УДК 539.19

РОТАЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ УПРУГОПОЛЗУЧЕГО МАТЕРИАЛА

[1]Лемза А.О., [2]Мурашкин Е.В.

[1]Дальневосточный федеральный университет, Владивосток
[2]Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток

Прямолинейные и вискозиметрические течения в теории вязкопластичности рассматривались достаточно подробно [1, 2, 3, 4]. В настоящее время значительный интерес представляет исследование эффектов, которые обуславливаются упругими свойствами среды. Свойство упругости существенно влияет на продвижение упругопластических границ и определяет уровень остаточных напряжений в материале.

В настоящей статье рассматривается задача о вискозиметрическом течении упругоползучего материала, помещённого между двумя жёсткими цилиндрическими поверхностями. Решение ведётся в рамках модели больших деформаций, предложенной в [5, 8] и обобщённой на случай учёта вязких свойств материала на стадии пластического течения [6].

Основные соотношения модели больших деформаций. Кинематика среды в прямоугольной декартовой системе координат определяется зависимостями:

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{ks}e_{sj}, \tag{1}$$

$$\frac{De_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{2}\left(\left(\varepsilon_{ik} - \varepsilon_{ik}^p + z_{ik}\right)e_{kj} + e_{ik}\left(\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{kj}^p - z_{kj}\right)\right), \tag{2}$$

$$\frac{Dp_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij}^p - p_{ik}\varepsilon_{kj}^p - \varepsilon_{ik}^p p_{kj}, \tag{3}$$

$$\frac{Dn_{ij}}{Dt} = \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \tag{4}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\upsilon_{i,j} + \upsilon_{j,i}\right), \tag{5}$$

$$\upsilon_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{i,j}\upsilon_j, \tag{6}$$

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \tag{7}$$

$$r_{ij} = \frac{1}{2}\left(\upsilon_{i,j} - \upsilon_{j,i}\right) + z_{ij}\left(\varepsilon_{sk}, e_{sk}\right). \tag{8}$$

В соотношениях (1) – (8) d_{ij} – компоненты тензора деформаций Альманси, e_{ij} и p_{ij} – их обратимые и необратимые составляющие, u_i и υ_i – компоненты перемещений и скоростей точек среды, ε_{ij} и ε_{ij}^p – компоненты тензоров скоростей полных и необратимых деформаций, z_{ij} – нелинейная часть тензора вращений r_{ij}, $\frac{D}{Dt}$ – объективная производная по времени.

Связь напряжений и обратимых деформаций выражается зависимостями:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial d_{ik}}\left(\delta_{kj} - 2d_{kj}\right),\ p_{ij} \equiv 0, \tag{9}$$

$$\sigma_{ij} = -p_1\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}}\left(\delta_{kj} - e_{kj}\right),\ p_{ij} \neq 0, \tag{10}$$

где

$$W = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b-\mu)J_1J_2 - \chi J_1^3 + ...,$$

$$J_k \begin{cases} L_k, \ p_{ij} \equiv 0, \\ I_k, \ p_{ij} \neq 0, \end{cases}$$

$$L_1 = d_{kk}, \ L_2 = d_{ik}d_{ki}, \ I_1 = e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks}, \ I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns}.$$

Будем считать, что необратимые деформации накапливаются в среде непосредственно с начала деформирования и определяются реологическими свойствами материала.

Компоненты напряжений связаны с компонентами тензора скоростей необратимых деформаций законом ползучести Нортона [7, 10, 11]:

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial V}{\partial \sigma_{ij}}, \tag{11}$$

где

$$V = B\Sigma^n, \ \Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}\left((\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2\right)}, \ \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - главные значения тензора напряжений.

Процесс ползучести при ротационном вращении. Считаем, что слой материала ограничен цилиндрическими поверхностями $r = r_0$ и $r = R$, а на границе внешнего цилиндра поставлено условие прилипания:

$$\bar{u}\big|_{r=R} = \upsilon\big|_{r=R} = 0. \tag{12}$$

Деформирование осуществляется за счёт поворота внутреннего цилиндра, в то время как внешний цилиндр остаётся неподвижным:

$$u_r = r(1 - \cos\theta(r,t)), \ u_\varphi = r\sin\theta(r,t), \ \theta(r_0,t) = \theta_0(1+\alpha t), \tag{13}$$

$$u_r = u_\varphi = 0, \ \text{ если } r = R, \tag{14}$$

где $\theta(r,t)$ – центральный угол закручивания.

