

ГРАНИЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ

Мармыш Д.Е.

УО «Белорусский государственный университет», Минск

Введение. Численно-аналитический метод граничных элементов (МГЭ) является эффективным методом решения задач теории упругости. При граничноэлементном моделировании размерность задачи уменьшается на единицу, что позволяет уменьшить порядок системы разрешающих алгебраических уравнений и повысить точность. Кроме того, предварительное аналитическое вычисление интегралов от фундаментальных решений для распределенных по граничному элементу усилий, позволяет провести распараллеливание вычислений.

Эффективность численно-аналитического варианта МГЭ особенно хорошо отражается при получении компонент напряженно-деформированного состояния в области приложения нагрузки.

Постановка задачи. Рассмотрим балку длиной $3a$ и высотой h , жестко закрепленную по обоим концам (см. рис.1). По верхней границе балки на отрезке $x \in [a, 2a]$ действует равномерно распределенная нормальная нагрузка p_0 .

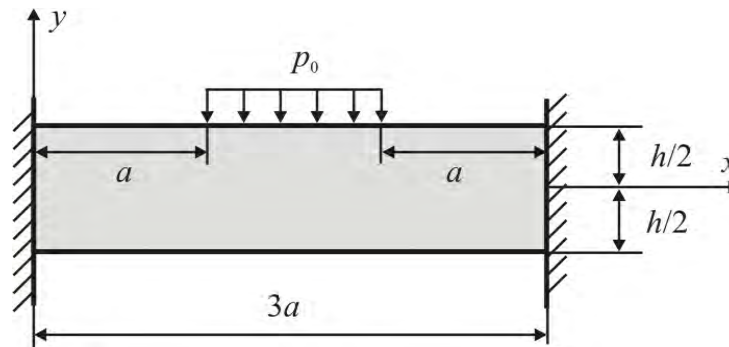


Рисунок 1 – Закрепленная жестко по обоим концам балка

Поставленной задаче соответствуют следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
 y_y \Big|_{y=\frac{h}{2}} &= \begin{cases} -p_0, & x \in [a, 2a], \\ 0, & x \notin [a, 2a], \end{cases} \\
 u_x \Big|_{x=0} &= u_y \Big|_{x=3a} = 0, \\
 u_x \Big|_{x=0} &= u_y \Big|_{x=3a} = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Аналитический расчет. Балка, показанная на рис. 1, может быть рассчитана известными методами теории упругости [1]. На рис. 2 представлена эпюра изгибающих моментов.

Уравнение линий, определяющих величину момента на верхней границе балки на каждом из трех участков, определяется следующим образом:

$$M(x) = \begin{cases} \frac{pa}{36}(18x - 13a), & 0 \leq x \leq a, \\ -\frac{P}{36}(18x^2 - 54ax + 31a^2), & a < x \leq 2a, \\ \frac{pa}{36}(41a - 18x), & 2a < x \leq 3a. \end{cases} \tag{2}$$

Учитывая, что в каждом сечении балки при изгибе нормальное напряжение $y_x(y)$ изменяется линейно, то, принимая единичной толщину балки при определении момента сопротивления сечения балки, в фиксированном сечении нормальное напряжение $y_x(y)$ определяется по формуле

$$y_x(y) = \frac{2M(x)}{h}y \quad (3)$$

Подставляя в (3) выражения (2), получим формулы для определения нормального напряжения y_x в каждой точке балки

$$y_x(x, y) = \begin{cases} \frac{pa}{18h}(18x - 13a)y, & 0 \leq x \leq a, \\ -\frac{p}{18h}(18x^2 - 54ax + 31a^2)y, & a < x \leq 2a, \\ \frac{pa}{18h}(41a - 18x)y, & 2a < x \leq 3a. \end{cases} \quad (4)$$

На рис. 3 представлена картина распределения знакопеременных нормальных напряжения y_x , построенная по формулам (4).

