом случае несущественен (основное сопротивление оказывает упругий отпор грунта, определяемый коэффициентом постели  $k_p$ ), в силу чего для расчета влияния гравийного основания достаточно использовать винклеровскую модель. К аналогичному выводу приводит и поведение кривых 3, 3' на рис. 1.

В табл. 4, 5 приведены предельные значения интенсивности нагрузки  $p_s$ ,  $p_{ss}$ ,  $p_{sss}$ ,  $p_B$  для стержней из стали 45 и сплава Д16 соответственно при их динамическом деформировании (см. (7)).

Сравнение значений  $p_s$ , приведенных в этих таблицах, с соответствующими значениями в табл. 3, показывает: чтобы при упругом динамическом деформировании стержня достичь начального пластического состояния требуется начальная нагрузка в (7) примерно в два раза меньшая, чем при статическом нагружении. Если ввести понятие динамического коэффициента, то в упругом случае он будет равен примерно двум. Сопоставление же значений  $p_B$  в тех же таблицах, показывает, что при упругопластическом деформировании динамический коэффициент резко возрастает и может достичь значений 4–10 в зависимости от типа материала стержня и характеристик упругого основания.

Таблица 4 – Предельные нагрузки при динамическом деформировании стержней из стали 45

$k_p$ , МПа/м	$p_s$ , МПа	$p_{ss}$ , МПа	$p_{sss}$ , МПа	$p_B$ , МПа
Шарнирное опирание ( $h = \text{const}$ , $s = 1$ )				
0	0,620	0,890	1,180	2,033
5	0,666 / 1,757	0,943 / 2,209	1,285 / 2,730	2,545 / 27,45
100	1,529 / 1,517	1,982 / 1,971	2,483 / 2,49	17,032 / 17,041
Шарнирное опирание ( $h \neq \text{const}$ , $s = 0,55$ )				
0	0,932	2,449	—	2,643
5	0,981 / 2,19	1,620 / 2,88	2,448 / 3,97	2,985 / 23,01
100	1,777 / 1,798	2,466 / 2,489	4,140 / 4,140	6,951 / 7,936
Жесткая заделка ( $h = \text{const}$ , $s = 1$ )				
0	0,957	1,326	1,709	2,654
5	1,001 / 1,299	1,328 / 1,705	1,808 / 2,197	2,846 / 4,891
100	1,293 / 1,296	1,668 / 1,689	2,085 / 2,186	2,975 / 3,845

Таблица 5 – Предельные нагрузки при динамическом деформировании стержней из сплава Д16

$k_p$ , МПа/м	$p_s$ , МПа	$p_{ss}$ , МПа	$p_{sss}$ , МПа	$p_B$ , МПа
Шарнирное опирание ( $h = \text{const}$ , $s = 1$ )				
0	0,658	0,950	1,296	2,089
5	0,806 / 4,045	1,106 / 4,965	1,455 / 6,265	4,00 / 14,37
100	3,290 / 3,350	4,065 / 4,140	4,950 / 5,205	13,00 / 15,18
Шарнирное опирание ( $h \neq \text{const}$ , $s = 0,55$ )				
0	0,984	1,708	—	2,692
5	1,132 / 4,290	1,721 / 5,320	2,998 / 7,245	6,199 / 15,00
100	3,598 / 3,628	4,729 / 4,820	6,881 / 6,950	10,55 / 10,24
Жесткая заделка ( $h = \text{const}$ , $s = 1$ )				
0	1,008	1,391	—	1,921
5	1,091 / 1,931	1,431 / 2,489	1,960 / 3,219	1,981 / 6,838
100	1,715 / 1,808	2,433 / 2,403	3,288 / 3,238	4,877 / 4,895

Сравнение значений  $p_s$ ,  $p_{ss}$ ,  $p_{sss}$ ,  $p_B$ , приведенных в табл. 4, 5, для шарнирно опертых стержней при  $k_p = 0$  и  $s = 1$  показывает, что соответствующие значения для стержней из двух рассматриваемых материалов близки. Однако при наличии упругого основания картина резко меняется. Так, для тех же стержней при  $k_p = 100$  МПа/м предельные значения  $p_s$ ,  $p_{ss}$ ,  $p_{sss}$  для стержня из сплава Д16 примерно вдвое больше, чем для стержня из стали 45, а значение  $p_B$ , наоборот, меньше.

Согласно [2], рациональное значение  $s = 0,55$  в (6) для профилированных стержней было получено без учета работы упругого основания. Если таким образом профилированные стержни контактируют с упругим основанием, то эффективность их работы может резко снизиться. Так, из табл. 4 видно, что для случая  $s = 0,55$  значения  $p_B$ , полученные при  $k_p \neq 0$ , оказались существенно меньше аналогичных величин, рассчитанных для случая шарнирного опирания при  $s = 1$ . Следовательно, и при динамическом нагружении стержни, рационально спроектированные без учета работы упругого основания, могут оказаться малоэффективными при наличии такого основания.

