УДК 539.3

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ НАГРУЖЕНИИ.

Мелешко И.Н., Пронкевич С.А.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Введение. В данной работе рассматривается задача потери устойчивости неравномерно нагруженной круглой пластины. Как известно, при нагружении пластины сжимающими усилиями в ее срединной плоскости, при критическом значении этих усилий, исходная прямолинейная форма поверхности пластины перестает быть единственно возможной. [1]. Задача устойчивости круглой пластины, сжатой равномерными силами, приложенными по контуру, была рассмотрена многими авторами [2, 3] и имеет аналитическое решение. Для задачи о потере устойчивости круглой пластины при неравномерных граничных условиях, аналитическое решение найти весьма затруднительно и решений данной задачи известно гораздо меньше, хотя она также представляет определенный практический интерес в машиностроении, приборостроении и т.д.

Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластину, срединная плоскость которой лежит в плоскости $0xy$ (рис. 1.). Задача устойчивости пластины основывается на решении дифференциального уравнения:

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{q}{D}, \tag{1}$$

где w – прогиб, q – внешняя нагрузка, $D = \dfrac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$ – цилиндрическая жесткость пластины, h – толщина пластинки.

Под поперечной нагрузкой q здесь понимается распределенная нагрузка в срединной плоскости пластины: $q = N_x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

С учетом следующих возможных граничных условий:

1. Край свободно оперт:

$$w = 0,\ M_x = 0 \ \text{(или } M_y = 0\text{)}, \tag{2a}$$

где M_x, M_y – изгибающие моменты.

2. Край жестко заделан

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \ \text{(или } \frac{\partial w}{\partial x} = 0\text{)} \tag{2b}$$

3. Край свободен

$$M_x = 0 \ \text{(или } M_y = 0\text{)} \qquad V_x = 0 \ \text{(или } V_y = 0\text{)}, \tag{2c}$$

V_x, V_y – перерезывающие усилия.

Для круглой пластины целесообразней перейти к полярным координатам r, φ: $r^2 = x^2+y^2$, $\varphi = \mathrm{arctg}\,(y/x)$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi}\right) = \frac{q}{D} \tag{3}$$

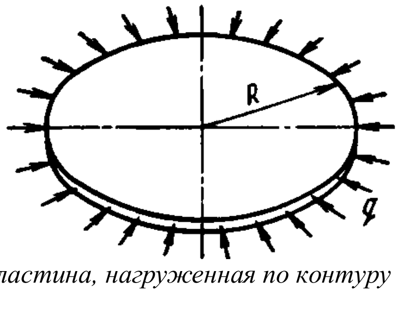


Рисунок 1 – Круглая пластина, нагруженная по контуру постоянной нагрузкой.

Уравнение (3) легко интегрируется при постоянных сжимающих усилиях q [4] и решение выражается в функциях Бесселя:

а) при осесимметричной форме потери устойчивости:

$$w_0(r) = C_1 J_0(kr) + C_2 Y_0(kr) + C_3 \ln kr + C_4 \quad (n = 0)$$

б) при неосесимметричной форме потери устойчивости:

$$w_n(r) = C_1 J_n(kr) + C_2 Y_n(kr) + C_3 r^{-n} + C_4 r^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где J_n и Y_n – функции Бесселя первого и второго порядка соответственно, C_i – постоянные интегрирования, зависящие от граничных условий.

На рис. 2 представлены осесимметричные (первая и четвертая) формы потери устойчивости круглой пластины.

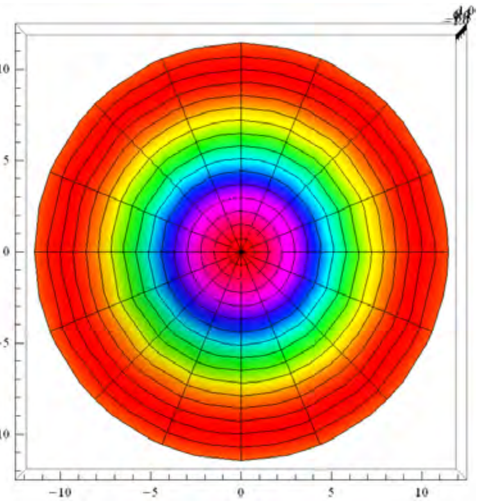


Рисунок 2 – Первая и четвертая формы потери устойчивости равномерно сжатой круглой пластины, полученные по аналитическим формулам.