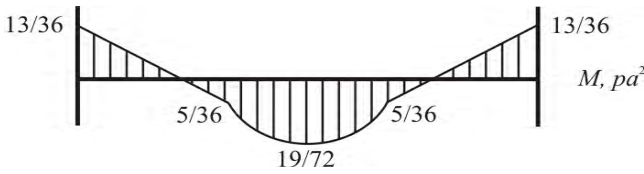


Рисунок 2 – Эпюра изгибающих моментов

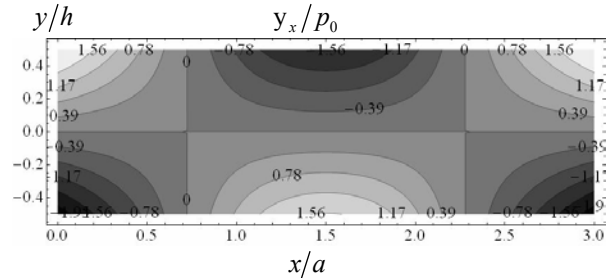


Рисунок 3 – Картина распределения напряжения y_x

Граничноэлементное моделирование. Процедура получения фундаментальных решений для распределенной нагрузки представлена в работе [2]. Для решений задачи (1) воспользуемся фундаментальным решением задачи Кельвина для плоскости в перемещениях и напряжениях [3] в случае действия сосредоточенных нормальной и касательной к некоторой линии в плоскости сил в перемещениях и напряжениях:

$$\begin{aligned} u_1^{(n)} &= p_n G_1^{(n,u)} = -\frac{p_n x_2}{2\mu} \Theta_1^K, \\ u_2^{(n)} &= p_n G_2^{(n,u)} = \frac{p_n}{2\mu} \left[(3 - 4\nu) \Theta_3^K - x_2 \Theta_2^K \right], \\ u_1^{(\tau)} &= p_\tau G_1^{(\tau,u)} = \frac{p_\tau}{2\mu} \left[(3 - 4\nu) \Theta_3^K + x_2 \Theta_2^K \right], \\ u_2^{(\tau)} &= p_\tau G_2^{(\tau,u)} = -\frac{p_\tau x_2}{2\mu} \Theta_1^K, \\ \sigma_{11}^{(q)} &= p_q G_{ij}^{(q,\sigma)} = p_q \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial G_1^{(q,u)}}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial G_2^{(q,u)}}{\partial x_2} \right], \\ \sigma_{22}^{(q)} &= p_q G_{ij}^{(q,\sigma)} = p_q \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial G_2^{(q,u)}}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial G_1^{(q,u)}}{\partial x_1} \right], \\ \sigma_{12}^{(q)} &= p_q G_{ij}^{(q,\sigma)} = p_q \mu \left(\frac{\partial G_1^{(q,u)}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_2^{(q,u)}}{\partial x_1} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $q = n, \phi$, $G_{ij}^{(n,\sigma)}$, $G_{ij}^{(\tau,\sigma)}$, $G_i^{(n,u)}$, $G_i^{(\tau,u)}$ – функции влияния и

$$\begin{aligned}\Theta_1^K &= \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[a_x \ln(a_x^2 + x_2^2) - b_x \ln(b_x^2 + x_2^2) \right], \\ \Theta_2^K &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[\text{arctg}(b_x, x_2) - \text{arctg}(a_x, x_2) \right], \\ \Theta_3^K &= \Theta_1^K + \frac{x_2}{2} \Theta_2^K,\end{aligned}\tag{6}$$

где $a_x = x_1 - a$, $b_x = x_1 + a$.

Суперпозиция решений (5) с учетом (6) позволяет решать задачу для любого распределения усилий в пространстве. Условие нулевых напряжений на бесконечности выполняются автоматически, поскольку они выполняются для решений о действии сосредоточенной силы.

При граничноэлементном моделировании балки воспользуемся методологией и подходами, изложенными в [4,5].