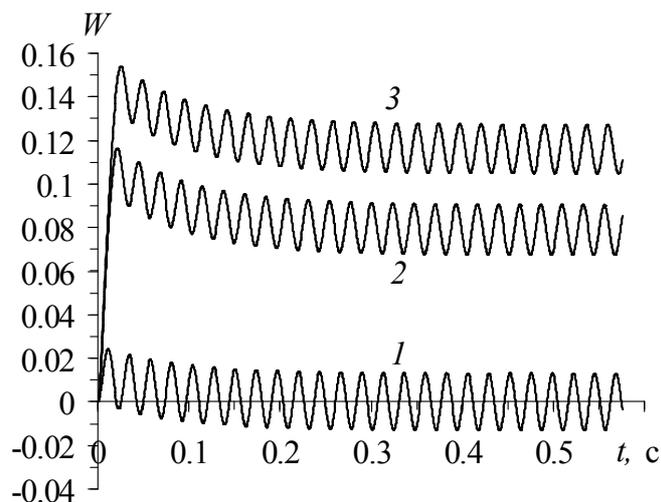


Рисунок 2 – Колебания центральных сечений балок без учета упругого основания

При уровнях нагрузок  $p_{ss}$  и  $p_{sss}$  максимальные по модулю деформации  $\varepsilon$  в стержнях примерно вдвое превышают значения соответствующих предельных упругих деформаций  $\varepsilon_s = \sigma_s / E$ , а при уровнях нагрузок  $p_B$  отношение  $\max|\varepsilon|/\varepsilon_s$  составляет 21,94 для стержней из сплава Д16 и 112,6 для стержней из стали 45, что дает определенное представление о степени развития пластических деформаций в рассматриваемых стержнях при их динамическом поведении.

Сопоставление значений, приведенных в знаменателях и числителях табл. 4, 5, показывает, что, как и в табл. 3, учет второго параметра  $t_p$  при моделировании работы песчаного основания дает существенные поправки при определении предельных динамических значений

нагрузок  $p_s$ ,  $p_{ss}$ ,  $p_{sss}$ ,  $p_B$  по сравнению со случаем модели Винклера; в случае же гравийного основания эти поправки, как правило, незначительны.

Помимо количественного наблюдается и качественное различие динамического поведения стержней на упругом винклеровском и двухпараметрическом основаниях. Так, на рис. 2, 3 изображены кривые, характеризующие движение (прогиб безразмерен, см. [2]) во времени центральных сечений ( $x = l/2$ ) профилированных стержней ( $s = 0,55$ ) из стали 45 без учета работы упругого основания (рис. 2) и при наличии упругого основания с разными характеристиками (рис. 3).

На рис. 2 кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям  $p_s, p_{ss}, p_B$  (см. табл. 4). Поведение кривой 1 указывает на то, что после снижения динамической нагрузки начальной интенсивности  $bp_s$  до значений  $p(t) < 0,01bp_s$  стержень колеблется в окрестности нулевого (начального) положения, а линии 2, 3 свидетельствуют о колебаниях в окрестности новых положений (отличных от нулевого), характеризующих накопленными остаточными прогибами.

На рис. 3, а кривые получены для случая винклеровского основания ( $t_p = 0$ ) с характеристиками  $k_p = 100$  МПа/м (линии 1, 2) и  $k_p = 5$  МПа/м (кривая 3), причем линия 1 рассчитана при уровне динамической нагрузки  $p_s$ , а кривые 2, 3 – при  $p_{sss}$  (см. табл. 4). Согласно поведению кривой 1 на этом рисунке, после снижения динамической нагрузки начальной интенсивности  $bp_s$  до значений  $p(t) < 0,01bp_s$  стержень вновь колеблется в окрестности нулевого положения, а поведение линий 2, 3 указывает на наличие остаточных прогибов, которые, как и следовало ожидать, в случае  $k_p = 5$  МПа/м (кривая 3) больше, чем при  $k_p = 100$  МПа/м (линия 2), что обусловлено меньшим значением коэффициента постели, т. е. меньшей жесткостью основания.

Частота колебаний стержней, соответствующих кривым 1, 2 на рис. 3, а, больше, чем в случаях, соответствующих линиям на рис. 2, что также обусловлено большей жесткостью системы стержень – основание (рис. 3, а) по сравнению с системой, состоящей только из стержня (рис. 2). Однако в рамках винклеровской модели не учитывается не только сопротивление основания сдвигу ( $t_p = 0$ ), но и его инерционные свойства ( $m_0 = 0$ ), поэтому-то расчет на базе этой модели может оказаться неадекватным и количественно, и качественно. Действительно, на рис. 3, б приведены результаты расчетов динамического поведения того же стержня на двухпараметрическом песчаном основании ( $k_p = 5$  МПа/м,  $t_p \neq 0$ ,  $m_0 \neq 0$ ). Кривые 1, 2, 3 на этом рисунке рассчитаны при интенсивностях нагрузки  $p_s, p_{ss}, p_{sss}$  соответственно (см. табл. 4). Сравнение кривых 3 на рис. 3а, б, построенных при одних и тех же условиях, но при использовании разных моделей основания, показывает, что, по