При численном моделировании данной задачи в системе ANSYS появляются формы потери устойчивости, имеющие практически одинаковую критическую нагрузку (различие составляет менее 1%) и форму выпучивания, различающиеся лишь углом поворота (приблизительно $\frac{\pi}{n}$, n – число волн по окружности). В связи с этим номер формы потери устойчивости при аналитическом расчете не соответствует номеру формы потери устойчивости при численном расчете в системе ANSYS. (рис. 3)

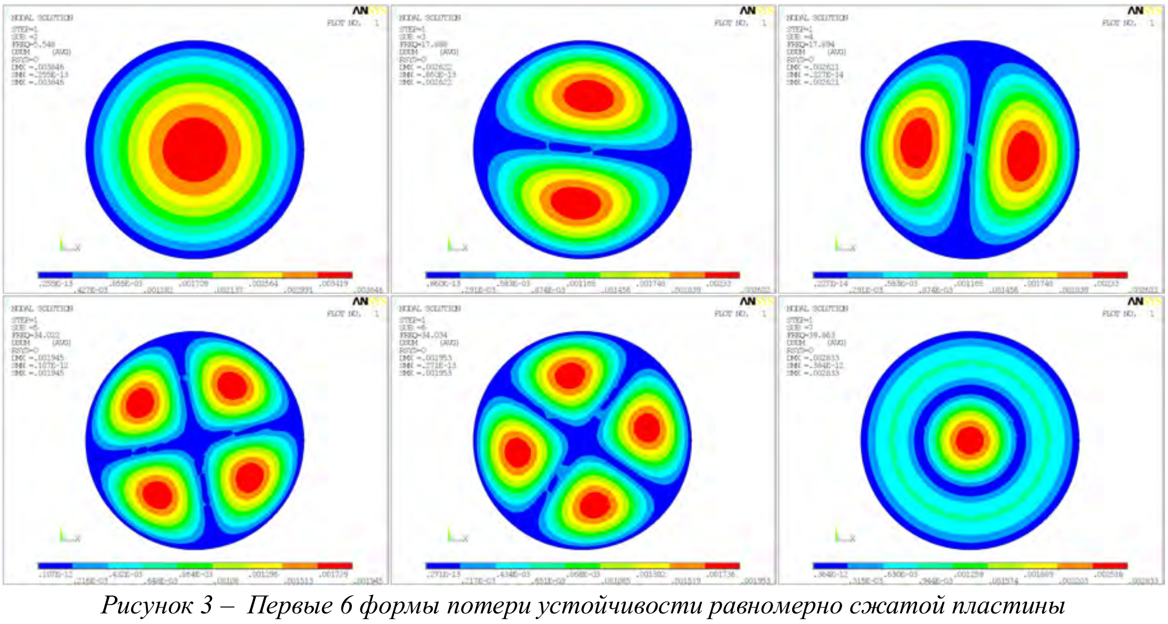


Рисунок 3 – Первые 6 формы потери устойчивости равномерно сжатой пластины

1. Рассмотрим неравномерность граничных условий в случае переменного сжатия.

Рассмотрим круглую изотропную пластину, нагруженную по контуру сжимающей силой, заданной по синусоидальному закону:

$$p = p_0 \sin 2\varphi$$

где p_0 – множитель

Пластина шарнирно оперта по контуру.