Пусть $O^{lk} x_1^{lk} x_2^{lk}$ и $O^{ly} x_1^{ly} x_2^{ly}$ локальные системы координат связанные с граничными элементами κ и γ l -го тела и $a_{ij}^{ly\kappa} = \cos(x_i^{ly} x_j^{lk})$. Перемещения и напряжения в центре элемента γ O^{ly} в координатах x^{lk} , связанных с элементом κ будут следующими:

$$\begin{aligned}u_i^{lk} [O^{ly}(x^{lk})] &= p_n^{lk} G_i^{(n,u)} [O^{ly}(x^{lk})] + p_\tau^{lk} G_i^{(\tau,u)} [O^{ly}(x^{lk})], \\ \sigma_{ij}^{lk} [O^{ly}(x^{lk})] &= p_n^{lk} G_{ij}^{(n,\sigma)} [O^{ly}(x^{lk})] + p_\tau^{lk} G_{ij}^{(\tau,\sigma)} [O^{ly}(x^{lk})],\end{aligned}\tag{7}$$

где $l = 1, 2, 3$, $i = 1, 2$, N^l – количество граничных элементов.

Тогда граничные условия (1) для центра элемента γ в своих координатах x^{ly} с учетом (7) примут вид

$$u_i^{ly} [O^{ly}(x^{ly})] = u_i^{ly} [0] = \sum_{\kappa=1}^{N^l} \sum_{j=1}^2 a_{ij}^{ly\kappa} u_j^{lk} [O^{ly}(x^{lk})] = 0,\tag{8}$$

$$\sigma_{i2}^{ly} [O^{ly}(x^{ly})] = \sigma_{i2}^{ly} [0] = \sum_{\kappa=1}^{N^l} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 a_{i\alpha}^{ly\kappa} a_{2\beta}^{ly\kappa} \sigma_{\alpha\beta}^{lk} [O^{ly}(x^{lk})] = p_{i2}^{ly},$$

где $\gamma = 1, N^l$; $i, \alpha, \beta = 1, 2$, $p_{22}^{ly} = p_n^{ly}$, $p_{12}^{ly} = p_\tau^{ly}$, N_1^l – количество граничных элементов вне областей контактного взаимодействия.

Решение системы (8) относительно неизвестных $p_n^{lk} = p_{22}^{lk}$, $p_\tau^{lk} = p_{12}^{lk}$ позволяет определить контактные граничные условия и граничные условия в напряжениях, соответствующие условиям в перемещениях.

Пусть $Ox_1 x_2$ глобальная система координат и $a_{ij}^\kappa = \cos(x_i x_j^\kappa)$. Тогда перемещения и напряжения в некоторой точке глобальной системы координат $M(x^\kappa)$ в соответствии с (8) будут следующими:

$$\begin{aligned}u_i^l [M(x)] &= \sum_{\kappa=1}^{N^l} a_{ij}^\kappa \left\{ p_n^{lk} G_j^{(n,u)} [M(x^{lk})] + p_\tau^{lk} G_j^{(\tau,u)} [M(x^{lk})] \right\}, \\ \sigma_{ij}^l [M(x)] &= \sum_{\kappa=1}^{N^l} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 a_{i\alpha}^\kappa a_{j\beta}^\kappa \left\{ p_n^{lk} G_{\alpha\beta}^{(n,\sigma)} [M(x^{lk})] + p_\tau^{lk} G_{\alpha\beta}^{(\tau,\sigma)} [M(x^{lk})] \right\}.\end{aligned}$$

На рис. 4 и 5 показаны картины распределения полей напряжений и перемещений возникающих в балке (E – модуль упругости).