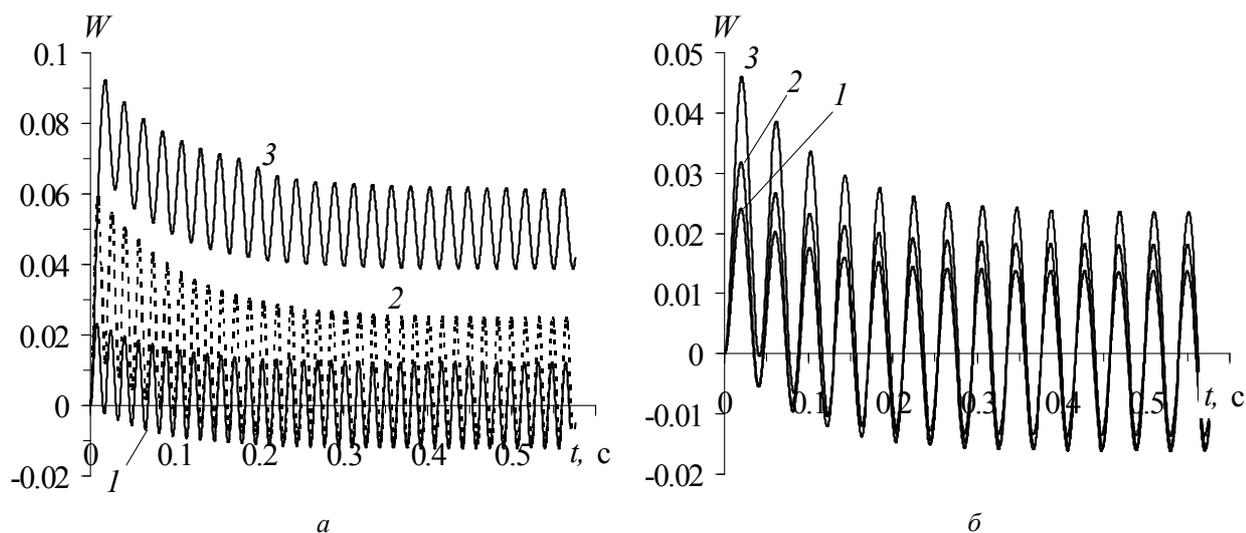


Рисунок 3 – Колебания центральных сечений балок на упругом основании

крайней мере для песчаного грунта, использование уточненной модели поведения упругого основания (рис. 3б) приводит к существенному уменьшению величины остаточных прогибов, увеличению

амплитуды колебаний и снижению частоты колебаний, которая, в отличие от рис. 3, а, меньше, чем при колебаниях стержня без упругого основания (рис. 2).

Таким образом, проведенные расчеты показывают, что недопустимо переносить результаты исследований о статическом и динамическом поведении стержней, полученные без учета работы упругого основания, на аналогичное поведение стержней, контактирующих с упругим основанием. Для некоторых типов упругих оснований (например, песчаных) использование винклеровской модели приводит к результатам, существенно отличающимся от полученных на базе более точной двухпараметрической модели основания. Для определенных типов грунтов (например, гравийных) использование винклеровской модели может быть вполне приемлемым. Кроме того, специфику поведения стержней при их упругом деформировании нельзя распространять и на их поведение при упругопластическом изгибе, особенно в состояниях, близких к предразрушению.

• Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11-01-00121-а).

### Литература

1. Немировский, Ю.В. Эффективный метод расчета поперечно изгибаемых балок при динамических нагрузках и сейсмических колебаниях / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Известия вузов. Строительство. – 2007. – № 1. – С. 21–32.
2. Немировский, Ю.В. Интегрирование задачи динамического упругопластического изгиба армированных стержней переменного поперечного сечения обобщенными методами Рунге – Кутты / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Вычислительные технологии. – 2004. – Т. 9, № 4. – С. 77–95.
3. Власов, В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: Физматгиз, 1960. – 492 с.
4. Немировский, Ю.В. Обобщение методов Рунге – Кутты и их применение к интегрированию начально-краевых задач математической физики / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2005. – Т. 8, № 1. – С. 57–76.
5. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
6. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
7. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 516 с.
8. Грунтоведение / Трофимов В.Т., Королев В.А., Вознесенский Е.А., Голодковская Г.А., Васильчук Ю.К., Зиангиров Р.С. Под ред. В.Т. Трофимова. – М.: Изд-во МГУ, 2005. – 1024 с.
9. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно-теоретический. В 2-х кн. Кн. 1./Под ред. А.А.Уманского. – М.: Стройиздат, 1972. – 600с.

### Summary

*The problem of elasto-plastic dynamic bending rods on an elastic two-parameter basis is formulated. The method of numerical integration of the problem, based on a generalization of the Runge – Kutta method, is designed. The efficiency of the proposed numerical procedure is demonstrated by the calculations of inelastic dynamics of the isotropic bars with uniform and variable cross section. The analysis of the received results is made.*

Поступила в редакцию 12.11.2012