

НЕОБРАТИМОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ ВСЛЕДСТВИЕ ЛОКАЛЬНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Дац Е.П., Мурашкин Е.В.

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения
Российской академии наук, Владивосток*

Введение. Поле остаточных напряжений формируется в процессе упругопластического деформирования при последующее разгрузке таким образом продеформированного материала. Известно возникновение остаточных напряжений вследствие интенсивного теплового воздействия, например в окрестности сварных швов [6]. Очевидно, что в этом случае процесс упругопластического деформирования инициируется быстрым нагревом материала по линии сварки. Известны инженерные методы расчета уровня остаточных напряжений в зоне термического влияния сварного шва [8]. Здесь приводится точное решение задачи формирования остаточных напряжений в предположении, что связанностью процессов теплопроводности и деформирования в условиях интенсивного теплового воздействия можно пренебречь, то есть провести расчеты в рамках теории температурных напряжений [1,7], учитывая при этом зависимость предела текучести от температуры.

Основные модельные зависимости. Пусть до момента времени $t = 0$ пластина находится в свободном состоянии при комнатной температуре T_0 . Материал пластины считаем упругопластическим, подчиняющимся математической модели типа Прандтля-Рейса [2,3] в которой деформации e_{ij} полагаются малыми и складываются из упругих e_{ij}^e и пластических e_{ij}^p составляющих деформаций

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1)$$

Уровень и распределение упругих деформаций и температуры по пластине задают напряжения в ней, рассматриваемые согласно закону Дюамеля-Неймана

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e + 3\alpha K\theta)\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e, \quad \theta = T(r, t) - T_0 \quad (2)$$

Здесь λ , μ – параметры Ламе, K – модуль всестороннего сжатия материала ($3K = 3\lambda + 2\mu$), α – коэффициент линейного температурного расширения материала, $T(r, t)$ – текущая температура. Начало процесса пластического течения в материале пластины свяжем с выполнением условия пластичности в форме Треска [3]

$$f(\sigma_{ij}) = \max |\sigma_i - \sigma_j| - 2k(\theta) = 0 \quad (3)$$

где σ_i – главные напряжения, $k(\theta)$ – предел текучести материала при заданной температуре. Далее в расчетах для $k(\theta)$ принимается простейшая линейная зависимость $k(\theta) = k_0 - \beta\theta$, в которой k_0 – предел текучести материала при комнатной температуре, β – теплофизическая постоянная материала, задающая степень падения предела текучести с повышением температуры. В условиях принятого принципа максимума Мизеса [3] поверхность (3) становится пластическим потенциалом, следствием которого является ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \xi \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \xi = \sqrt{\varepsilon_{kl}^p \varepsilon_{lk}^p} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{nm}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4)$$

Если к соотношениям (1) – (4) добавить локальные следствия законов сохранения (уравнение движения и уравнение баланса внутренней энергии), приняв при этом в качестве закона теплопроводности закон Фурье, то получим замкнутую математическую модель деформирования.

Постановка задачи. Упругое деформирование. Пусть бесконечная пластина нагревается так, что температура на её линии, являющейся окружностью радиуса R , растёт пропорционально времени. Данное воздействие приведет к росту деформаций и напряжений в материале пластины. Считая толщину пластины достаточно малой, полагаем, что пластина находится в условиях плоского напряженного состояния так, что в цилиндрической системе координат r, φ, z нормальные напряжения σ_{zz} на площадках, ортогональных пластине равны нулю

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)e_{zz} + \lambda(e_{rr} + e_{\varphi\varphi}) - 3\alpha K\theta = 0$$

$$e_{rr} = e_{rr}^e = u_{r,r} \quad e_{zz} = e_{zz}^e = u_{z,z} \quad e_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi}^e = \frac{u_r}{r}$$

Для других отличных от нуля компонент тензора напряжений в таком случае согласно (2) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} u_{r,r} + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda + 2\mu)} \frac{u_r}{r} - \frac{6\alpha\mu K}{(\lambda + 2\mu)} \theta \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \frac{u_r}{r} + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda + 2\mu)} u_{r,r} - \frac{6\alpha\mu K}{(\lambda + 2\mu)} \theta \end{aligned} \quad (5)$$

Подстановка значений компонент напряжений из (5) в уравнения равновесия, записанные в цилиндрической системе координат, приводит к уравнению для единственной отличной от нуля компоненты вектора перемещений

$$u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} = \frac{3\alpha K}{2(\lambda + \mu)} \theta_{,r} \quad (6)$$

Если в уравнении баланса внутренней энергии (локальной формулировке закона сохранения энергии) пренебречь источником тепла, вызванного деформированием (связанностью процессов деформирования и теплопередачи), то для нестационарного распределения температуры по пластине будем иметь классическое уравнение теплопроводности [4,5]. Его решение при условии, что, начиная с момента времени $t = 0$ в пластине, находящейся до того при комнатной температуре T_0 производится нагрев по линии $r = R$ до температуры T_k , строится конечно-разностным методом [9].

