УДК 539.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ МЕРИДИАНА ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, ДЕФОРМИРУЕМЫЕ БЕЗ ИЗМЕНЕНИЯ КРИВИЗНЫ ЗАДАННОЙ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКОЙ.

Мартыненко Т.М.

УО «Командно – инженерный институт МЧС РБ», Минск

Задача расчета безмоментного НДС оболочки по теории Кирхгофа–Лява является статически определимой [Новожилов, Бидерман с 133]. Интегрируя уравнения равновесия [1,2], получим:

$$T_1 = \frac{F(s)}{2\pi r \sin\theta},\ T_2 = q_n R_2 - T_1 \frac{R_2}{R_1} \tag{1}$$

где

$$F(s) = P_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} (q_n \cos\theta - q_1 \sin\theta) 2\pi r ds\,. \tag{2}$$

$F(s)$ – суммарная осевая нагрузка, действующая на элементарный элемент срединной поверхности и состоящая из: P_0–осевой нагрузки, действующей на торец оболочки при проекцию на эту ось, q_n, q_1 – нормальных и касательных составляющие поверхностной нагрузки, θ–угол, составленный нормалью к меридиану с осью вращения, r– полярный радиус, T_1, T_2 – внутренние усилия, действующие по касательной к меридиану и к параллели, R_1, R_2 – радиусы кривизны меридиана и срединной поверхности.

Для поверхности вращения второго порядка радиусы кривизны R_1, R_2 связаны с углом θ формулами [1,2]:

$$R_1 = \frac{R_0}{(1+\gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},\ R_2 = \frac{R_0}{(1+\gamma\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}},\ R_0, \gamma \text{–постоянные.} \tag{3}$$

Выведем теперь уравнения меридиана, для чего воспользуемся формулами [1,2]:

$$\frac{dr}{ds} = \cos\theta,\ \frac{dr}{ds} = \cos\theta,\ \frac{ds}{d\theta} = R_1\,. \tag{4}$$

Имеем:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{d\theta} = R_1 \cos\theta = \frac{R_0 \cos\theta}{(1+\gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Откуда:

$$r = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{R_0 \cos\theta d\theta}{(1+\gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R_0}{\sqrt{\gamma}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\left(\sqrt{\gamma}\sin\theta\right)}{\left(1+\left(\sqrt{\gamma}\sin\theta\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{R_0\sqrt{\gamma}\sin\theta}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}} + r_0\,.$$

Совершенно аналогично:

$$z = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{dz}{d\theta} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{dz}{ds}\frac{ds}{d\theta} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta \frac{R_0 d\theta}{(1+\gamma\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} = -R_0 \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d(\cos\theta)}{(1+\gamma-\gamma\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\frac{R_0}{1+\gamma}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}} + z_0$$

Поэтому при $r_0 = 0$, $z_0 = 0$:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{(z-z_0)^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

где

$$a=\frac{R_0}{\sqrt{1+\gamma}}\,,\; b=\frac{R_0}{1+\gamma}\,. \tag{6}$$

Предположим что $q_n = p = \text{const}$, $\theta_0 = 0$, тогда:

$$T_1=\frac{1}{2}pR_2=\frac{pR_0}{2\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}\,,$$

$$T_2=pR_2\left(1-\frac{1}{2}\frac{R_2}{R_1}\right)=\frac{1}{2}pR_0\frac{1-\gamma\sin^2\theta}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}\,. \tag{7}$$

Уравнение совместности деформаций для оболочек вращения в оссемеричном случае имеет при $h=\text{const}$, $E,\nu=\text{const}$ вид:

$$\varepsilon_1=\frac{d}{dr}\left(r\varepsilon_2\right)$$

или в силу закона Гука для изотропных оболочек:

$$T_1-\nu T_2=\frac{d}{dr}\left(r\left(T_2-\nu T_1\right)\right). \tag{8}$$

После дифференцирования из (8) получим:

$$\left(1+\nu\right)\left(T_1-T_2\right)=r\frac{d}{dr}\left(T_2-\nu T_1\right). \tag{9}$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона. Преобразуем (9) с помощью (7):

$$T_1-T_2=pR_2\left(1-\frac{1}{2}\frac{R_2}{R_1}\right)=\frac{1}{2}pR_0\frac{\gamma\sin^2\theta}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}\,. \tag{10}$$

