

СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В СЛОИСТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

Али М. Абед Аль-Зобайде, Чигарева Ю.А.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Введение. В последние годы в различных отраслях техники получают широкое применение составные конструкции слоистой структуры. Их использование обусловлено рядом несомненных преимуществ, которые имеют слоистые тела. Прежде всего, особенности поведения таких тел в поле температурных и силовых воздействий позволяют создавать конструкции, отвечающие самым разнообразным требованиям, управлять их реакцией на оказанные воздействия. Но для этого необходимо глубокое знание явлений и процессов, происходящих в телах слоистой структуры при их нагружении.

1. Стационарное распределение температуры $T(r)$ в цилиндрической трубе описывается уравнением:

$$\frac{d}{dr} \left(\lambda(r) \frac{dT}{dr} \right) + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} = 0 \quad (1)$$

Здесь предполагается, что коэффициент теплопроводности λ является функцией только r , тогда $T = T(r)$, распределение T не зависит ни от φ , ни от z .

Уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{d}{dr} \left(\ln \left[\lambda(r) r^2 \frac{dT}{dr} \right] \right) = 0 \quad (2)$$

Интегрируя последовательно (2), получим

$$\ln(\lambda r^2 T_r') = \text{const} = C \quad (1.3)$$

$$T(r) = C_1 + e^C \int_{r_1}^r \frac{dr}{\lambda r^2} \quad (4)$$

где r_1 – внутренний радиус трубы.

Пусть на границе $r = r_1$ и $r = r_2$ на границе радиус внешней поверхности задано распределение температуры:

$$T^{(i)} = T(r = r_1), \quad T^{(e)} = T(r = r_2) \quad (1.5)$$

тогда находим

$$e^C = \frac{T^{(e)} - T^{(i)}}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \lambda(r)}} = C^{(e)}, \quad C = \ln \frac{T^{(e)} - T^{(i)}}{\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \lambda(r)}} \quad (1.6)$$

Таким образом, выражение для температуры $T(r)$ имеет вид

$$T(r) = T^{(i)} + [T] \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \lambda} \right)^{-1} \int_{r_1}^r \frac{dr}{r^2 \lambda}, \quad [T] = [T^{(e)} - T^{(i)}] \quad (1.7)$$

Из формулы (1.7) следует, что при $r_1 \rightarrow 0$ интеграл становится расходящимся. Обозначим $\gamma(r) = \lambda^{-1}(r)$ – тепловое сопротивление

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^r \frac{dr}{r^2 \lambda(r)} &= \int_{r_1}^r \frac{\gamma(r) dr}{r^2} = \left[\gamma(r) \left(-\frac{1}{r} \right) \right]_{r_1}^r + \int_{r_1}^r \frac{1}{r} \gamma'(r) dr = -\frac{\gamma(r)}{r} + \frac{\gamma(r_1)}{r_1} + (\ln r \cdot \gamma')_{r_1}^r - \int_{r_1}^r \gamma'' \ln r dr = \\ &= \frac{\gamma(r_1)}{r_1} - \frac{\gamma(r)}{r} + \ln r \cdot \gamma'(r) - \ln r_1 \cdot \gamma'(r_1) - \int_{r_1}^r \gamma'' \ln r dr = \frac{\gamma(r)}{r} \left(\frac{\gamma(r_1) r}{\lambda(r) r_1} - 1 \right) + \ln \frac{r \gamma'(r_1)}{r_1 \gamma'(r_1)} - \int_{r_1}^r \gamma''(r) \ln r dr \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые примеры неоднородных цилиндров с функцией $\lambda(r)$, задаваемых элементарными функциями. Ограничимся случаями, когда $\lambda(r)$ представляет собой монотонно

возрастающую (убывающую) функцию от одной из внешних границ (r_1 или r_2) и случай периодического изменения $\lambda(r)$ между r_1 и r_2 .

1. $\lambda(r)$ монотонно возрастает от r_1 к r_2 по закону

$$\lambda(r) = \lambda_0 (r^2 - r_1^2)^{1/2} \quad (8)$$

Тогда

$$T(r) = T^{(i)} + [T] \left(\frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right)^{1/2} \frac{r}{r_2} \quad (9)$$

$$r = r_1 \quad T(r_1) = T^{(i)}$$

$$r = r_2 \quad T(r_2) = T^{(i)}$$

На графике показано изменение температуры для полого цилиндра ($r_1 = 1\text{ м}$, $r_2 = 2\text{ м}$) от 100°С до 300°С .

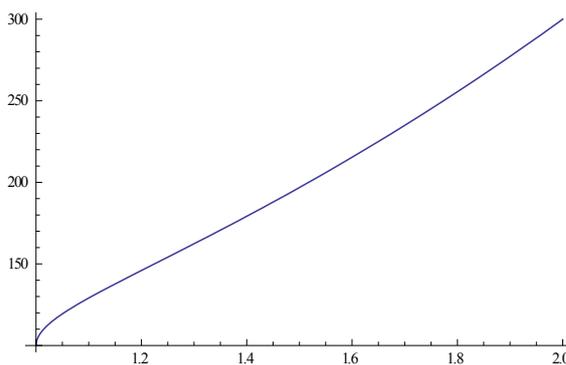


Рисунок 1 – График изменения температуры в пологом цилиндре при $\lambda(r) = \lambda_0 (r^2 - r_1^2)^{1/2}$