По известному распределению $\theta(r, t)$ перемещения могут быть найдены интегрированием уравнения (6) отдельно в областях $r < R$ и $r > R$. Также по рассчитанному полю перемещений вычисляется распределение напряжений. Для области $r < R$ получим

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{b}{\mu r} \psi(r, t) + c_1 r \\ \sigma_{rr} &= -\frac{2b}{r^2} \psi(r, t) + qc_1 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{2b}{r^2} (\psi(r, t) - r^2 \theta) + qc_1 \end{aligned} \quad (7)$$

$$b = \frac{3\alpha\mu K}{2(\lambda + \mu)}, \quad q = \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)}, \quad \psi(r, t) = \int_0^r \theta(\rho, t) \rho d\rho$$

В области $r > R$ найдем

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{b}{\mu r} \phi(r, t) + \frac{c_2}{r} \\ \sigma_{rr} &= -\frac{2b}{r^2} \phi(r, t) - 2\mu \frac{c_2}{r^2} \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= -\sigma_{rr} - 2b\theta \\ \phi(r, t) &= \int_R^r \theta(\rho, t) \rho d\rho \end{aligned} \quad (8)$$

Выполняя условия непрерывности перемещений и напряжений на границе $r = R$, найдем постоянные интегрирования c_1 и c_2

$$c_1 = 0; c_2 = b\psi(R, t) \quad (9)$$

Выписанные зависимости (7) – (9) решают поставленную задачу, но имеют, однако, ограничение, связанное с выходом напряженных состояний (7) и (8) на поверхность нагружения, вследствие чего в материале пластины начнется пластическое течение. Область пластического течения развивается от линии $r = R$ в обе стороны и в некоторый текущий момент нагрева занимает область, расположенную между линиями $r = r_1$ и $r = r_2$ ($r_1 < R < r_2$). Вне данной области пластина продолжает деформироваться обратимо и квазистатические параметры подобных напряженно-деформированных состояний будут по-прежнему задаваться зависимостями (7) – (8) с тем только отличием, что постоянные интегрирования в них будут определяться значениями, отличными от (9)

$$c_1(r_1) = \frac{2}{q} \left(-\frac{b}{r_1^2} \psi(r_1, t) + b\theta_1 - k_1 \right), \quad c_2(r_2) = \frac{r_2^2}{\mu} (b\theta_2 - k_2)$$

$$\theta_n = \theta(r_n), \quad k_n = k(\theta_n), \quad n = 1, 2$$

В развивающейся области пластического течения напряженные состояния соответствуют точкам поверхности нагружения (3). В рассматриваемом случае это будут точки призмы Треска, лежащие в плоскости $\sigma_{zz} = 0$ пространства главных напряжений на прямой

$$\sigma_{\phi\phi} = -2k(\theta) \quad (10)$$

Интегрируя уравнение равновесия при данном условии, найдем, что во всей области течения

$$\sigma_{rr} = -\frac{2}{r} \int_{r_1}^r k(\theta(\rho, t)) d\rho + \frac{c_3}{r} \quad (11)$$

Обратимые деформации в любой момент времени и в любой точки области пластического течения возможно теперь вычислить по (10) и (11), выразив их через зависимости (2), переписанные в цилиндрических координатах:

$$e_{\phi\phi}^e = 2s(b\theta - k(\theta)) - \frac{g}{r} \left(\frac{c_3}{2} - \int_{r_1}^r k(\theta(\rho, t)) d\rho \right)$$

$$e_{rr}^e = 2s \left(b\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{c_3}{2} - \int_{r_1}^r k(\theta(\rho, t)) d\rho \right) \right) + gk(\theta) \quad (12)$$

$$s = \frac{(\lambda + \mu)}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad g = \frac{\lambda}{\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

Следствием ассоциированного закона пластического течения (4) будет равенство

$$e_{rr}^p = u_{r,r} - e_{rr}^e = 0 \quad (13)$$

Подставляя зависимость (12) в (13) приходим к уравнению для перемещений в области течения

$$u_{r,r} = 2s \left(b\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{c_3}{2} - \int_{r_1}^r k(\theta(\rho, t)) d\rho \right) \right) + gk(\theta)$$

