УДК 531.8

О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТЕЛА В СОПРОТИВЛЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ, БРОШЕННОГО ПОД НЕБОЛЬШИМ УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ

Горбач Н. И., Гурвич Ю. А., Крайник Д. А., Шпургалова М.Ю.

УО «Белорусский национальный технический университет, Минск

В данной работе рассматривается задача о движении артиллерийского снаряда с учетом силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости, при стрельбе по хорошо видимым объектам, допускающим прямое прицеливание, когда выстрел производится под небольшим углом направления ствола орудия к горизонту (обычно не более 15°). В этом случае траектория полета снаряда является пологой, которая называется настильной [1].

Для простоты модели отвлечемся от влияния формы снаряда и многих других факторов, рассматриваемых во внешней баллистике – науке, изучающей движение снаряда после его вылета из ствола орудия, будем рассматривать снаряд как материальную точку, брошенную под углом α_0 к горизонту с начальной скоростью V_0.

При движении на снаряд действуют сила тяжести *P* и сила сопротивления *R* воздуха, зависящая от скорости полета снаряда.

В работе [2] подробно изучено движение снаряда при действии силы сопротивления воздуха $R = kPV$. В этом случае дифференциальные уравнения движения снаряда в декартовых осях решаются аналитически независимо от значения начального угла наклона к горизонту ствола орудия и позволяют подучить уравнения движения, высоту подъема снаряда, дальность полета до достижения максимальной высоты и точное уравнение траектории. Если сила сопротивления $R = kPV^2$, то решение дифференциальных уравнений движения в декартовых осях в квадратурах невозможно. Поэтому они решаются численным методом с применением ЭВМ, либо приближенно аналитически с учетом некоторых допущений.

Рассмотрим аналитическое решение этой задачи с использованием декартовых осей координат и естественных осей с учетом допущений.

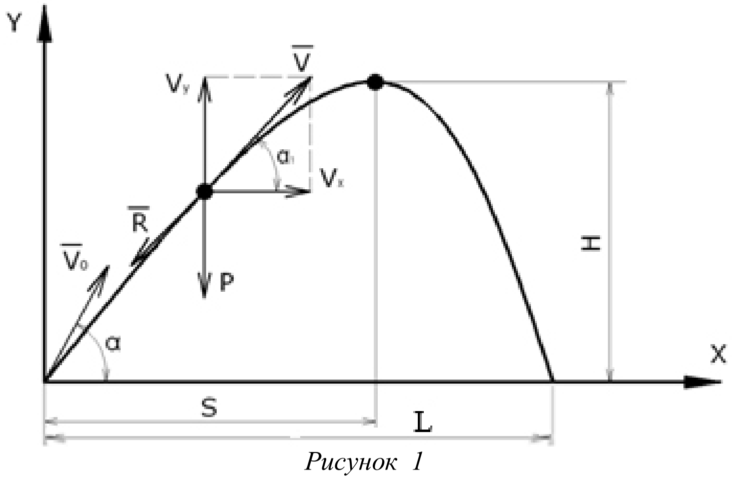

Рисунок 1

Дифференциальные уравнения движения в декартовых осях (рис. 1):

$$m\ddot{x} = -R\cos\alpha,$$
$$m\ddot{y} = -P - R\sin\alpha,$$

где $R = kPV^2$, $P = mg$, $\sin\alpha = \dfrac{V_y}{V}$, $\cos\alpha = \dfrac{V_x}{V}$, $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ С учетом этого эти уравнения после преобразований примут вид:

$$\ddot{x} = -kgV_x\sqrt{V_x^2 + V_y^2} \qquad (1)$$

$$\ddot{y} = -g\left(1 + kV_y\sqrt{V_x^2 + V_y^2}\right) \qquad (2)$$

Заменим в уравнениях (1) и (2) $\ddot{x} = \dfrac{dV_x}{dt}$ и $\ddot{y} = \dfrac{dV_y}{dt}$ и перепишем их в виде:

$$\frac{dV_x}{dt} = -kgV_x^2\sqrt{1+\left(\frac{V_y}{V_x}\right)^2}, \qquad (3)$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -g\left(1 + kV_xV_y\sqrt{1+\left(\frac{V_y}{V_x}\right)^2}\right). \qquad (4)$$

Уравнение (3) и (4) в аналитических функциях не интегрируются. Поэтому в качестве допущения примем $\sqrt{1+\left(\dfrac{V_y}{V_x}\right)^2} = \text{const}$, где $\dfrac{V_y}{V_x} = \dfrac{V_{0y}}{V_{0x}} = tg\alpha_0$, $\alpha_0 \le 15^o$, $\sqrt{1+tg^2\alpha_0} = \dfrac{1}{\cos\alpha_0}$.

