

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 539.3

ГУНДИНА
Мария Анатольевна

**МЕТОДЫ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ
В ЗАДАЧАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИН
В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ
СРЕДАХ С УПРОЧНЕНИЕМ**

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.02.04 – Механика
деформируемого твердого тела

Минск 2018

Работа выполнена в Белорусском национальном техническом университете

**Научный
руководитель**

НИФАГИН Владимир Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных технологий Белорусского государственного университета

**Официальные
оппоненты:**

СТАРОВОЙТОВ Эдуард Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Строительная механика» УО «Белорусский государственный университет транспорта»;

ШИРВЕЛЬ Павел Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент, начальник управления международного сотрудничества и внешнеэкономической деятельности Белорусского национального технического университета

**Оппонирующая
организация**

УО «Белорусский государственный технологический университет»

Защита состоится «9» февраля 2018 г. в 14⁰⁰ часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.05.07 при Белорусском национальном техническом университете по адресу: 220013, г. Минск, пр. Независимости, 65, корп. 1, ауд. 202, тел. ученого секретаря: (+37517) 292-24-04.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского национального технического университета.

Автореферат разослан «9» января 2018 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций Д 02.05.07,
кандидат физико-математических
наук, доцент

П. И. Ширвель

© Гундина М. А., 2018

© Белорусский национальный
технический университет, 2018

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время большое число публикаций по механике деформируемого тела касается проблем разрушения и развития повреждений возле концентраторов напряжений типа вырезов, включений и трещин. Применение различных конструкционных материалов в авиационной и космической технике, строительстве, в современных энергетических установках, судостроении при экстремальных условиях работы, а также поиски путей повышения прочности и эксплуатационной надежности новейших конструкций придают проблемам механики разрушения особую актуальность.

До сих пор получение аналитических решений конкретных прикладных задач теории пластичности, а именно нахождение функций, описывающих напряженно-деформированное состояние упругопластических тел и конструкций, представляет большие математические и вычислительные трудности, по причине нелинейности разрешающих уравнений и сингулярности возникающих полей напряжений и деформаций. В механике разрушения широкое распространение при решении такого рода задач получили прямые численные методы, например, метод конечных элементов. Однако, даже при небольшом изменении исходных данных, в этом случае решать задачу приходится заново, что не позволяет проводить качественный анализ множества возникающих эффектов.

Метод асимптотических разложений может быть применен в окрестности особой точки, в данном случае конца трещины, что позволяет получить количественные и качественные оценки локальных и глобальных характеристик разрушения. Определение напряженно-деформированного состояния в окрестности квазистатической трещины, а также определение ее критической длины при заданной величине нагрузки является современной и актуальной задачей. Это связано с тем, что докритическое продвижение трещины в упругопластическом теле приводит к перераспределению полей напряжений и деформаций и изменяет всю картину напряженно-деформированного состояния материала.

В настоящее время востребованы исследования напряженно-деформированного состояния материала в зонах технологических дефектов, связанных с разрушением твердых тел, в частности, изучение асимптотики напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины. Разработка научно-методических основ диагностики прочностных характеристик элементов конструкций, построение аналитических зависимостей компонентов напряжений и деформаций в окрестности дефекта, анализ поведения металла при растягивающей нагрузке и учете упругопластических эффектов – все эти задачи являются важными и актуальными с точки зрения прогнозирования прочности и ресурса соответствующих деталей машин и механизмов.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Тема диссертации соответствует приоритетным направлениям научных исследований Республики Беларусь на 2005–2010 гг., утвержденных Постановлением Совета Министров Республики Беларусь № 512 от 17.05.2005 г.: пункты 2.1 «Машиноведение; механика; надежность и безопасность машин и технических систем»; 2.3 «Компьютерное моделирование и испытание машин и механизмов»; на 2011–2015 гг., утвержденных Постановлением Совета Министров Республики Беларусь № 585 от 19.04.2010 г.: пункты 7.1 «Механика, надежность, безопасность и экологичность машин, трение и износ в машинах, методы расчета, моделирования, проектирования, конструирования и испытаний машин, агрегатов и узлов»; 7.5 «Методы и средства неразрушающего контроля, технической диагностики, мониторинга и испытаний в процессах производства и эксплуатации машин»; на 2016–2020 гг., утвержденных Постановлением Совета Министров Республики Беларусь № 190 от 12.03.2015 г.: пункт 8 «Многofункциональные материалы и технологии».

Диссертационное исследование выполнялось в рамках госбюджетных тем кафедры «Инженерная математика» Белорусского национального технического университета в 2011–2015 гг.: ГБ 43.11-241 «Математическое моделирование и численно аналитические методы решения задач механики сплошных сред и теории обработки информации», в 2016–2020 гг.: ГБ 16-244 «Разработка научных проблем и методических основ теории нелинейных задач и создание ЭУМК для изучения математики, прикладной математики и информатики студентами инженерных специальностей технических вузов».

Цель и задачи исследования

Целью исследований является разработка варианта метода асимптотических разложений для решений статических и квазистатических задач теории трещин, а также разработка подходов и методик компьютерного моделирования для подробного исследования напряженно-деформированного состояния упрочняющегося упругопластического материала с прямолинейной трещиной.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- разработать вариант метода асимптотических разложений для определения напряженно-деформированного состояния упрочняющегося упругопластического материала с неподвижной прямолинейной трещиной общего вида под действием растягивающей нагрузки;
- разработать метод для решения квазистатических задач о напряженно-деформированном состоянии упрочняющегося упругопластического материала в окрестности вершины трещины с учетом зоны разгрузки;
- построить алгоритм определения собственных значений нелинейного дифференциального оператора в краевых задачах теории трещин;
- определить критические значения длины трещины для заданного значения нагрузки.

Научная новизна

Методом асимптотических разложений решен новый класс задач об оценке напряженно-деформированного состояния в окрестности конца трещины нормального отрыва, поперечного сдвига и общего вида в случаях плоской деформации и плоского напряженного состояния в рамках теории течения с упрочнением.

Разработана новая методика расчета напряженно-деформированного состояния упругопластической пластины с трещиной нормального отрыва в момент страгивания.

Установлены закономерности процесса деформирования в растянутых стальных элементах, содержащих трещину, в случаях плоской деформации и плоского напряженного состояния.

Положения, выносимые на защиту

1. Постановка и решение краевой задачи определения напряженно-деформированного состояния растянутой стальной пластины из упругопластического материала с трещиной, основанная на методе асимптотических разложений, которая учитывает пластические свойства материала, наличие зон разгрузки, позволяющая определить члены асимптотических разложений для компонентов напряжений.

2. Система разрешающих дифференциальных уравнений для задачи о растяжении стальной пластины, содержащей трещину, с граничными условиями на ее берегах, построенная на основе метода асимптотических разложений в рамках теории течения с упрочнением, позволяющая моделировать перераспределения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины при плоской деформации и плоском напряженном состоянии.

3. Механико-математическая модель определения напряженно-деформированного состояния в окрестности квазистатической трещины нормального отрыва в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния, позволяющая проводить численно-аналитический анализ прочностных характеристик в зависимости от величины нагрузок и пластических свойств материала, находить границу зон активного нагружения и разгрузки, прогнозировать направления развития трещины.

4. Закономерности влияния пластических свойств материала, величины напряжений и приложенной нагрузки на первоначальное увеличение длины трещины, изменения границ промежуточной структуры окрестности трещины, где применяется метод асимптотических разложений.