проинтегрировав которое, получим

$$u_r = 2s \left(b \int_{r_1}^r \theta(\rho, t) d\rho + \frac{c_3}{2} \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) - \int_{r_1}^r \frac{1}{\rho} \int_{r_1}^{\rho} k(\theta(\chi, t)) d\chi d\rho \right) + g \int_{r_1}^r k(\theta(\rho, t)) d\rho + c_4$$

Неизвестные константы интегрирования c_3, c_4 и размеры области необратимого деформирования ($r_1 < r < r_2$) найдем из условий неразрывности полей перемещений и напряжений на упругопластических границах (r_1, r_2). В результате несложных преобразований можно получить

$$c_3(r_1) = 2r_1 \left(b\theta_1 - \frac{2b}{r_1^2} \psi(r_1, t) - k_1 \right)$$

$$c_4(r_1) = \frac{2br_1}{q} \left(\theta_1 - \frac{k_1}{b} \right) + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{2}{q} \right) \frac{b}{r_1} \psi(r_1, t)$$

и систему уравнений для определения границ зоны пластического течения

$$\begin{cases} b \int_{r_1}^{r_2} \theta(\rho, t) d\rho - \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\rho} \int_{r_1}^{\rho} k(\theta(\chi, t)) d\chi d\rho - \int_{r_1}^{r_2} k(\theta(\rho, t)) d\rho + \\ + \frac{2b}{r_1} \psi(r_1, t) + \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) + 1 \right) \left(2r_1 \left(b\theta_1 - \frac{2b}{r_1^2} \psi(r_1, t) - k_1 \right) \right) = 0 \\ b\theta_2 r_2 - r_2 k_2 = \int_{r_1}^{r_2} k(\theta(\rho, t)) d\rho + \frac{2b}{r_1} \psi(r_1, t) + 2r_1 k_1 - b\theta_1 r_1 \end{cases}$$

Распределения полей перемещений и напряжений в конечный момент нагрева $t = \tilde{t}$ приведены на рисунках (1, 2) соответственно.

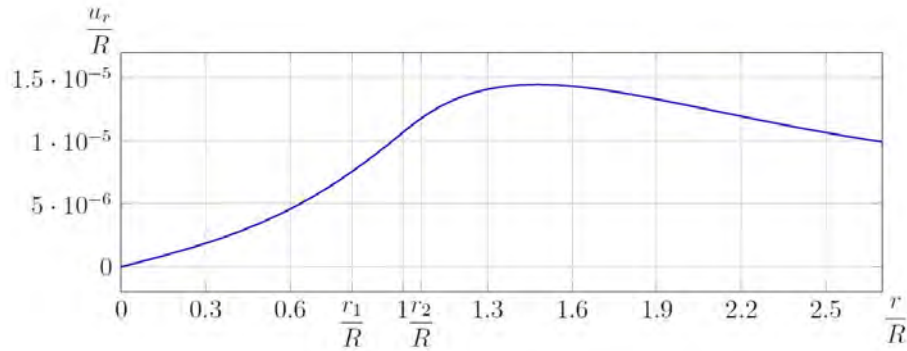


Рисунок 1

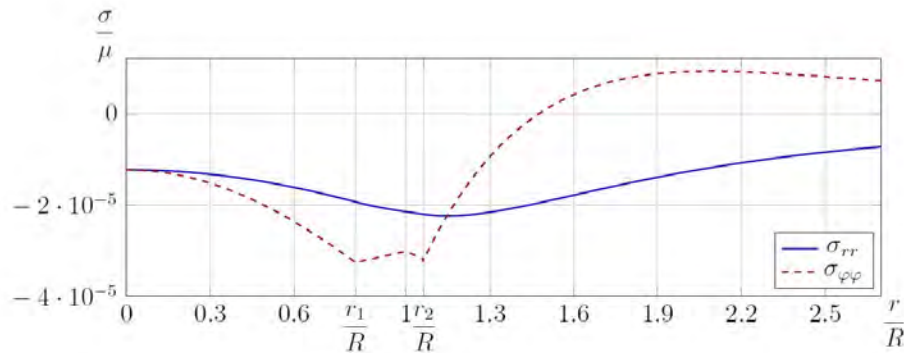


Рисунок 2

Охлаждение пластины. С некоторого момента времени \tilde{t} начнем постепенно охлаждать пластину, в дальнейшем волной сверху обозначим функции и константы, вычисленные в момент времени \tilde{t} . Тогда в областях обратимого деформирования перемещения и напряжения определяются зависимостями (7) – (8) с точностью до констант интегрирования.