Тогда уравнения (3) и (4) могут быть проинтегрированы и имеют вид:

$$\frac{dV_x}{dt} = -\frac{kg}{\cos\alpha_0}V_x^2, \qquad (3')$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -g\left(1 + \frac{k}{\cos\alpha_0}V_xV_y\right). \qquad (4')$$

Интегрируем уравнение (3')

$$\frac{dV_x}{V_x^2} = -\frac{kg}{\cos\alpha_0}dt \Rightarrow \frac{1}{V_x} - \frac{1}{V_{0x}} = \frac{kgt}{\cos\alpha_0}$$

После преобразований получим:

$$V_x = \frac{V_{0x}}{1 + \dfrac{kgt}{\cos\alpha_0}V_{0x}}. \qquad (5)$$

Так как $V_x = \dfrac{dx}{dt}$, то подставив в уравнение (5) и затем проинтегрировав, получим уравнение движения снаряда вдоль оси x

$$x = \frac{\cos\alpha_0}{kg}\ln\left(1 + \frac{kgV_{0x}}{\cos\alpha_0}t\right). \qquad (6)$$

Теперь проинтегрируем уравнение (4'), подставив в него вместо V_x выражение (5)

$$\frac{dV_y}{dt} = -g\left(1 + \frac{k}{\cos\alpha_0}\cdot\frac{V_{0x}}{1+\dfrac{kgt}{\cos\alpha_0}V_{0x}}V_y\right) = -g\left(1 + kV_{0x}\frac{V_y}{\cos\alpha_0 + kgV_{0x}t}\right). \qquad (7)$$

Введем подстановку $V_y = zp$,

$$\frac{dV_y}{dt} = z\frac{dp}{dt} + \frac{dz}{dt}p.$$

Перепишем уравнение (7) с учетом этого в виде:

$$z\frac{dp}{dt} + \frac{dz}{dt}p + g + kpz\frac{gV_{0x}}{\cos\alpha_0 + kgtV_{0x}} = 0. \qquad (8)$$

Разобьем уравнение (8) на два уравнения

$$z\frac{dp}{dt} + kpz\frac{gV_{0x}}{\cos\alpha_0 + kgtV_{0x}} = 0, \qquad (9)$$

$$\frac{dz}{dt}p+g=0. \tag{10}$$

Из уравнения (9) определим p, при котором выполняется это уравнение при $z \neq 0$

$$\left(\frac{dp}{dt}+kp\frac{gV_{0x}}{\cos\alpha_0+kgtV_{0x}}\right)z=0 \Rightarrow \int\frac{dp}{p}=-\int\frac{kgV_{0x}dt}{\cos\alpha_0+kgtV_{0x}} \Rightarrow p=\frac{1}{\cos\alpha_0+kgtV_{0x}}$$

Подставим полученное значение p в уравнении (10), получим:

$$\frac{dz}{dt}\frac{1}{\cos\alpha_0+kgtV_{0x}}+g=0 \Rightarrow \frac{dz}{dt}=-g\left(\cos\alpha_0+kgtV_{0x}\right) \Rightarrow \int_{z_0}^{z}dz=-\int_0^t\left(g\cos\alpha_0+kg^2tV_{0x}\right)dt.$$

После интегрирования и с учетом того, что $p_0=\frac{1}{\cos\alpha_0}$, а $z_0=\frac{V_{0y}}{p_0}=V_{0y}\cos\alpha_0$,, получим выражение для z:

$$z=V_{0y}\cos\alpha_0-gt\cos\alpha_0-\frac{1}{2}kg^2t^2V_{0x}.$$

Тогда проекция скорости на ось y

$$V_y=zp=\frac{V_{0y}\cos\alpha_0-gt\cos\alpha_0-\frac{1}{2}kg^2t^2V_{0x}}{\cos\alpha_0+kgtV_{0x}} \tag{11}$$