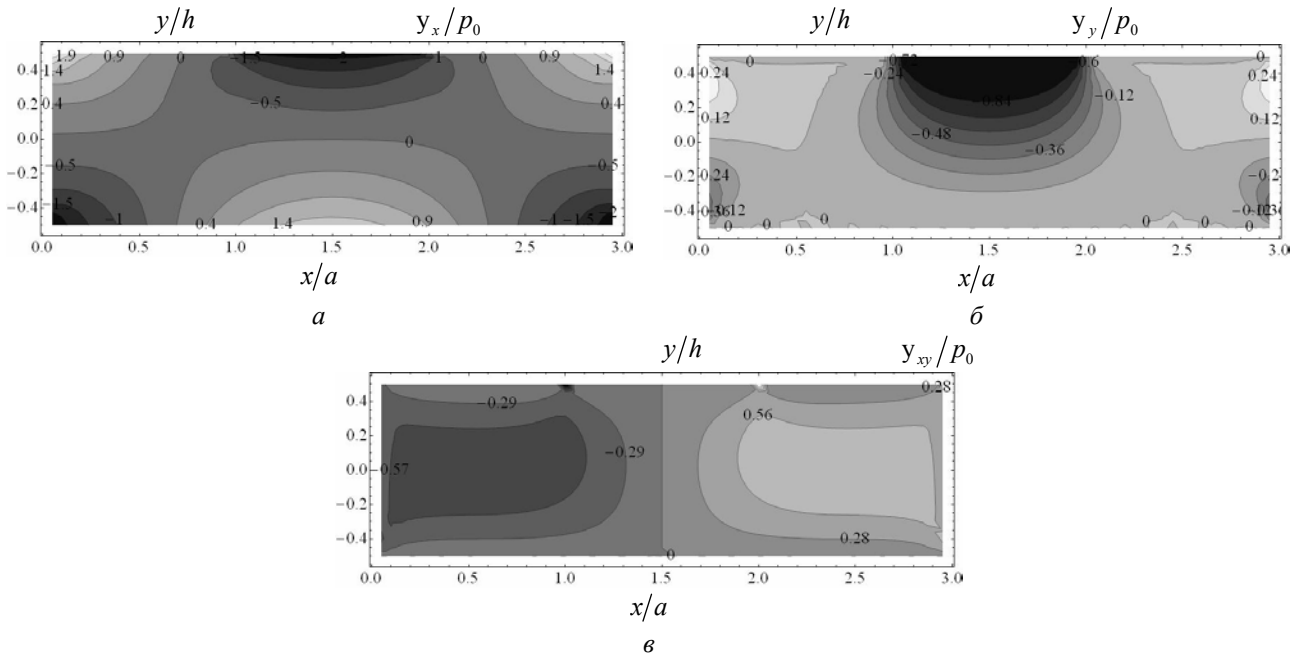


Рисунок 4 – Картины распределения нормальных напряжений а) y_x и б) y_y касательного напряжения y_{xy}

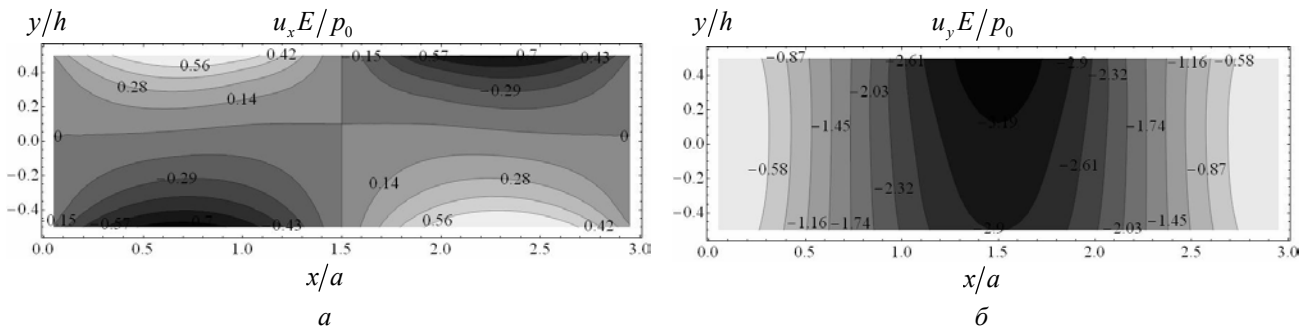


Рисунок 5 – Картины распределения перемещений а) u_x и б) u_y

Проведем сравнение распределений напряжений, полученных обоими методами. На рис. 6 показаны распределения нормальных напряжений y_x , полученных при граничноэлементном моделировании (штриховая линия) и аналитически (сплошная линия).