или

$$T_2-\nu T_1=\frac{pR_0\left(1-\nu-\gamma\sin^2\theta\right)}{2\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}\,. \tag{11}$$

Поэтому (9) принимает такой вид:

$$\left(1+\nu\right)\frac{1}{2}pR_0\frac{\gamma\sin^2\theta}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}=r\left(\frac{d}{dr}\frac{1}{2}pR_0\frac{1-\nu-\gamma\sin^2\theta}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}\right),$$

или

$$\frac{\left(1+\nu\right)\gamma\sin^2\theta}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}=r\left(\frac{-\gamma\frac{d}{dr}\sin^2\theta}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}-\frac{1-\nu-\gamma\sin^2\theta}{\left(1+\gamma\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{d}{dr}\gamma\sin^2\theta\right)=\frac{r}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}$$

$$\left(\frac{-\gamma\frac{d}{dr}\sin^2\theta\left(1+\frac{1}{2}\left(1-\nu-\gamma\sin^2\theta\right)\right)}{1+\gamma\sin^2\theta}\right)=-\frac{r\gamma\frac{d}{dr}\sin^2\theta}{\sqrt{1+\gamma\sin^2\theta}}\left(1+\frac{1-\nu-\gamma\sin^2\theta}{2\left(1+\gamma\sin^2\theta\right)}\right)$$

или

$$\begin{gathered}\left(1+\nu\right)\gamma\sin^2\theta=-\gamma r2+2\gamma+2\gamma\sin^2\theta+1-\nu-\gamma\sin^2\theta=\\=-\frac{\gamma r2\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{dr}}{2\left(1+\gamma\sin^2\theta\right)}\left(3-\nu+\gamma\sin^2\theta\right)\Rightarrow\end{gathered} \tag{12}$$

т.к. $\gamma=\text{const}$ $1+\gamma\sin^2\theta\neq 0$ сократим на $\gamma\neq 0$ (исключим сферу) т.к. для сферы $\gamma=0$ что приведет последнее равенство к $0=0$.

Но

$$r\frac{d}{dr}\sin^2\theta = r2\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{dr} = r2\sin\theta\cos\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dr} = \left.\frac{r2\sin\theta}{R_1}\right|_{r=R_2\sin\theta} =$$

$$= \frac{R_2}{R_1}2\sin^2\theta = 2\sin^2\theta\left(1+\gamma\sin^2\theta\right),$$

Поэтому из (12) имеем:

$$\Rightarrow \left(1+\nu\right)\sin^2\theta = -\frac{1}{2}2\sin^2\theta\left(1+\gamma\sin^2\theta\right)\frac{3-\nu+\gamma\sin^2\theta}{1+\gamma\sin^2\theta} \Rightarrow$$

$$1+\nu = -3+\nu-\gamma\sin^2\theta \Rightarrow 4+\gamma\sin^2\theta = 0\,. \qquad (13)$$

сократим на $\sin^2\theta \geq 0$

Уравнение (12) в общем случае не разрешимо. Это означает что (7) не удовлетворяет условиям совместности деформации.

Если $\gamma = 0$, то $R_1 = R_2 = R_0$, $T_1 = T_2 = \frac{1}{2}pR_0$, $T_1 - T_2 = 0$, $T_2 - \nu T_1 = \frac{(1-\nu)pR_0}{2} = \mathrm{const}$.

Уравнение совместности деформаций:

$$\left(1+\nu\right)\left(T_1 - T_2\right) = r\frac{d}{dr}\left(T_2 - \nu T_1\right) \Rightarrow 0 = 0 \text{ удовлетворяется.}$$

Резюме

Рассмотрим оболочки вращения постоянной толщины, следующие гипотезам Кирхгофа–Лява, и деформируемые постоянным давлением $\rho = \mathrm{const}$. Показана необходимость учета уравнений совместности деформаций при определении без изгибной формы меридиана

Литература

1. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. – М.: Машиностроение, 1977. – 456 с.
2. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432 с.

Summary

The article is considered to rotation of the constant thickness, following hypotheses Kirkhgofa-Lyava, and deformed by constant pressure. Need of the accounting of the equations of compatibility of deformations is shown at definition of a non-bending form of a meridian.

Поступила в редакцию 26.07.2012