Так как $V_y=\frac{dy}{dt}$, то подставим в уравнение (11) и разобьем полученное уравнение на три слагаемых

$$dy=\frac{V_{0y}\cos\alpha_0dt}{\cos\alpha_0+kgtV_{0x}}-\frac{gt\cos\alpha_0dt}{\cos\alpha_0+kgtV_{0x}}-\frac{kg^2t^2V_{0x}}{2\left(\cos\alpha_0+kgtV_{0x}\right)}. \tag{12}$$

Найдем интегралы правой части уравнения (12)

$$I_1=\int_0^t\frac{V_{0y}\cos\alpha_0dt}{\cos\alpha_0+kgtV_{0x}}=\frac{V_{0y}\cos\alpha_0}{kgV_{0x}}\ln\left(1+\frac{kgtV_{0x}}{\cos\alpha_0}t\right), \tag{13}$$

$$\begin{aligned}I_2&=\int_0^t\frac{gt\cos\alpha_0dt}{\cos\alpha_0+kgtV_{0x}}=\int_0^t\frac{\cos\alpha_0\left(\cos\alpha_0-\cos\alpha_0+kgtV_{0x}\right)dt}{kV_{0x}\left(\cos\alpha_0+kgtV_{0x}\right)}=\frac{t\cos\alpha_0}{kV_{0x}}\Bigg|_0^t-\\&-\frac{\cos^2\alpha_0}{k^2gV^2{}_{0x}}\ln\left(\cos\alpha_0+kgtV_{0x}t\Big|_0^t\right)=\frac{t\cos\alpha_0}{kV_{0x}}-\frac{\cos^2\alpha_0}{k^2gV^2{}_{0x}}\ln\left(1+\frac{kgtV_{0x}}{\cos\alpha_0}t\right),\end{aligned} \tag{14}$$

$I_3=\int_0^t\frac{kg^2t^2V_{0x}}{\cos\alpha_0+kgtV_{0x}}dt$. Обозначим $a=kgV_{0x}$, тогда

$$\begin{aligned}I_3&=\int_0^t\frac{gt^2a}{\cos\alpha_0+at}dt=\int_0^t\frac{gt^2}{t+\frac{\cos\alpha_0}{a}}dt=\int_0^t\frac{g\left(t^2-\frac{\cos^2\alpha_0}{a^2}+\frac{\cos^2\alpha_0}{a^2}\right)}{t+\frac{\cos\alpha_0}{a}}dt=\int_0^t gtdt-\int_0^t\frac{g\cos\alpha_0}{a}dt+\\&+\int_0^t\frac{g\frac{\cos^2\alpha_0}{a^2}}{t+\frac{\cos\alpha_0}{a}}dt=\frac{gt^2}{2}-\frac{t\cos\alpha_0}{kV_{0x}}+\frac{\cos^2\alpha_0}{k^2gV^2{}_{0x}}\ln\left(1+\frac{kgV_{0x}}{\cos\alpha_0}t\right).\end{aligned} \tag{15}$$

Подставим I_1, I_2, I_3 в (12) и после преобразований получим уравнение движения снаряда по оси y

$$y=\frac{\sin\alpha_0}{kg}\ln\left(1+kgV_0t\right)+\frac{1}{2k^2gV_0^2}\ln\left(1+kgV_0t\right)-\frac{t}{2kV_0}-\frac{gt^2}{4} \tag{16}$$

Для определения уравнения траектории полета снаряда исключим из уравнения (16) время t, выразив его из уравнения (6), где

$$\ln\left(1+\frac{kgV_{0x}}{\cos\alpha_0}t\right)=\frac{kgx}{\cos\alpha_0}. \tag{17}$$

Тогда

$$t=\frac{1}{kgV_0}\left(e^{\frac{kgx}{\cos\alpha_0}}-1\right).. \tag{18}$$

Подставив (17) и (18) в уравнение (16), получим приближенное уравнение траектории снаряда в осях *xOy*.