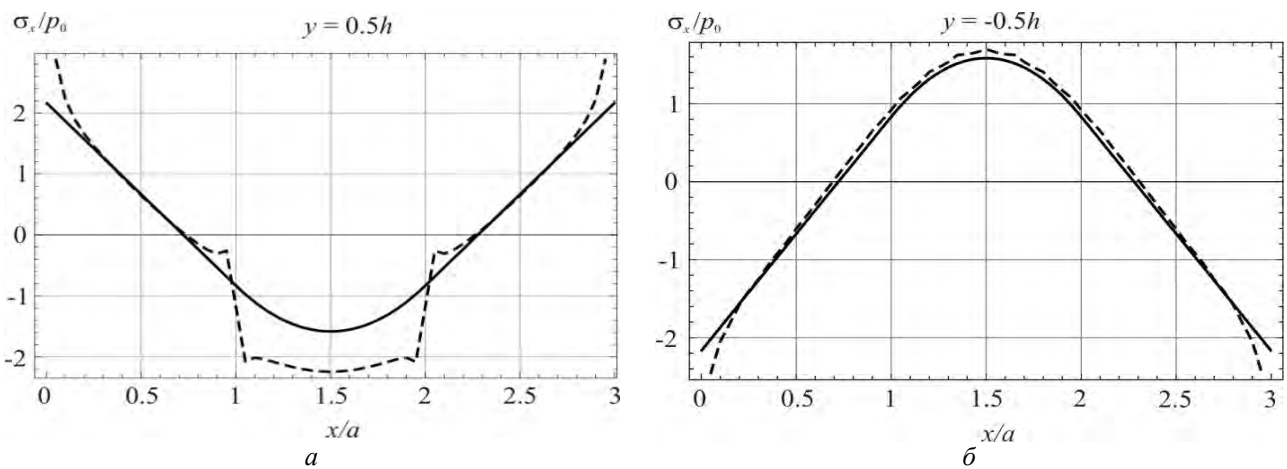


Рисунок 6 – Сравнение нормального напряжения y_x на а) верхней границе бруса и б) нижней.

На рис. 6а видно расхождение результатов в области приложения нагрузки и на концах, где балка жестко закреплена. Данный эффект обусловлен неточностью аналитического решения в окрестности приложения граничных, обусловленной особенностями теории плоского изгиба балки. Анализ рис. 6б показывает хорошее соответствие результатов граничноэлементного моделирования аналитическому решению на нижней поверхности балки, находящейся на удалении от приложенной нагрузки.

Таким образом, полученное методом аналитических граничных элементов решение позволяет проводить более детальный анализ влияния нагрузки на напряженное состояние балки в окрестности ее приложения, а не только на некотором удалении.

Резюме

Проведено исследование напряженно-деформированного состояния балки жестко закрепленной по обоим концам. Решения построены на основе методов сопротивления материалов и с помощью численно-аналитического метода граничных элементов. Проведено сравнение полученных решений. Описаны особенности распределения полей напряжений в балке при аналитическом и численном моделировании.

Литература

1. Горшков, А.Г. Сопротивление материалов: учеб. пос. / А.Г. Горшков, В.Н. Трошин, В.И. Шалашилин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.
2. Мармыш, Д.Е. Моделирование напряжений в полуплоскости при действии распределенной нагрузки методом граничных элементов. Теоретическая и прикладная механика: междунар. научно-техн. сборник. Вып. 27. Мн.: БНТУ, 2012. – 374 с. С. 285 – 289.
3. Журавков, М.А. Фундаментальные решения теории упругости и некоторые их применения в геомеханике, механике грунтов и оснований: курс лекций / М.А. Журавков. – Минск: БГУ, 2008. – 247 с.
4. Щербаков, С.С. Напряженно-деформируемое состояние трибофатической системы прижим-нож-опора режущего инструмента комбайна с учетом контактного взаимодействия / С.С. Щербаков, А.В. Круподеров, Д.Е. Мармыш // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць / ред. кол.: А.П. Дзюба (відп. ред.) та ін. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вип. 13. – С. 438–443.
5. Бенерджи, П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.

Summary

The investigation of the stress-strain state of the beam rigidly fixed at both ends. Solutions are based on the strength of materials and methods of using the numerical-analytic method of boundary elements. A comparison of the solutions obtained. The features of the field distribution of stresses in the beam at the analytical and numerical simulation.

Поступила в редакцию 28.11.2012