Личный вклад соискателя ученой степени

Все основные результаты, представленные в диссертации, получены автором лично. Научный руководитель доцент, канд. физ.-мат. наук В.А. Нифагин принял участие в постановке задач, анализе и интерпретации полученных результатов, выборе направлений исследования. Результаты, принадлежащие соавтору совместных научных исследований, не вошли в данную диссертационную работу.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты диссертации докладывались на научно-технических конференциях в Беларуси, России и Польше: Международная научно-техническая конференция «Наука образованию, производству, экономике» (Минск, 2011, 2013, 2015, 2016); XI Международная научно-техническая конференция «Исследования и разработки в области машиностроения, энергетики и управления» (Гомель, 2011); Международная конференция «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (Минск, 2011, 2015); Международная научная конференция «XI Белорусская математическая конференция» (Минск, 2012); 3-я Международная молодежная научно-практическая конференция «Научные стремления 2012» (Минск, 2012); Международная математическая конференция «Боголюбовский читанка DIF – 2013» (Севастополь, 2013); Международная конференция «Conference of Computer Methods in Mechanics» (Poznan, 2013); VI Белорусский конгресс по теоретической и прикладной механике (Минск, 2013); 6-я Международная научно-техническая конференция «Приборостроение 2013» (Минск, 2013); 5-я Международная конференция «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов» (Москва, 2013); II Всероссийская молодежная научно-техническая конференция (Москва, 2015), 9-я Международная научно-практическая конференция «Инновационные технологии обучения физико-математическим и профессионально-техническим дисциплинам» (Мозырь, 2017).

Полученные результаты внедрены в учебный процесс кафедры «Инженерная математика» БНТУ.

Опубликование результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 22 научных работах, из них 5 статей в научных журналах, входящих в перечень изданий ВАК (1,5 авторского листа), 9 статей в сборниках трудов и материалов конференций, 8 – в форме тезисов докладов.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, библиографического списка. Полный объем диссертационной работы составляет 107 страниц, количество используемых источников составляет 96 наименований, 39 рисунков и 10 таблиц, список публикаций соискателя составляет 22 наименования.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В первой главе диссертации анализируется современный подход к описанию напряженного состояния тела, содержащего дефекты. Отмечены применяемые методы в задачах линейной и нелинейной теории трещин для детального механико-математического изучения закономерностей изменения упругопластических полей напряжений и деформаций в окрестности фиксированной и развивающейся в различных режимах трещины. В работах многих отечественных и зарубежных ученых (В.И. Астафьев, А.Г. Горшков, А.А. Гриффитс, М.А. Журавков, В.А. Ибра-

гимов, Д.Д. Ивлев, А.А. Ильюшин, А.Ю. Ишлинский, Л.М. Качанов, В.Д. Ключников, В.А. Кукареко, И.С. Куликов, Д.В. Леоненко, В.М. Морозов, А. Надаи, В.З. Партон, Ю.М. Плескачевский, Ю.Н. Работнов, Л.И. Слепян, Г.В. Смирнов, Э.И. Старовойтов, А.В. Степаненко, Л.В. Степанова, Г.П. Черепанов, А.В. Чигарев, П.И. Ширвель и другие) показано, что развитие деформаций в упрочняющихся материалах является сложным процессом, который сопровождается рядом физических явлений, требует учета нелинейной диаграммы деформирования, наличия зон активного нагружения и разгрузки, эффекта упрочнения материала. Продемонстрировано, что метод асимптотических разложений имеет преимущества при построении модели для изучения напряженного деформированного состояния в окрестности трещины.

Во второй главе представлена разработанная модификация метода асимптотических разложений, который позволяет решать статическую задачу о растяжении пластины, содержащей прямолинейную трещину. Рассматриваются случаи трещины нормального отрыва, поперечного сдвига, общего вида.

Для описания механического поведения упругопластического материала в задачах о растяжении пластины, содержащей прямолинейную трещину, используются уравнения равновесия в напряжениях, записанные в полярной системе координат (вершина трещины в начале координат):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr,r} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/r + \sigma_{r\varphi,\varphi}/r &= 0, \\ \sigma_{r\varphi,r} + 2\sigma_{r\varphi}/r + \sigma_{\varphi\varphi,\varphi}/r &= 0,\end{aligned}\quad (1)$$

где r – безразмерный радиус, σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ – физические проекции компонент тензора напряжений.

Для связи тензора деформации с компонентами вектора перемещений использовались соотношения Коши:

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = u_{\varphi,\varphi}/r + u_r/r, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}(u_{\varphi,r} + u_{r,\varphi}/r - u_\varphi/r), \quad (2)$$

где ε_{rr} , $\varepsilon_{r\varphi}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ – физические проекции компонент тензора деформаций, u_r , u_φ – компоненты вектора перемещений.

Определяющие соотношения теории течения с упрочнением выражались следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta s_{rr} &= \delta e_{rr} - \delta\Phi(\Gamma)e_{rr}, \quad \delta s_{\varphi\varphi} = \delta e_{\varphi\varphi} - \delta\Phi(\Gamma)e_{\varphi\varphi}, \\ \delta s_{r\varphi} &= \delta e_{r\varphi} - \delta\Phi(\Gamma)e_{r\varphi},\end{aligned}\quad (3)$$

где δs_{ij} , δe_{ij} , $i, j = r, \varphi$ – приращения компонент девiatorов напряжений

и деформаций, $\Phi(\Gamma) = \sum_{k \geq 1} B_{2k} \Gamma^{2k}$ – функция интенсивности касательных дефор-

маций, Γ – интенсивность деформаций, B_{2k} – постоянные материала. Рассматривается несжимаемый материал.

Компоненты тензоров и дивергентов деформаций и напряжений представлены формулами:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= e_{ij}, e_{rr} + e_{\varphi\varphi} + e_{zz} = 0, s_{rr} + s_{\varphi\varphi} = 0, \\ \sigma &= \frac{1}{2}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}), s_{rr} = \frac{1}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}), \\ s_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2}(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}), s_{r\varphi} = \sigma_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Нагрузки на краях трещины равны нулю:

$$\sigma_{r\varphi}|_{\varphi=\pm\pi} = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi}|_{\varphi=\pm\pi} = 0. \quad (5)$$

Решение искалось в виде асимптотических разложений:

$$u_r(r, \varphi) = \sum_{n \geq 0} U_n(\varphi) r^{\lambda_n}, u_{\varphi}(r, \varphi) = \sum_{n \geq 0} V_n(\varphi) r^{\lambda_n}. \quad (6)$$

Интенсивность деформаций имела вид:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + (\varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + (\varepsilon_{rr})^2 + 6 \cdot (\varepsilon_{r\varphi}^2)}, \\ \Gamma &= \frac{2}{3} \left((\varepsilon_{rr}^2 - \varepsilon_{rr} \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + 3 \varepsilon_{r\varphi}^2) \right)^{1/2} = \frac{2}{3} (F(\varphi))^{1/2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $F(\varphi) = \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} a_{k\ell} r^{\lambda_k + \lambda_{\ell} - 2}$,

$$\begin{aligned} a_{k\ell} &= \lambda_k \lambda_{\ell} U_k U_{\ell} - \lambda_k (U_k V'_{\ell} + U_k U_{\ell}) + (V'_k + U_k)(V'_{\ell} + U_{\ell}) + \frac{3}{4} (U'_k + (\lambda_k - 1) V_k) \times \\ &\times (U'_{\ell} + (\lambda_{\ell} - 1) V_{\ell}). \end{aligned}$$

Представление среднего напряжения σ описывается следующим образом:

$$\sigma = \sum_{n \geq 0} W_n(\varphi) r^{\lambda_n - 1}, \quad (8)$$

где $W_n(\varphi)$ – функции, подлежащие определению в процессе решения задачи.