$$y=xtg\alpha_0+\frac{x}{2kV_0^2\cos\alpha_0}-\frac{1}{4k^2gV_0^2}\left(e^{\frac{2kgx}{\cos\alpha_0}}-1\right) \tag{19}$$

Сравним уравнение траектории, определяемой по формуле (19) с уравнением траектории при полете в безвоздушном пространстве, определяемой по формуле (20).

$$y=xtg\alpha_0-\frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha_0}. \tag{20}$$

Разложим $f(x)=e^{\frac{2kgx}{\cos\alpha_0}}$ в ряд Тейлора, ограничившись шестью членами разложения, получим после соответствующих преобразований приближенное уравнение траектории полета снаряда в среде с учетом сопротивления

$$y=xtg\alpha_0-\frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha_0}-\frac{kg^2x^3}{3V_0^2\cos^3\alpha_0}-\frac{k^2g^3x^4}{6V_0^2\cos^4\alpha_0}-\frac{k^3g^4x^5}{15V_0^2\cos^5\alpha_0}-.... \tag{21}$$

Сравнивая уравнения (20) и (21), видно, что совпадают только два первых слагаемых уравнения (21), а остальные слагаемые этого уравнения обусловлены сопротивлением воздуха. Таким образом, траектория полета снаряда в воздухе только на начальном участке представляет параболу, затем переходящую в некоторую плоскую кривую, называемую баллистической кривой, которая на начальном участке траектории до достижения максимальной высоты является пологой, а нисходящая ветвь траектории более крутой, т.е. траектория полета не является симметричной кривой.

Рассмотрим решение этой задачи с использованием естественных осей по способу, изложенному в [1].

Дифференциальные уравнения движения снаряда в естественных осях τ и n (касательная и нормаль) (рис. 2) будут иметь вид:

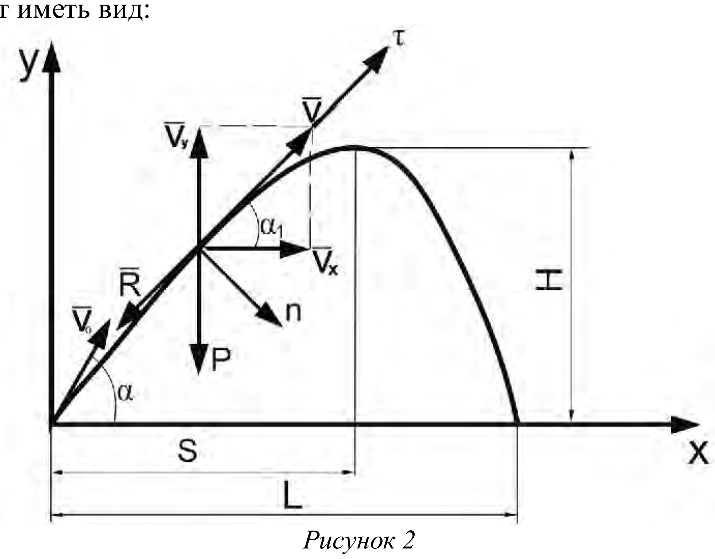

Рисунок 2

$$\frac{P}{g}\frac{dV}{dt} = -kPV^2 - P\sin\alpha, \tag{22}$$

$$\frac{P}{g}\frac{V^2}{\rho} = P\cos\alpha, \tag{23}$$

или после сокращения на P

$$\frac{dV}{dt} = -kgV^2 - g\sin\alpha, \tag{24}$$

$$\frac{V^2}{\rho} = g\cos\alpha, \tag{25}$$

При перемещении точки по траектории на бесконечно малое расстояние ds направление касательный изменяется на бесконечно малый угол $d\alpha$, называемый углом смежности.