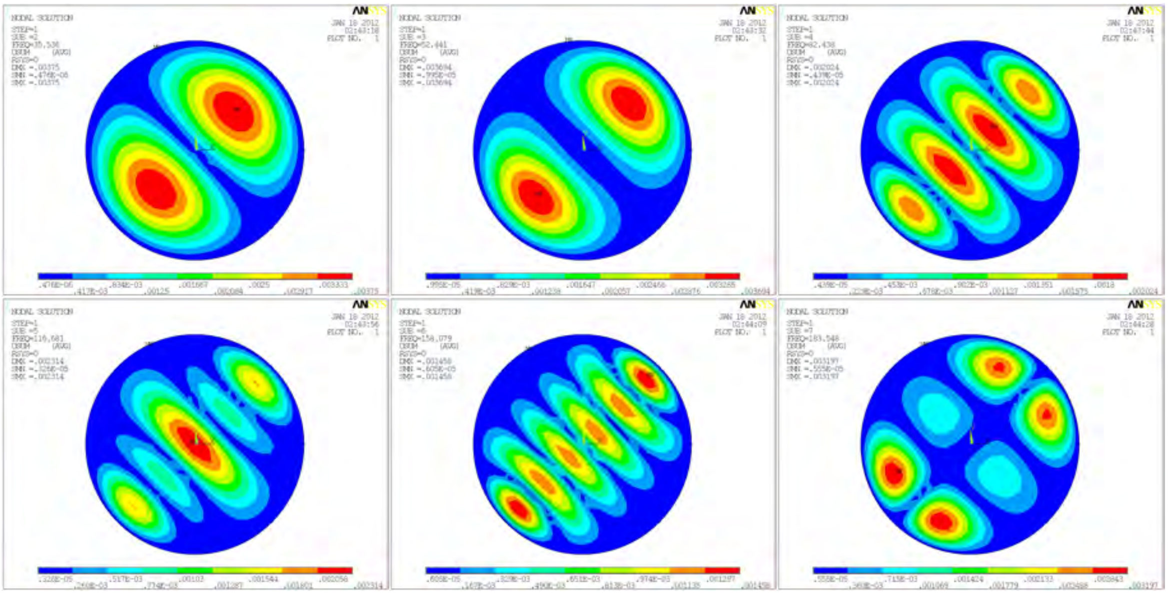


Рисунок 4 – Формы потери устойчивости пластины, сжимаемой силами, изменяющимися по закону $p = p_0 \sin 2\varphi$.

Сравнение результатов равномерно сжатой пластины и сжатой по закону синуса показывает существенное влияние характера нагрузки на формы потери устойчивости. Неравномерность нагружения ведет к усложнению собственных форм и спектра для высших гармоник.

Кроме того, формы потери устойчивости круглой пластины, нагруженной по синусоидальному закону подобны формам потери устойчивости прямоугольной пластины:

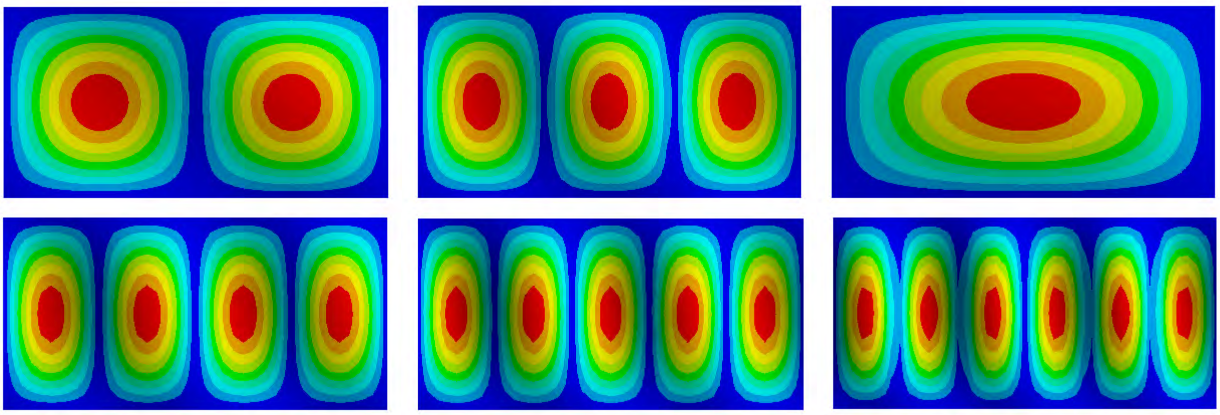


Рисунок 5 – Первые шесть форм потери устойчивости прямоугольной пластины, сжатой по торцевым сторонам

2. Рассмотрим задачу потери устойчивости круглой пластины, со смешанными граничными условиями:

Пластина нагружается силой $q(\varphi)=\mathrm{const}$, на участке $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, и жестко защемлена при $\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3\pi}{2}$