Тогда для напряжений были получены формулы:

$$\sigma_{rr} = \sum_{n \geq 0} (\lambda_n U_n + W_n) r^{\lambda_n - 1} - B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \alpha_{k\ell m} r^{\mu_{k\ell m} - 3}, \quad (9)$$

$$\text{здесь } \mu_{k\ell m} = \lambda_k + \lambda_\ell + \lambda_m, \quad B = \frac{2}{3} B_2, \quad \alpha_{k\ell m} = \frac{(\lambda_k + \lambda_\ell - 2) \lambda_m U_m a_{k\ell}}{\lambda_k + \lambda_\ell + \lambda_m - 3}.$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sum_{n \geq 0} (V'_n + U_n + W_n) r^{\lambda_n - 1} - B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \beta_{k\ell m} r^{\mu_{k\ell m} - 3}, \quad (10)$$

$$\text{где } \beta_{k\ell m} = \frac{\lambda_k + \lambda_\ell - 2}{\lambda_k + \lambda_\ell + \lambda_m - 3} a_{k\ell} (V'_m + U_m).$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (U'_n + (\lambda_n - 1) V_n) r^{\lambda_n - 1} - \frac{1}{2} B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \gamma_{k\ell m} r^{\mu_{k\ell m} - 3}, \quad (11)$$

$$\text{здесь } \gamma_{k\ell m} = \frac{\lambda_k + \lambda_\ell - 2}{\lambda_k + \lambda_\ell + \lambda_m - 3} a_{k\ell} (U'_m + (\lambda_m - 1) V_m).$$

Для произвольного приближения получаем краевую задачу о собственных значениях:

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2} (U''_n + (\lambda_n - 1) V'_n) + (\lambda_n - 1) (\lambda_n + 1) U_n - V'_n + (\lambda_n - 1) W_n \right) r^{\lambda_n - 2} - \quad (12)$$

$$- B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} (\mu_{k\ell m} - 3) \alpha_{k\ell m} + (\alpha_{k\ell m} - \beta_{k\ell m}) + \frac{1}{2} \gamma'_{k\ell m} r^{\mu_{k\ell m} - 4} = 0,$$

$$\sum_{n \geq 0} \left(V''_n + \frac{1}{2} (\lambda_n + 5) U'_n + W'_n + \frac{1}{2} (\lambda_n - 1) (\lambda_n - 3) V_n \right) r^{\lambda_n - 2} - B \times$$

$$\times \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \left(\frac{1}{2} (\mu_{k\ell m} - 1) \gamma'_{k\ell m} + \beta'_{k\ell m} \right) r^{\mu_{k\ell m} - 4} = 0, \quad \sum_{n \geq 0} ((\lambda_n + 1) U_n + V'_n) r^{\lambda_n - 1} = 0.$$

Граничные условия:

$$\left(\sum_{n \geq 0} (U'_n + (\lambda_n - 1)V_n) r^{\lambda_n - 1} - B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \gamma_{k\ell m} r^{\mu_{k\ell m} - 3} \right) \Big|_{\varphi = \pm \pi} = 0, \quad (13)$$

$$\left(\sum_{n \geq 0} (V'_n + U_n + W_n) r^{\lambda_n - 1} - B \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell \geq 0} \sum_{m \geq 0} \beta_{k\ell m} r^{\mu_{k\ell m} - 3} \right) \Big|_{\varphi = \pm \pi} = 0.$$

В общем случае условие разрешимости краевой задачи имеет вид:

$$\lambda_n - 2 = \mu_{k\ell m} - 4 \quad (k + \ell + m = n + 1, n = 0, 1, 2, \dots). \quad (14)$$

На рисунке 1 представлены угловые распределения компонент напряжений, соотнесенных к пределу текучести, для стали с упругопластическими характеристиками: $G = 7.9 \cdot 10^4$ МПа, $B_2 = 3.2124114 \cdot 10^{-6}$, $\sigma_T = 400$ МПа при значении нагрузки $P = 70$ МПа, при длине трещины в 20 мм, отнесенной к ширине исходного образца с шириной в 200 мм в случае трещины нормального отрыва.

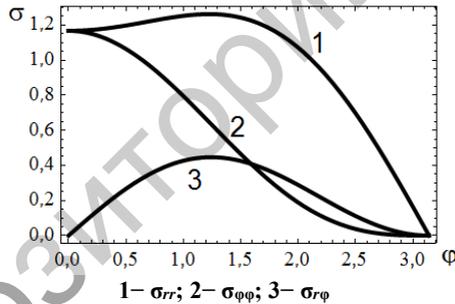


Рисунок 1. – Распределение компонент тензора напряжений на расстоянии $r = 0,4$ мм от вершины трещины при изменении φ рад

Величина поправки последующих приближений для σ_T в случае трещины нормального отрыва находится в диапазоне 1–4 % для первого приближения, а для второго приближения – 0,008–0,2 %, тогда как для $\sigma_{T\varphi}$ значения для первого приближения 1–5,5 %; для второго – 0,03–0,8 %, для $\sigma_{\varphi\varphi}$ – 1–6 % для первого приближения и 0,02–0,5 % для второго. В главе приводится решение задачи для случая трещины поперечного сдвига и трещины общего вида.

На рисунке 2 представлены контурные распределения компонент напряжений, отнесенных к пределу текучести, при различных значениях радиуса в области сходимости метода. Алгоритм расчета компонент напряжений в полярной системе координат реализован в системе Mathematica.

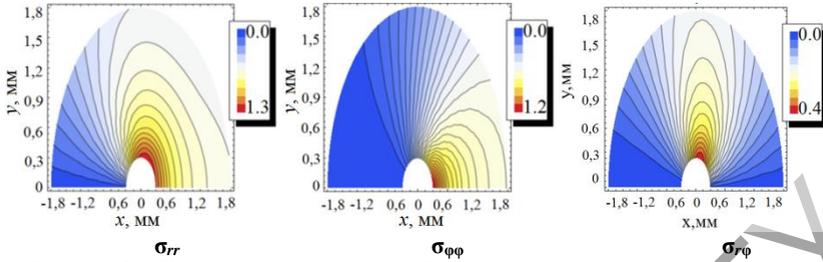


Рисунок 2. – Контурные распределения безразмерных компонент напряжений в окрестности вершины трещины

Наибольшая концентрация напряжений наблюдается в окрестности вершины трещины. График компоненты $\sigma_{\phi\phi}$ достигает наибольшего значения при 90° , как и в сравниваемых результатах.

В главе приведены сравнения с решениями, полученными в рамках деформационной теории и нелинейной упругости, а также методом конечных элементов. Результаты исследования сравниваются с решением задачи, полученным в рамках деформационной теории пластичности (рисунок 3). Значения напряжений относились к $\max(\sigma_{\phi\phi})$.