В области с накопленными необратимыми деформациями $\tilde{r}_1 < r < \tilde{r}_2$ при разгрузке пластические деформации не изменяются и определяются зависимостями

$$e_{\varphi\varphi}^p = \frac{2bs}{r} \int_{\tilde{r}_1}^r \tilde{\theta}(\rho) d\rho + \frac{2s}{r} \int_{\tilde{r}_1}^r k(\tilde{\theta}(\rho)) \ln(\rho) d\rho + \left(\frac{s}{r} \ln \left(\frac{r}{\tilde{r}_1} \right) + \frac{g}{2r} \right) \tilde{c}_3 +$$

$$+ \frac{2s}{r} \ln(r) \int_{\tilde{r}_1}^r k(\tilde{\theta}(\rho)) d\rho + \frac{\tilde{c}_4}{r} - 2bs\tilde{\theta} + 2sk(\tilde{\theta}) \quad (14)$$

Упругие вычисляются согласно (1)

$$e_{rr}^e = u_{r,r}, \quad e_{\varphi\varphi}^e = \frac{u}{r} - e_{\varphi\varphi}^p \quad (15)$$

Используя (15), закон Дюамеля-Неймана (2) запишется в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} u_{r,r} + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{u}{r} - e_{\varphi\varphi}^p \right) - \frac{6\alpha\mu K}{(\lambda + 2\mu)} \theta \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{u}{r} - e_{\varphi\varphi}^p \right) + \frac{2\lambda\mu}{(\lambda + 2\mu)} u_{r,r} - \frac{6\alpha\mu K}{(\lambda + 2\mu)} \theta \end{aligned} \quad (16)$$

Подставив компоненты тензора напряжений (16) в уравнение равновесия, и заменив компоненты необратимых деформаций согласно (14), получим уравнение относительно радиальной компоненты перемещений

$$u_{r,rr} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} = -\frac{1}{qs} \frac{e_{\varphi\varphi}^p}{r} + \frac{g}{2s} e_{\varphi\varphi}^p{}_{,r} + \frac{b}{\mu} \theta_{,r} \quad (17)$$

Решением уравнения (17) будет функция

$$u_r = \frac{b}{\mu r} \int_{\tilde{r}_1}^r \theta(\rho, t) \rho d\rho - \frac{r}{2qs} \int_{\tilde{r}_1}^r \frac{e_{\varphi\varphi}^p(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{1}{s\mu r} \int_{\tilde{r}_1}^r e_{\varphi\varphi}^p(\rho) \rho d\rho + \frac{(r^2 - \tilde{r}_1^2)c_5}{2qsr} + \frac{c_6}{r}$$

Что позволит вычислить напряжения (16) в области с накопленными необратимыми деформациями

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{2b}{r^2} \int_{\tilde{r}_1}^r \theta(\rho, t) \rho d\rho - \frac{1}{2s} \left(\int_{\tilde{r}_1}^r \frac{e_{\varphi\varphi}^p(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{1}{r^2} \int_{\tilde{r}_1}^r e_{\varphi\varphi}^p(\rho) \rho d\rho \right) + \\ &+ \mu \left(2 + \frac{r^2 - \tilde{r}_1^2}{2r^2 sq} \right) c_5 - \frac{2\mu}{r^2} c_6 \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{2b}{r^2} \int_{\tilde{r}_1}^r \theta(\rho, t) \rho d\rho - \frac{1}{2s} \left(\int_{\tilde{r}_1}^r \frac{e_{\varphi\varphi}^p(\rho)}{\rho} d\rho + \frac{1}{r^2} \int_{\tilde{r}_1}^r e_{\varphi\varphi}^p(\rho) \rho d\rho \right) + \\ &+ \mu \left(2 + \frac{r^2 - \tilde{r}_1^2}{2r^2 sq} \right) c_5 - \frac{e_{\varphi\varphi}^p}{s} - 2b\theta + \frac{2\mu}{r^2} c_6 \end{aligned}$$