Отношение $\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{1}{\rho}$, где $ds = Vdt$ (знак «–» потому, что с возрастанием дуги s угол α убывает)

С учетом этого радиус кривизны

$$\rho = -\frac{Vdt}{d\alpha}. \tag{26}$$

Тогда уравнение (25) примет вид:

$$\frac{Vd\alpha}{dt} = -g\cos\alpha. \tag{27}$$

Выразим из уравнения (27) dt

$$dt = -\frac{Vd\alpha}{g\cos\alpha}. \tag{28}$$

Подставим (27) в уравнение (24) после преобразования получим

$$\frac{dV}{d\alpha} = \frac{kV^3}{\cos\alpha} + Vtg\alpha. \tag{29}$$

Преобразуем уравнение (29)

$$\frac{dV}{d\alpha}\cos\alpha = Vtg\alpha\cos\alpha + kV^3$$

или $\frac{dV}{d\alpha}\cos\alpha - V\sin\alpha = kV^3$, где

$$\frac{dV}{d\alpha}\cos\alpha - V\sin\alpha = \frac{d(V\cos\alpha)}{d\alpha} = kV^3. \tag{30}$$

Умножим правую и левую части уравнения (30) на $\cos^3\alpha$ и разделим переменные

$$\frac{d(V\cos\alpha)}{(V\cos\alpha)^3} = \frac{kd\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{k}{\cos\alpha_0}\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}, \tag{31}$$

где в качестве допущения принято $\cos^3\alpha = \cos\alpha_0\cos^2\alpha$. Отсюда

$$\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos\alpha_0}{k}\frac{d(V\cos\alpha)}{(V\cos\alpha)^3}. \tag{32}$$

Перейдем к уравнению в декартовых координатах

$$dx = V_x dt = V\cos\alpha dt. \tag{33}$$

С учетом выражения (27) для dt получим:

$$dx = V\cos\alpha\left(-\frac{Vd\alpha}{g\cos\alpha}\right) = -\frac{V^2}{g}d\alpha.. \tag{34}$$

Умножим и разделим уравнение (34) на $\cos^2\alpha$, получим с учетом (32)

$$dx = -\frac{(V\cos\alpha)^2}{g}\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = -\frac{(V\cos\alpha)^2}{g}\frac{\cos\alpha_0}{k}\frac{d(V\cos\alpha)}{(V\cos\alpha)^3} = -\frac{\cos\alpha_0}{kg}\frac{d(V\cos\alpha)}{V\cos\alpha}. \tag{35}$$

Интегрируя (35) в пределах x от нуля до x и $V\cos\alpha$ от $V_0\cos\alpha_0$ до $V\cos\alpha$, получим

$$V\cos\alpha = V_0\cos\alpha_0 e^{-\frac{kgx}{\cos\alpha_0}}. \qquad (36)$$

Отсюда

$$V\cos\alpha = V_0\cos\alpha_0 e^{-\frac{kgx}{\cos\alpha_0}}, \qquad (37)$$

Так как $V\cos\alpha = V_x$, то формула (37) устанавливает зависимость скорости движения вдоль оси x от координаты x.

Для определения уравнения траектории полета снаряда подставим (37) в уравнение (31)

$$\frac{d\left(V_0\cos\alpha_0 e^{-\frac{kgx}{\cos\alpha_0}}\right)}{V_0\cos\alpha_0 e^{-\frac{kgx}{\cos\alpha_0}}} = \frac{1}{V_0^2\cos^2\alpha_0}\frac{d\left(e^{-\frac{kgx}{\cos\alpha_0}}\right)}{\left(e^{-\frac{kgx}{\cos\alpha_0}}\right)^3} = \frac{k}{\cos\alpha_0}\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}. \qquad (38)$$

Обозначим $e^{-\frac{kgx}{\cos\alpha_0}} = u$.

Тогда $\int\limits_{u_0}^{u}\frac{du}{u^3} = \int\limits_{u_0}^{u}u^{-3}du = = -\frac{u^{-2}}{2} = -\frac{1}{2u^2}\Bigg|_{u_0}^{u} = -\left(\frac{1}{2u^2} - \frac{1}{2u_0{}^2}\right)$, где $u = e^{-\frac{kgx}{\cos\alpha_0}}$, а при $x = 0$ $u_0 = 1$

$$\text{Тогда} \qquad \int\limits_{u_0}^{u}\frac{du}{u^3} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{u^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e^{-\frac{2kgx}{\cos\alpha_0}}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{\frac{2kgx}{\cos\alpha_0}}\right). \qquad (39)$$