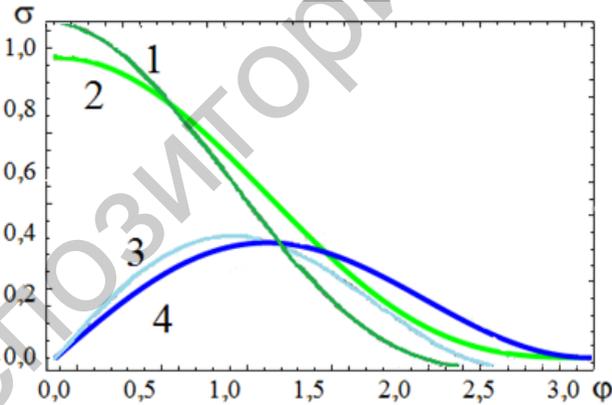
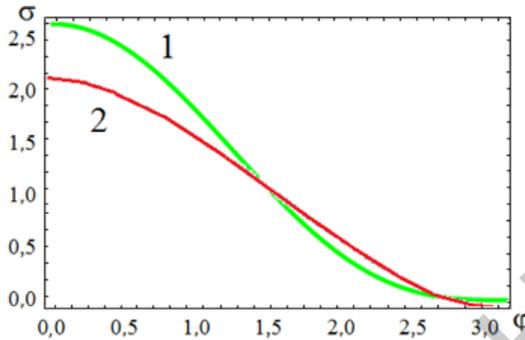


Рисунок 3. – Распределение безразмерных компонент тензора напряжений: в рамках деформационной теории (1– $\sigma_{\phi\phi}$; 3– $\sigma_{r\phi}$); в рамках теории течения (2– $\sigma_{\phi\phi}$; 4– $\sigma_{r\phi}$)

В деформационной теории компоненты напряжения $\sigma_{\phi\phi}$ достигают наибольшие значения в нуле, как и в рамках теории течения.

Кроме этого, для сравнения использовались результаты, полученные для случая нелинейной упругости. Значения напряжений относились к величине $P\sqrt{2\pi}$, где P – величина нагрузки (рисунок 4).



1 – $\sigma_{\varphi\varphi}$, полученное в рамках теории течения;
 2 – $\sigma_{\varphi\varphi}$, полученное в рамках нелинейной упругости
 Рисунок 4. – Распределение соотнесенных нормальных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ в случае нормального отрыва

Задача также решалась в случае плоского напряженного состояния. Полученные результаты оценки напряженного состояния в области промежуточной структуры вершины трещины указывают на значительное возрастание размера области для плоского напряженного состояния в сравнении со случаем плоской деформации.

В третьей главе описана математическая модель докритического роста трещины, приведена процедура определения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины страгивающейся трещины. В ходе решения основной задачи, помимо определения возникающих напряжений и деформаций, найдена граница, отделяющая зоны активного нагружения и разгрузки.

Решение находится сначала для случая плоской деформации ($\epsilon_{zz} = 0$). При решении задачи для трещины нормального отрыва уравнение совместности деформаций записывалось в производных от деформаций по длине:

$$2 \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \dot{\epsilon}_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial^2 \dot{\epsilon}_{rr}}{\partial \varphi^2} - r \cdot \frac{\partial \dot{\epsilon}_{rr}}{\partial r} + r \cdot \frac{\partial^2 (r \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi})}{\partial r^2}. \quad (15)$$

В определяющих соотношениях теории течения перейдем от приращений к производным по длине трещины:

$$\dot{\epsilon}_{rr} = \dot{s}_{rr} + \mu \dot{F}(T) s_{rr}, \quad \dot{\epsilon}_{r\varphi} = \dot{s}_{r\varphi} + \mu \dot{F}(T) s_{r\varphi}, \quad \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = \dot{s}_{\varphi\varphi} + \mu \dot{F}(T) s_{\varphi\varphi}, \quad (16)$$

при $\mu = \vartheta \left(\frac{G}{M} - 1 \right)$, $\vartheta = \begin{cases} 1, \delta T \geq 0 \\ 0, \delta T < 0 \end{cases}$, где M – модуль упругости,

$F(T) = A_2 (s_{rr}^2 + s_{\varphi\varphi}^2 + 2s_{r\varphi}^2)$ – квадратичная функция интенсивности касательных напряжений, где A_2 – постоянная материала, характеризующая нелинейность диаграммы деформирования, определяемая экспериментально.

Для формулировки граничных условий учитывается, что берега трещины свободны от усилий:

$$\dot{\sigma}_{\varphi\varphi} |_{\varphi=\pi} = 0, \quad \dot{\sigma}_{r\varphi} |_{\varphi=\pi} = 0, \quad \dot{\sigma}_{r\varphi} |_{\varphi=0} = 0, \quad \dot{\sigma}_{\varphi\varphi} |_{\varphi=0} = 0. \quad (17)$$

Вводилась функция напряжений $\Phi(r, \varphi)$ в виде асимптотического разложения в окрестности вершины трещины $\Phi(r, \varphi) = \sum_{k \geq 0} \psi_k(\varphi) r^{\lambda_k}$.

Выражения для напряжений в области активного нагружения имели вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sum_{k \geq 0} (\psi_k \lambda_k + \psi_k'') r^{\lambda_k - 2}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \sum_{k \geq 0} \lambda_k (\lambda_k - 1) \psi_k r^{\lambda_k - 2}, \\ \sigma_{r\varphi} &= \sum_{k \geq 0} (1 - \lambda_k) \psi_k' r^{\lambda_k - 2}. \end{aligned} \quad (18)$$

При подстановке этих выражений в уравнение совместности деформаций получаем для произвольного приближения рекуррентную последовательность краевых задач о собственных значениях:

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 0} (2(-\lambda_k - 2)(1 - \lambda_k) \psi_k'' \cos(\varphi) - \psi_k' \sin(\varphi) + (1 - \lambda_k)(\psi_k'' \sin(\varphi) + \psi_k'' \cos(\varphi))) + \\ & + 2(\lambda_k - 3)(-\lambda_k - 2)(1 - \lambda_k)(\psi_k'' \cos(\varphi) - \psi_k' \sin(\varphi)) + (1 - \lambda_k)(\psi_k'' \sin(\varphi) + \\ & + \psi_k'' \cos(\varphi)) - \frac{1}{2} ((\psi_k^{(4)})_k + \lambda_k (2 - \lambda_k) \psi_k'' - (\lambda_k - 2)((\psi_k^{(4)})_k + \lambda_k (2 - \lambda_k) \psi_k'')) \cos(\varphi) - \\ & - (\psi_k'' + \lambda_k (2 - \lambda_k) \psi_k' - (\lambda_k - 2)(\psi_k'' + \lambda_k (2 - \lambda_k) \psi_k')) \sin(\varphi) + (\psi_k^{(5)} + \lambda_k (2 - \lambda_k) \psi_k'' - \\ & - \psi_k'' + \lambda_k (2 - \lambda_k) \psi_k') \sin(\varphi) + (\psi_k^{(4)} + \lambda_k (2 - \lambda_k)(\psi_k'' + \psi_k') - \psi_k'' \cos(\varphi)) + \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}(\lambda_k - 3)(-\lambda_k - 2)(\psi_k'' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k) \cos(\varphi) + (\psi_k''' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k') \sin(\varphi) - \\
& - (\lambda_k - 3)((\lambda_k - 2)(\psi_k'' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k) \cos(\varphi) - (\psi_k''' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k') \sin(\varphi)) - \\
& - \frac{1}{2}(\lambda_k - 3)(\lambda_k - 4)((\lambda_k - 2)(\psi_k'' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k) \cos(\varphi) - (\psi_k''' + \lambda_k(2 - \lambda_k)\psi_k') \times \\
& \times \sin(\varphi))r^{\lambda_k - 3} + \frac{\mu}{2} \sum_{k \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{m \geq 0} 2((-\lambda_k + \lambda_l - 4)(a_{kl}' \cos(\varphi) - a_{kl} \sin(\varphi)) + (a_{kl}'' \sin(\varphi) + \\
& + a_{kl}' \cos(\varphi))(1 - \lambda_m)\psi_m' + (-\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) + a_{kl}' \sin(\varphi)(1 - \lambda_m)\psi_m'' + 2(\lambda_k + \\
& + \lambda_l + \lambda_m - 7)((4 - \lambda_k - \lambda_l)(a_{kl}' \cos(\varphi) - a_{kl} \sin(\varphi)) + (a_{kl}'' \sin(\varphi) + a_{kl}' \cos(\varphi))(1 - \lambda_m) \times \\
& \times \psi_m' + ((4 - \lambda_k - \lambda_l)a_{kl} \cos(\varphi) + a_{kl}' \sin(\varphi))(1 - \lambda_m)\psi_m'') - \frac{1}{2}((-\lambda_k + \lambda_l - 4)(a_{kl}'' \cos(\varphi) - \\
& - a_{kl}' \sin(\varphi) - a_{kl}' \sin(\varphi) - a_{kl} \cos(\varphi)) + (a_{kl}'' \sin(\varphi) + a_{kl}' \cos(\varphi) + a_{kl}' \cos(\varphi) - \\
& - a_{kl}' \sin(\varphi))(\psi_m'' + \lambda_m(2 - \lambda_m)\psi_m) + (-\lambda_k + \lambda_l - 4)(a_{kl}' \cos(\varphi) - a_{kl} \sin(\varphi)) + \\
& + (a_{kl}'' \sin(\varphi) + a_{kl}' \cos(\varphi))(\psi_m'' + \lambda_m(2 - \lambda_m)\psi_m') + (-\lambda_k + \lambda_l - 4)(a_{kl}' \cos(\varphi) - \\
& - a_{kl} \sin(\varphi)) + (a_{kl}'' \sin(\varphi) + a_{kl}' \cos(\varphi))(\psi_m'' + \lambda_m(2 - \lambda_m)\psi_m') + (-\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \times \\
& \times \cos(\varphi) + a_{kl}' \sin(\varphi)(\psi_m^{(4)} + \lambda_m(2 - \lambda_m)\psi_m'') + \frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 7)((4 - \lambda_k - \lambda_l)a_{kl} \times \\
& \times \cos(\varphi) + a_{kl}' \sin(\varphi)(\psi_m'' + \lambda_m(2 - \lambda_m)\psi_m) - (\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 7)((\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \times \\
& \times \cos(\varphi) - a_{kl}' \sin(\varphi)(\psi_m'' + \lambda_m(2 - \lambda_m)\psi_m) - \frac{1}{2}(\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 7)(\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 8) \times \\
& \times ((\lambda_k + \lambda_l - 4)a_{kl} \cos(\varphi) - a_{kl}' \sin(\varphi)(\psi_m'' + \lambda_m(2 - \lambda_m)\psi_m))r^{\lambda_k + \lambda_l + \lambda_m - 7} = 0.
\end{aligned}$$

Граничные условия:

$$\psi_n |_{\varphi=\pi} = 0, \psi_n' |_{\varphi=\pi} = 0, \psi_n |_{\varphi=0} = 0, \psi_n' |_{\varphi=0} = 0, \psi_n'' |_{\varphi=\pi} = 0. \quad (20)$$

В работе расчеты представлены для медного сплава M_1 со следующими характеристиками: $G = 0,424 \cdot 10^{11}$ Н/м², с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,28$, $A_2 = 1.3270501 \cdot 10^{-5}$, $P = 450$ МПа. Найденное значение параметра $\lambda_0 = 7/4$.

На рисунке 5 представлена область пластического деформирования, которая включает зоны активного нагружения и разгрузки.

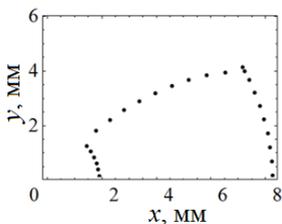


Рисунок 6. – Граница зоны активного нагружения в окрестности трещины

В главе приводилось решение задачи для случая плоского напряженного состояния. При рассмотрении всех возможных собственных значений дифференциального оператора для стали выбрано $\lambda_0 = 1,667$ из условия равенства нулю J -интеграла по замкнутому контуру. Оно обеспечивает непрерывное сращивание зон активного нагружения и разгрузки.

В четвертой главе приводился один из подходов к нахождению критерия прочности, на основе которого устанавливается момент исчерпания несущей способности материала в точке.

J -интеграл по замкнутому контуру $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ равен нулю:

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} \left((U_0 + \frac{1}{2} \rho \cdot u_{i,x_1} u_{i,x_1}) n_1 - \sigma_{ij} n_j u_{i,x_1} \right) d\Gamma = 0. \quad (21)$$

Подставляя в уравнение разложения через функцию напряжений, получаем соотношение для нахождения λ_0 .

Члены, входящие в соотношение J -интеграла, приняли вид:

$$J = J_1 + J_2 - J_3, \quad (22)$$

$$\text{где } J_1 = \int_{\Gamma_t \cup \Gamma_1} U_0 \cdot n_1 d\Gamma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -((\sigma_{rr} \cdot \varepsilon_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} \cdot \varepsilon_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\varphi} \cdot \varepsilon_{r\varphi})) \cdot r \cdot \sin \varphi d\varphi.$$

Представим компоненты вектора перемещений в виде асимптотических разложений:

$$u_r(r, \varphi) = U_0(\varphi) r^{\lambda_0}, \quad u_\varphi(r, \varphi) = V_0(\varphi) r^{\lambda_0}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned}
J_2 = & -\frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi} \left((u_{r,r} \cos \varphi - u_{r,\varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r})^2 + (-u_{\varphi,\varphi} \sin \varphi + r \cdot u_{\varphi,r} \cos \varphi + \right. \\
& \left. + u_{\varphi} \cos \varphi)^2 \right) r \sin \varphi d\varphi, J_3 = \int_0^{2\pi} - \left((\sigma_{11} (-u_{r,\varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r} + u_{r,r} \cos \varphi) + \sigma_{21} (-u_{\varphi,\varphi} \times \right. \\
& \left. \times \sin \varphi + r \cdot u_{\varphi,r} \cos \varphi + u_{\varphi} \cos \varphi) \right) r \sin \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \left(\sigma_{12} (-u_{r,\varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{r} + u_{r,r} \cos \varphi) + \right. \\
& \left. + \sigma_{22} (-u_{\varphi,\varphi} \sin \varphi + r \cdot u_{\varphi,r} \cos \varphi + u_{\varphi} \cos \varphi) \right) r \cos \varphi d\varphi.
\end{aligned} \tag{24}$$

Из условия равенства нулю J -интеграла для стали 12Х18Н9Т для случая плоской деформации $\lambda_0 = 1,668$, для случая плоского напряженного состояния $\lambda_0 = 1,762$.

Энергия переходит в работу образования новых поверхностей.

$$A = 2G_c l b, \tag{25}$$

где l – длина трещины, b – толщина пластины, G_c – удельная работа образования новых поверхностей на единицу площади поверхности.