2. $\lambda(r)$ монотонно убывает от r_1 к r_2 по закону

$$\lambda(r) = \lambda_0 (r^2 + r_2^2)^{1/2} \quad (10)$$

тогда изменение температуры подчинится закону

$$T(r) = T^{(i)} - [T] \left[1 + \frac{2r_1}{(r_1^2 + r_2^2)^{1/2}} \right]^{-1} \left[1 - \frac{r_1 (r^2 + r_2^2)^{1/2}}{r (r_1^2 + r_2^2)^{1/2}} \right] \quad (11)$$

$$r = r_1 \quad T = T^i$$

$$r = r_2 \quad T = T_n - [T] \left[1 + \frac{2r_1}{(r_1^2 + r_2^2)^{1/2}} \right]^{-1} \left[1 - \frac{r_1 (r_2^2 + r_2^2)^{1/2}}{r_2 (r_1^2 + r_2^2)^{1/2}} \right]$$

Вторая скобка в (1.11) при $r_1 \rightarrow r_2$ стремится к 0 возрастая, а, следовательно, $T_{(r)}$ убывает.

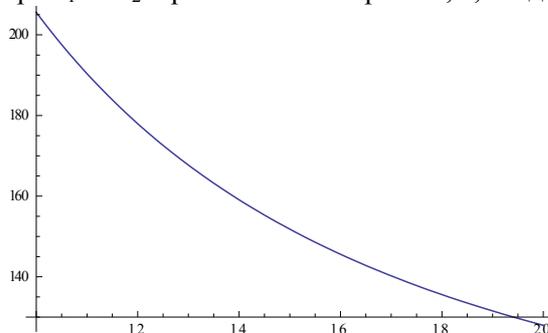


Рисунок 2 – График изменения температуры в пологом цилиндре при $\lambda(r) = \lambda_0 (r^2 + r_2^2)^{1/2}$

3. Пусть $\lambda(r)$ на интервале (r_1, r_2) изменяется по закону

$$\lambda(r) = \frac{[(ar - b)\sin r + (a + br)\cos r]^2}{r^2} \quad (12)$$

где a и b – некоторые константы.

Тогда распределение температуры имеет вид:

$$T(r) = T^{(i)} + [T] \left[1 - \frac{r_2 \sin r_2 + \cos r_2}{r_1 \sin r_1 + \cos r_1} \cdot \frac{b[(ar_1 - b)\sin r_1 + (a + br_1)\cos r_1]}{b[(ar_2 - b)\sin r_2 + (a + br_2)\cos r_2]} \right] \times \\ \times \left[1 - \frac{r \sin r + \cos r}{r_1 \sin r_1 + \cos r_1} \cdot \frac{b[(ar - b)\sin r + (a + br)\cos r]}{b[(ar_1 - b)\sin r_1 + (a + br_1)\cos r_1]} \right] \quad (13)$$

На рис. 3 изображены зависимости распределения неоднородности $\lambda(r)$, а на рис. 4 соответствующие распределения температуры по толщине трубы.

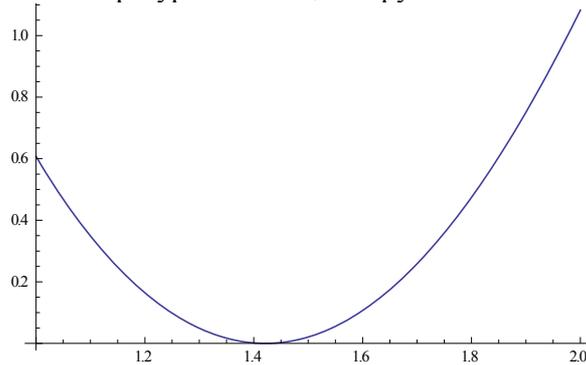


Рисунок 3. – График распределения неоднородностей $\lambda(r)$.

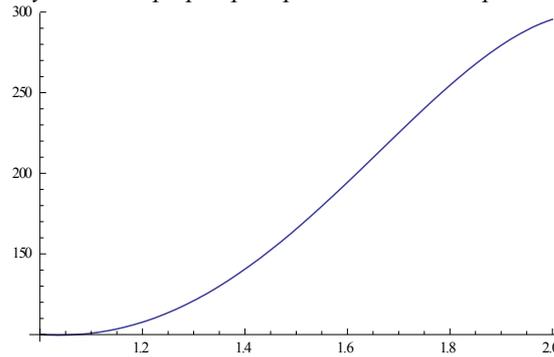


Рисунок 4 – График изменения температуры в полном цилиндре при $\lambda(r) = \frac{[(ar - b)\sin r + (a + br)\cos r]^2}{r^2}$.

Заключение. Результаты проведенных исследований показывают, что разработанная методология расчета теплового состояния многослойных тел позволяет путем соответствующего подбора функций неидеального контакта слоев со свойствами, полученными расчетами, создать многослойную конструкции с допустимыми уровнями температур, их градиентов.

Литература

1. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. – М: Атомиздат, 1979, 416 с.
2. Мухачев Г. А., Щукин В. К. Термодинамика и теплопередача: Учеб. для авиац. вузов.– М.: Высш. шк., 1991. – 480 с.
3. Зарубин В.С., Кувыркин Г. Н. Математические модели термомеханики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 168 с.

Summary

In the article discussed the calculation of the temperature in the simulation of the multilayer structure, which has imperfect contact between the layers. Imperfect contact between the layers of the various functions is given heterogeneity.

Поступила в редакцию 21.08.2012