Вновь воспользовавшись условиями непрерывности полей перемещений и напряжений на упругопластических границах $(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2)$, найдем неизвестные константы интегрирования. В результате несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} c_1(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) &= \frac{1}{sq} \int_{\tilde{r}_1}^{\tilde{r}_2} \frac{e_{\varphi\varphi}^p(\rho)}{\rho} d\rho \\ c_5(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) &= \int_{\tilde{r}_1}^{\tilde{r}_2} \frac{e_{\varphi\varphi}^p(\rho)}{\rho} d\rho \\ c_2(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) &= \frac{b}{\mu} \psi(\tilde{r}_1, t) + \frac{1}{4\mu s} \int_{\tilde{r}_1}^{\tilde{r}_2} e_{\varphi\varphi}^p(\rho) d\rho \\ c_6(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) &= \frac{b}{\mu} \psi(\tilde{r}_1, t) + c_1(\tilde{r}_1, \tilde{r}_2) \tilde{r}_1^2 \end{aligned}$$

На рис. 3,4 приведены поля перемещений и остаточных напряжений в момент времени, когда тело достигнет своей первоначальной температуры.

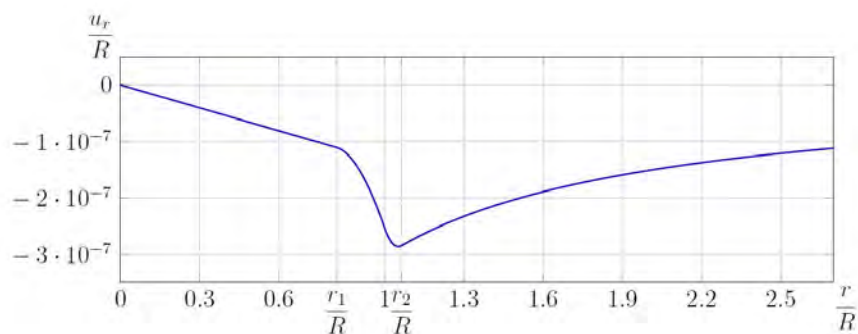


Рисунок 3

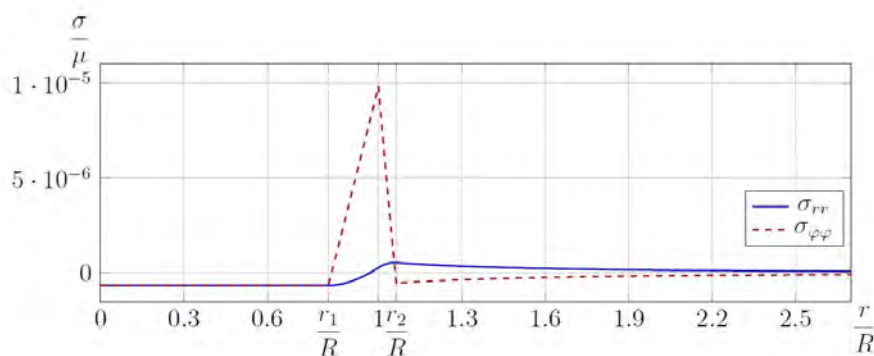


Рисунок 4

Построенное решение позволяет рассчитать распределение полей остаточных напряжений и перемещений в упругопластическом материале тонкой пластины под действием интенсивного теплового воздействия. Получены аналитические зависимости для напряжений, деформаций и перемещений в случае пластического течения, найдены границы области необратимого деформирования.

Резюме

В рамках классической теории упругопластических деформаций рассчитывается одномерный процесс деформирования материала вследствие локального нагрева и последующего охлаждения. Решена задача о формировании остаточных напряжений в тонкой пластине из упругопластического материала при заданном тепловом воздействии. Построены графики полей остаточных напряжений и перемещений.

Литература

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений // М.: Мир, 1964. 520с.
2. Галин Л.А. Упругопластические задачи // М.: Наука. 1984. 232с.
3. Ивлев Д.Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела // М.: Наука, 1978. 208с.
4. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел // М.: Наука, 1964. 487с.
5. Лыков А. В. Теория теплопроводности // М.: Высшая школа, 1967. 599с.
6. Окерблом Н.О., Демьянович В.П., Байкова И.П. Проектирование технологии изготовления сварных конструкций // Ленинград: СудпромГиз, 1963. 602с.
7. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения // М.: Физматгиз, 1963. 251с.
8. Рыкалин Н.Н. Расчеты тепловых процессов при сварке // М.: Машиностроение, 1951. 294с.
9. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем // М.: Наука, 1971. 552 с.

Summary

One-dimensional deformation process of a material due to local heating and subsequent cooling was calculated by the classical elastic-plastic theory. The problem of the formation of residual stresses in a thin plate of elastic material at a given thermal effect was solved. Graphs fields of residual stresses and displacements were given.

Поступила в редакцию 16.10.2012