В критическом состоянии:

$$\frac{d\Pi}{dl} = \frac{P^2 \pi l_{\Gamma p} b}{E} = \frac{dA}{dl} = 2G_c b, \tag{26}$$

отсюда максимальная допустимая длина трещины $l_{\Gamma p}$ при заданной нагрузке P по формуле Гриффитса определяется:

$$l_{\Gamma p} = \frac{2G_c E}{\pi P^2}, \tag{27}$$

где l – длина трещины, E – модуль Юнга, P – значение приложенной нагрузки.

При изменении Δl изменяется J -интеграл и принимает вид:

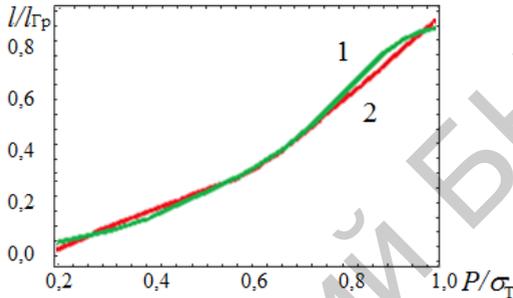
$$J = \frac{2\pi P^2 l}{3E} F(P), \tag{28}$$

где $F(P)$ – функция, зависящая от нагрузки, соотнесенной к пределу текучести, E – модуль упругости.

На основании энергетического критерия локального разрушения, получено выражение критической длины трещины в виде:

$$l = l_{\Gamma p} (1 - 4F(P))^{-1} = l_{\Gamma p} \left(1 - 4J \frac{3E}{2\pi P^2}\right)^{-1}. \quad (29)$$

График зависимости длины представлен на рисунке 7, соотношенной к допустимой длине по Гриффитсу от приложенной нагрузки, соотношенной к пределу текучести для стали 12Х18Н9Т с модулем упругости 1,95 ГПа и пределом текучести 280 МПа.



1 – значения, полученные в рамках деформационной теории, 2 – значения, полученные методом асимптотических разложений, в рамках теории течения

Рисунок 7. – Зависимость длины трещины $l/l_{\Gamma p}$ от величины нагрузки

Полученные результаты дают возможность применения метода асимптотических разложений при расчете на прочность металлических конструкций с дефектами типа трещин в рамках теории течения с упрочнением. Рисунок 7 демонстрирует корректность использования метода асимптотических разложений. Данные рисунка 7 позволяют заключить, что применение теории течения с упрочнением дают возможность рассматривать задачи в более сложной постановке, с учетом особенностей поведения материала.

Установлены зависимости границ промежуточной структуры окрестности трещины от пластических свойств материала. Результаты, подтверждают значительное влияние пластических свойств материала на геометрию пластической области; показывают увеличение этой области при замене одного исследуемого материала (сталь) на другой (медь) с более ярко выраженными пластическими свойствами. Также установлено, что для легированной стали область промежуточной структуры окрестности трещины не превышает 12,5% от ее длины, для меди – 23% при плоской деформации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Разработана методика постановки и решения краевых задач по определению напряженно-деформированного состояния растянутой стальной пластины из упругопластического материала с трещиной, основанная на методе асимптотических

разложения, которая учитывает пластические свойства материала и наличие зон разгрузки, что позволяет определить члены асимптотических разложений для компонентов напряжений. Результаты исследования напряженно-деформированного состояния упрочняющегося упругопластического материала с трещиной, проведенного на основе предложенного варианта метода, позволяют, в отличие от существующих методик, строить аналитические выражения компонентов тензоров напряжений и деформаций для переходной области из упругого в пластическое состояние; а также описывать геометрии пластических зон для стали и меди в рамках определяющих соотношений теории течения с упрочнением и разгрузкой при плоской деформации и плоском напряженном состоянии [1, 2, 6, 7, 10, 15, 16].

2. Построена система разрешающих дифференциальных уравнений для задачи о растяжении стальной пластины, содержащей трещину, с граничными условиями на ее берегах. Система впервые представлена на основе метода асимптотических разложений в рамках теории течения с упрочнением, что позволяет моделировать перераспределения напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины при плоской деформации и плоском напряженном состоянии [3, 4, 8, 9, 11, 12, 22].

3. Создана механико-математическая модель определения напряженно-деформированного состояния в окрестности квазистатической трещины нормального отрыва в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния, позволяющая проводить численно-аналитический анализ прочностных характеристик в зависимости от величины нагрузок и пластических свойств материала; находить границу зон активного нагружения и разгрузки; делать прогноз направления развития трещины; вычислять интенсивность напряжений, среднее и максимальное напряжения в виде непрерывных функций. Применение соответствующих аналитических решений, полученных в рамках теории течения с упрочнением, впервые дает возможность учесть сложную геометрию промежуточной структуры окрестности трещины. Достоверность полученных в работе результатов подтверждается совпадением полученных данных с ранее выполненными приближенными оценками напряженно-деформированного состояния пластины, полученными авторами, решающими эту задачу другими методами [4, 18, 19].

4. Выявлены закономерности влияния пластических свойств материала, величины напряжений и приложенной нагрузки на первоначальное изменение длины трещины при росте границ промежуточной структуры окрестности трещины, где применяется метод асимптотических разложений. Результаты, подтверждают значительное влияние пластических свойств материала на геометрию пластической области; показывают увеличение этой области при замене одного исследуемого материала (сталь) на другой (медь) с более ярко выраженными пластическими свойствами. Установлено, что для легированной стали область промежуточной структуры окрестности трещины не превышает 12,5% от ее длины, для меди – 23% при плоской деформации. При этом обнаружены участки подрастания трещины, которые близки линейным при возрастании приложенной нагрузки, тогда как в целом, функция роста не является линейной [5, 13, 14, 17, 20, 21].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Рекомендуется использовать результаты для дальнейшего развития и совершенствования методов механики разрушения; при выполнении научно-исследовательских фундаментальных и прикладных тем, связанных с изучением распространения трещин в конструкциях, изготовленных из упругопластического материала. Разработанная методика может применяться в расчетной практике научно-исследовательских организаций и конструкторских бюро машино- и приборостроения, при прочностных расчетах проектируемого оборудования. Также рекомендуется использовать результаты диссертации для оценки напряженно-деформированного состояния конструкций, содержащих трещины, с целью оценки их эксплуатационной надежности и долговечности. Результаты позволят решать прикладные задачи по определению характеристик предельного состояния конструкции с целью мотивированного выбора ее геометрических параметров с учетом прочностных свойств материала; по проверке решений задач о напряженно-деформированном состоянии упругопластических материалов, полученных численными методами.

Результаты проведенных исследований нашли применение в учебном процессе БНТУ, что отражено в актах внедрения. На приборостроительном факультете внедрение результатов усиливает практическую значимость применения теоретических знаний (использование функциональных рядов и асимптотических разложений при решении задач по определению прочностных характеристик материалов, в которых обнаруживается трещина) и обеспечивает углубленное усвоение практических приемов работы с программными комплексами MathCad, Mathematica в рамках дисциплин «Математика», «Информатика», «Прикладная математика», что позволяет улучшить качество подготовки специалистов.