Отличными от нуля компонентами тензора деформаций Альманси остаются следующие:

$$d_{rr} = -\frac{1}{2}g^2, \ d_{r\varphi} = \frac{1}{2}g, \tag{15}$$

$$g = r\frac{\partial\theta}{\partial r}.$$

Уравнения равновесия в условиях осевой симметрии примут вид:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + 2\frac{\sigma_{r\varphi}}{r} = 0. \tag{17}$$

Уравнения изменения компонент необратимых деформаций преобразуются к виду:

$$\begin{gathered}
\frac{dp_{rr}}{dt} = \frac{3Bn}{4}Q^{\frac{n}{2}-1}(1-p_{rr})\sigma_{r\varphi}\frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}} - 2p_{r\varphi}\left(r_{\varphi r} + 3Bn\sigma_{r\varphi}Q^{\frac{n}{2}-1}\right), \\
\frac{dp_{\varphi\varphi}}{dt} = \frac{3Bn}{4}Q^{\frac{n}{2}-1}(1-p_{\varphi\varphi})\sigma_{r\varphi}\frac{e_{rr} - e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}} + 2p_{r\varphi}\left(r_{\varphi r} - 3Bn\sigma_{r\varphi}Q^{\frac{n}{2}-1}\right), \\
\frac{dp_{r\varphi}}{dt} = 3BnQ^{\frac{n}{2}-1}(1 - p_{rr} - p_{\varphi\varphi})\sigma_{r\varphi} + r_{\varphi r}(p_{rr} - p_{\varphi\varphi}),
\end{gathered} \tag{18}$$

где

$$Q = 3\sigma_{r\varphi}^2\left(1+\left(\frac{e_{rr}-e_{\varphi\varphi}}{e_{r\varphi}}\right)^2\right).$$

Для решения системы уравнений (16) – (18) построена конечно-разностная схема. В результате интегрирования получены сеточные распределения неизвестных параметров напряжённо-деформированного состояния, построены остаточные напряжения и деформации.

Резюме

Рассматривается деформирование упругоползучей среды между двумя жесткими коаксиальными цилиндрами при повороте одного из них. Решение строится в рамках модели больших упругоползучих деформаций.

Литература

1. Бахшиян Ф.А. Вращение жёсткого цилиндра в вязко-пластичной среде // Прикл. математика и механика. 1948. Т. 12, Вып. 6. С. 650-661.
2. Мясников В.П. Некоторые точные решения для прямолинейных движений вязко-пластической среды // ПМТФ. 1961. №2. С. 79-86.
3. Огибалов П.М., Мирзаджанзаде А.Х. Нестационарные движения вязко-пластичных сред. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970. 415 с.
4. Сафрончик А.И. Вращение цилиндра с переменной скоростью в вязкопластичной среде // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23, Вып. 6. С. 998-1014.
5. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В. Возможность повторного пластического течения при общей разгрузке упругопластической среды // ДАН. 2000. Т. 375, №6. С. 767-769.
6. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Мурашкин Е.В. Об остаточных напряжениях в окрестности цилиндрического дефекта сплошности вязкоупругопластического материала // Прикл. механика и техн. физика. 2006. Т. 47, №2. С. 110-119.
7. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. 752 с.
8. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // ДАН. 1996. Т. 347, №2. С. 199-201.
9. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Устинова А.С. Об учёте упругих свойств неньютоновского материала при его вискозиметрическом течении // Прикл. механика и техн. физика. 2008. Т. 49, №2. С. 143-151.
10. Никитенко А.Ф. Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. – Новосибирск: НГАСУ, 1997. 278 с.
11. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. – М.: МГИУ, 2007. 264 с.

Summary

We consider the deformation of the elasto-creep medium between two rigid coaxial cylinders when one of them is turned. The solution is constructed in the model of large elasto-creep deformations.

Поступила в редакцию 16.09.2012