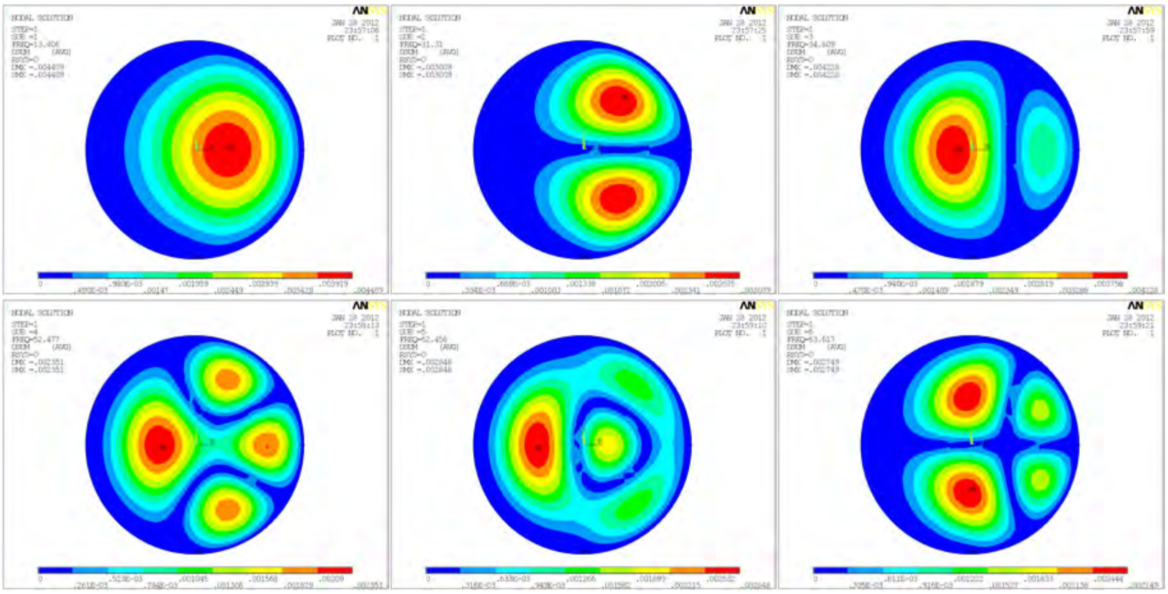
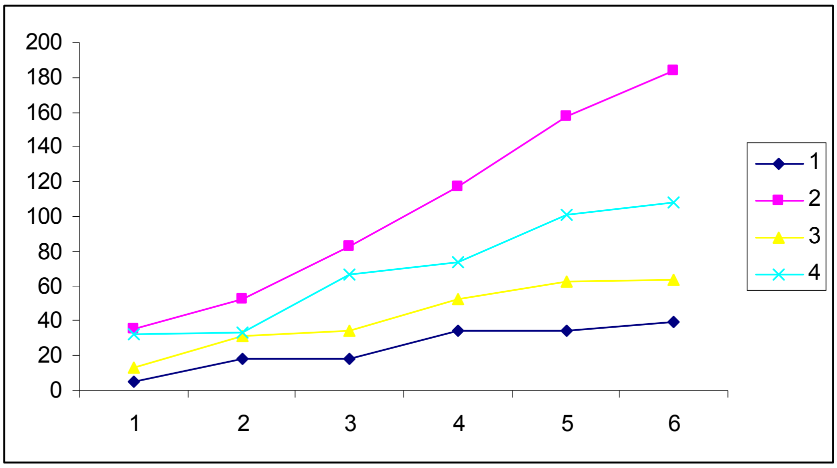


Рисунок 6 – Формы потери устойчивости при закреплении половины пластины

Спектр собственных частот выпучивания в данном случае подобен случаю равномерного сжатия, но нерегулярным образом. При увеличении неравномерности нагружения и закрепления увеличивается отличие формы потери устойчивости от симметричного случая.

В рис.7 представлено изменение критических нагрузок для рассмотренных выше примеров.



1 – равномерно сжимаемая круглая пластина, 2 - круглая пластина, сжимаемая неравномерной нагрузкой, распределенной по закону синуса, 3 - круглая пластина с неравномерными граничными условиями, 4 – прямоугольная пластина, сжатая с двух противоположных сторон

Рисунок 7 – Изменение критических нагрузок для рассмотренных выше задач

Выводы. При расчете критических нагрузок в системе ANSYS происходит дублирование форм потери устойчивости и критических нагрузок, обусловленное, по всей видимости, неравномерностью сетки конечно – элементной модели.

При неравномерных граничных условиях происходит трансформация соответствующих форм потери устойчивости для случая равномерного осесимметричного сжатия.

Резюме

В данной работе рассматривается задача потери устойчивости неравномерно нагруженной круглой пластины. Для задачи о потере устойчивости круглой пластины при неравномерных граничных условиях, аналитическое решение найти весьма затруднительно и решений данной задачи известно гораздо меньше. В статье получено численное решение задачи потери устойчивости круглой пластины для неравномерных граничных условиях.

Литература

1. Авдонин. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. М. «Машиностроение», 1969
2. Расчеты на прочность в машиностроении. Т 3, под ред. С.Д. Пономарева. Москва МАШГИЗ 1956-59г.
3. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М. «Наука», 1967, 984 с.
4. Алфутов. Основы расчета на устойчивость. М. «Машиностроение», 1978, 312 с.
5. K. Kumarci, P.K. Dehkordi and I. Mahmodi, 2010. Calculation of Plate Natural Frequency by Genetic Programming. Journal of Applied Sciences, 10: 451-461.

Summery

In this paper, the problem of instability unevenly loaded circular plate. For the problem of loss of stability of a circular plate with non-uniform boundary conditions, the analytical solution is very difficult to find a solution to this problem, and much less is known. In this paper a numerical solution to the problem of instability for nonuniform circular plate boundary conditions.

Поступила в редакцию 09.10.2012