Приоритетным направлением применения результатов диссертационной работы являются обеспечение работоспособности стальных конструкций и анализ напряженно-деформированного состояния в окрестности дефекта.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ**Статьи в научных журналах**

1. Нифагин, В.А. Метод асимптотических разложений в теории упругопластических трещин / В.А. Нифагин, М.А. Бубич [девичья фамилия Гундиной М.А.] // Вестні НАН Беларусі. – 2011. – № 4. – С. 60–66.
2. Нифагин, В.А. Напряженно-деформированное состояние в окрестности вершины трещины для неголономной пластичности в условиях плоского напряженного состояния / В.А. Нифагин, М.А. Гундина // Механика машин, механизмов и материалов. – 2012. – № 1. – С. 47–52.
3. Нифагин, В.А. Квазистатический стационарный рост упругопластической трещины / В.А. Нифагин, М.А. Гундина // Вестник СамГУ. – 2014. – № 7. – С. 85–95.
4. Nifagin, V. Quasistatic stationary growth of elastoplastic single crack / V. Nifagin, M. Hundzina // International Journal of Engineering, Business and Enterprise Applications. – 2014. – № 10. – P. 6–12.
5. Гундина, М.А. Энергетические инварианты в теории упругопластических трещин / М.А. Гундина // Наука и техника. – 2017. – № 4. – С. 355–362.

Статьи в сборниках трудов и материалах научных конференций

6. Бубич, М.А. Анализ полей напряжений и деформаций в окрестности вершины трещины в теории течения с упрочнением / М.А. Бубич [девичья фамилия Гундиной М.А.] // Исследования и разработки в области машиностроения, энергетики и управления : материалы XI Междунар. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов, Гомель, 28–29 апр. 2011 г. / М-во образования Респ. Беларусь, Гомель. гос. техн. ун-т им. П. О. Сухого. – Гомель, 2011. – С. 441–444.
7. Нифагин, В.А. Полные решения краевых задач о произвольно ориентированной трещине в инкрементальной теории пластичности / В.А. Нифагин, М.А. Бубич // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: материалы 6-й междунар. конф., Минск, 12–17 сент. 2011 г. / Институт математики НАН Беларусі. – Минск, 2012. – С. 93–96.
8. Гундина, М.А. Асимптотика напряжений на этапе страгивания трещины нормального отрыва в теории течения с упрочнением / М.А. Гундина // Научные стремления – 2012: материалы 3-й междунар. молодежной науч.-практ. конф., Минск, 6–9 ноября 2012 г. / Совет молодых учёных Национальной академии наук Беларусі: в 2 т. – Минск, 2012. – Т.1. – С. 389–392.
9. Нифагин, В.А. Асимптотика напряжений промежуточной структуры для страгивающейся трещины нормального отрыва / В.А. Нифагин, М.А. Гундина // Механика 2013: материалы VI Белорусского конгресса по теоретической и прикладной механике, Минск, 23–25 окт. 2013 г. / Белорус. нац. техн. ун-т. – Минск, 2013. – С. 273–276.
10. Гундина, М.А. Статическая трещина в упрочняющемся упругопластическом материале с учетом разгрузки / М.А. Гундина // Приборостроение – 2013: материалы 6-ой междунар. конф., Минск, 20–22 ноября 2013 г. / Белорус. нац. техн. ун-т; редкол. Б.М. Хрусталева (гл. ред.) [и др.]. – Минск, 2013. – С. 280–282.

11. Нифагин, В.А. Задача о страгивании трещины в производных компонент напряжений и деформаций / В.А. Нифагин, М.А. Гундина // Деформация и разрушение материалов и наноматериалов: материалы 5-й междунар. конф., Минск, 26–29 ноября 2013 г. / ИМЕТ РАН. – Москва, 2013. – С. 879–881.

12. Nifagin, V. Asymptotic of stresses in the problem of the subcritical crack propagation / V. Nifagin, M. Hundzina // CMM-2013 20th International Conference on Computer Methods in Mechanics, Poznań, 27–31 August 2013, Short Papers, p. TS05-03-04 / CRC Press/Balkema, Taylor & Francis Group, London, 2014. – P. – 477–478.

13. Нифагин, В.А. Применение J-интеграла к вычислению собственных значений в краевых задачах теории трещин / В.А. Нифагин, М.А. Гундина // Инновации в материаловедении : материалы II Всероссийской молодежной науч.-тех. конф., Москва, 1–4 июня 2015 г. – Москва, 2015. – С. 392–393.

14. Гундина, М.А. Структура окрестности вершины трещины / М.А. Гундина // Инновационные технологии обучения физико-математическим и профессионально-техническим дисциплинам: материалы 9-й междунар. научн.-практ. конф., Мозырь, 21–24 марта 2017 года / МПГУ им. И.П. Шамякина. – Мозырь, 2017. – С.130–133.

Тезисы докладов

15. Нифагин, В.А. Параметры деформирования трещины нормального отрыва в теории течения с упрочнением / В.А. Нифагин, М.А. Бубич [девичья фамилия Гундина М.А.] // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 9-й междунар. науч.-техн. конф., Минск, 27–29 янв. 2011 г.: в 4 т. / Белорус. нац. техн. ун-т; редкол. Б.М. Хрусталев (гл. ред) [и др.]. – Минск, 2011. – Т.3. – С. 332.

16. Нифагин, В.А. Краевая задача о трещине общего вида с определяющими соотношениями инкрементальной теории пластичности / В.А. Нифагин, М.А. Гундина // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тез. докл. междунар. конф. Минск, 12–17 сентября 2011 г. / Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2011. – С. 112–113.

17. Нифагин, В.А. Докритический рост упругопластической трещины / В.А. Нифагин, М.А. Гундина // XI Белорусская математическая конференция : тез. докл. междунар. науч. конф. Минск, 4–9 ноября 2012 г. / Институт математики НАН Беларуси. – Минск, 2012. – Т.3. – С. 83–84. .

18. Нифагин, В.А. Области активного нагружения и разгрузки на этапе страгивания трещины в условиях плоского напряженного состояния в математической теории пластичности / В.А. Нифагин, М.А. Гундина // Боголюбовські читання DIF – 2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування: тез. докл. междунар. конф., Севастополь, 23–30 июня 2013 г. – /Институт математики НАН Украины. – Киев, 2013. – С. 303–304.

19. Гундина, М.А. Построение границ областей активного нагружения и разгрузки у вершины страгивающейся трещины / М.А. Гундина // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 11-й междунар. науч.-техн. конф., Минск: в 4 т. / Белорус. нац. техн. ун-т; редкол. Б.М. Хрусталев (гл. ред) [и др.]. – Минск, 2013. – Т.3. – С. 289.

20. Нифагин, В.А. Применение J-интеграла к вычислению собственных значений краевой задачи о стационарно распространяющейся трещине в упрочняющем-

ся упругопластическом материале / В.А. Нифагин, М.А. Гундина // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : тез. докл. 6-й междунар. конф. Минск, 14–15 сентября 2015 г. – Минск, 2015. – С. 412.

21. Гундина, М.А. Применение J-интеграла для вычисления собственных значений дифференциальных операторов // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 13-й междунар. науч.-техн. конф., Минск: в 4 т. / Белорус. нац. техн. ун-т; редкол. Б.М. Хрусталева (гл. ред) [и др.]. – Минск, 2015. – Т.3. – С. 412.

22. Гундина, М.А. Сравнительный анализ асимптотического и численного решений задачи об упругопластической трещине / М.А. Гундина // Наука – образованию, производству, экономике: материалы 14-й междунар. науч.-техн. конф., Минск: в 4 т. / Белорус. нац. техн. ун-т; редкол. Б.М. Хрусталева (гл. ред) [и др.]. – Минск, 2016. – Т.3. – С. 408.

РЕПОЗИТОРИЙ БНТУ

РЭЗІЮМЭ

Гундзіна Марыя Анатол'еўна

Метады асімптатычных раскаданняў у задачах распаўсюджвання расколін для пругкапластычных асяроддзях з умацаваннем

Ключавыя словы: метады асімптатычных раскаданняў, пругка-пластычны матэрыял, прамалінейная расколіна, напружана-дэфармаваны стан.

Мэта працы: распрацоўка метаду асімптатычных раскаданняў для рашэнняў статычных і квазістатычных задач тэорыі расколін, а таксама распрацоўка падыходаў і метады камп'ютэрнага мадэлявання для даследавання напружана-дэфармаванага стану ўмацаванага пругка-пластычнага матэрыялу з прамалінейнай расколінай.

Метады даследавання: колькасна-аналітычны метады асімптатычных раскаданняў для вырашэння статычнай і квазістатычнай крайвых задач тэорыі расколін ва ўмацаваных пругка-пластычных матэрыялах, які дазваляе пабудавань ітэрацыйную працэдуру для знаходжання кампанентаў тэнзару напружанняў і дэфармацый ў выглядзе шэрагаў па ступенях адлегласці ад вяршыні расколіны.

Атрыманьня вынікі і іх навiзна: матэматычнае апісанне напружана-дэфармаванага стану ўмацаванага пругка-пластычнага матэрыялу з расколінай на аснове метаду асімптатычнага раскадання; пабудаваньня рашэння задачы аб дакрытычным росце расколіны нармальнага адрыву ва ўмовах плоскай дэфармацыі і плоскага напружанага стану; метадыка атрымання ўласных значэнняў нелінейных дыферэнцыяльных апэратараў крайвой задачы тэорыі расколін; метадыка знаходжання мяжы падзелу паміж вобласцю актыўнага напружання і вобласцю разгрузкі; пабудаваньня рашэння задач даследавання стану прамалінейнай расколіны ва пругка-пластычным целе, якія дазваляюць, у адрозненне ад існуючых падыходаў, выконваць даследаванні па азначэнні крытычнага значэння даўжыні расколіны.

Рэкамендацыі па выкарыстання і галіна прымянення: Падыходы, прыёмы і тэхналогіі, выкарыстання і атрымання ў дысертацыйнай працы, могуць быць выкарыстаны для далейшага развіцця і ўдасканалення метадаў адэкватнага мадэлявання і вывучэння развіцця расколін у механіцы; пры выкананні навукова-даследчых прыкладных тэм, звязаных з вывучэннем распаўсюджвання расколін у канструкцыях пругка-пластычнага матэрыялу. Вынікі даследаванняў выкарыстаны пры чытанні спецыяльных курсаў студэнтам факультэтаў, звязаных з камп'ютарным мадэляваннем механічных працэсаў. Распрацаваныя варыянты метаду асімптатычнага раскадання можна выкарыстоўваць для ацэнкі напружана-дэфармаванага стану канструкцый, якія змяшчаюць расколіны, з гэтай ацэнкі эксплуатацыйнай надзейнасці і даўгавечнасці канструкцыі.

РЕЗЮМЕ

Гундина Мария Анатольевна

Методы асимптотических разложений в задачах распространения трещин в упругопластических средах с упрочнением

Ключевые слова: метод асимптотических разложений, упругопластический материал, прямолинейная трещина, напряженно-деформированное состояние.

Цель работы: разработка метода асимптотических разложений для решений статических и квазистатических задач теории трещин, а также разработка подходов и методик компьютерного моделирования для исследования напряженно-деформированного состояния упрочняющегося упругопластического материала с прямолинейной трещиной.

Методы исследования: численно-аналитический метод асимптотических разложений для решения статической и квазистатической краевых задач теории трещин в упрочняющихся упругопластических материалах, позволяющий построить итерационную процедуру для нахождения компонентов тензоров напряжений и деформаций в виде рядов по степеням расстояния от вершины трещины.

Полученные результаты и их новизна: математическое описание напряженно-деформированного состояния упрочняющегося упругопластического материала с трещиной на основе метода асимптотических разложений; найденные решения задачи о докритическом росте трещины нормального отрыва в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния; методика получения собственных значений нелинейных дифференциальных операторов в краевой задаче теории трещин; методика нахождения границы раздела между областью активного нагружения и областью разгрузки; построенные решения задач исследования состояния прямолинейной трещины в упругопластическом теле, позволяющие, в отличие от существующих подходов, выполнять исследования по определению критического значения длины трещины.

Рекомендации по использованию и область применения:

Подходы, приемы и технологии, использованные и полученные в диссертационной работе, могут быть использованы для дальнейшего развития и совершенствования методов адекватного моделирования и изучения развития трещин в механике; при выполнении научно-исследовательских фундаментальных и прикладных тем, связанных с изучением распространения трещин в конструкциях упругопластического материала. Результаты исследований используются при чтении специальных курсов студентам факультетов, связанных с компьютерным моделированием механических процессов. Разработанные варианты метода асимптотических разложений можно использовать для оценки напряженно-деформированного состояния конструкций, содержащих трещины, с целью оценки эксплуатационной надежности и долговечности конструкции.

SUMMARY

Hundzina Maryia Anatolevna

Methods of asymptotic expansions in the problem of crack propagation for elastic-plastic medium with hardening

Keywords: method of asymptotic expansions, elastic-plastic material, straight crack, the stress-strain state.

Objective: to develop a method of asymptotic expansions for solutions of static and quasi-static problems of the crack theory, as well as the development of approaches and computer simulation techniques for the study of stress-strain state of a hardening elastic-plastic material with a straight crack.

Methods: numerically-analytical method of asymptotic expansions for the solution of static and quasi-static boundary value problems of the crack theory in the hardening of elastic-plastic materials, to build an iterative procedure for finding the stress and strain tensor components in the form of series in powers of the distance from the crack tip.

The results and their novelty: a mathematical description of the stress-strain state of a hardening elastic-plastic material with a crack, based on the method of asymptotic expansions; founded solving of the problem about subcritical growth of normal separation cracks in plane strain and plane stress; technique to obtain the eigenvalues of nonlinear differential operators for boundary value problem of the crack theory; method of finding the border between the area of the active loading and unloading area; founded solving of the study state of straight crack in the elastic-plastic body, allowing, unlike existing approaches, to determine the critical crack length.

Recommendations for the use and application: The approaches, methods and technologies, obtained in the research, can be used for further development and improvement of adequate methods of modeling and study of the development of cracks in the mechanics; in research of fundamental and applied topics, related to the study of crack propagation in structures of elastic-plastic material. The research results can be used for reading special courses for students of faculties, related to computer modeling of mechanical processes. Developed variants of the method of asymptotic expansions can be used to assess the stress-strain state of structures containing cracks, to evaluate the operational reliability and durability of the structure.

Научное издание

ГУНДИНА

Мария Анатольевна

**МЕТОДЫ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ
В ЗАДАЧАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИН
В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ
СРЕДАХ С УПРОЧНЕНИЕМ**

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.02.04 – Механика
деформируемого твердого тела

Подписано в печать 05.01.2018. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Ризография.

Усл. печ. л. 1,40. Уч.-изд. л. 1,09. Тираж 60. Заказ 10.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.