Интеграл от $\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = tg\alpha - tg\alpha_0$. С учетом этого выражение (38) примет вид

$$\frac{k}{\cos\alpha_0}\left(tg\alpha - tg\alpha_0\right) = \frac{\left(1 - e^{\frac{2kgx}{\cos\alpha_0}}\right)}{2V_0^2\cos^2\alpha_0},$$

отсюда

$$tg\alpha = tg\alpha_0 - \frac{1}{2V_0^2\cos^2\alpha_0}\left(e^{\frac{2kgx}{\cos\alpha_0}} - 1\right), \qquad (40)$$

Заменив в уравнении (40) $tg\alpha = \frac{dy}{dx}$ и затем, разделив переменные и проинтегрировав, получим уравнение траектории полета снаряда в координатной форме

$$y = xtg\alpha_0 + \frac{x}{2kV_0^2\cos\alpha_0} - \frac{\int\limits_0^x e^{\frac{2kgx}{\cos\alpha_0}}dx}{2kV_0^2\cos^2\alpha_0} = xtg\alpha_0 + \frac{x}{2kV_0^2\cos\alpha_0} - \frac{\cos\alpha_0}{2kg}\frac{e^{\frac{2kgx}{\cos\alpha_0}}\Big|_0^x}{2kV_0^2\cos\alpha_0} =$$

$$= xtg\alpha_0 + \frac{x}{2kV_0^2\cos\alpha_0} - \frac{1}{4k^2V_0^2 g}\left(e^{\frac{2kgx}{\cos\alpha_0}} - 1\right). \qquad (41)$$

Сравнивая уравнения траектории, полученной при решении задачи первым способом (формула 19) и вторым способом (формула 41), видим полное совпадение уравнений.

Таким образом, решая задачу с допущениями, что $\sqrt{1+\left(\frac{V_y}{V_x}\right)^2}=\frac{1}{\cos\alpha_0}$ в декартовых осях и, что $\frac{1}{\cos^3\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha_0}\frac{1}{\cos^2\alpha}$ – в естественных осях, получаются совершенно одинаковые уравнения траектории, т.е. эти допущения равнозначны.

Поэтому дальнейшее исследование уравнения (41) приведет к аналогичному результату, как это получено при исследовании уравнения (19).

Для определения закона движения снаряда в функции времени в декартовых осях при условии, что найдена зависимость скорости V от угла наклона α касательной к траектории, т.е. $V=f(\alpha)$ при использовании естественных осей, можно воспользоваться интегрированием уравнений

$$dx=V_x dt=V\cos\alpha dt, \tag{42}$$
$$dy=V_y dt=V\sin\alpha dt\,.$$

Интегрирование первого уравнения (42) приведено выше (смотри формулы 33-37), в результате которого получена зависимость $V_x=\varphi(x)$ (формула 37)

Проинтегрируем полученное уравнение, заменив $V\cos\alpha=V_x=\frac{dx}{dt}$.

$$\frac{dx}{dt}=V_0\cos\alpha_0 e^{-\frac{kgx}{\cos\alpha_0}}\Rightarrow\int_0^x e^{-\frac{kgx}{\cos\alpha_0}}dx=\int_0^t V_0\cos\alpha_0 dt$$

Отсюда закон движения снаряда по оси x

$$x=\frac{\cos\alpha_0}{kg}\ln\left(1+kgV_0t\right), \tag{43}$$

что в точности совпадает с уравнением, полученным при решении первым способом (смотри формулу 6), если учесть, что $V_{0x}=V_0\cos\alpha_0$.

Закон движения снаряда по оси y определим косвенным путем, использовав полученное уравнение траектории (формула 42), подставив в нее вместо x выражение (43).

$$y=\frac{\cos\alpha_0}{kg}\ln\left(1+kgV_0t\right)tg\alpha_0+\frac{\frac{\cos\alpha_0}{kg}\ln\left(1+kgV_0t\right)}{2kV_0^2\cos\alpha_0}-\frac{1}{4k^2V_0^2g}\times\left(e^{\frac{2kg\frac{\cos\alpha_0}{kg}\ln\left(1+kgV_0t\right)}{\cos\alpha_0}}-1\right).$$

После соответствующих несложных преобразований получим

$$y=\frac{\sin\alpha_0}{kg}\ln\left(1+kgV_0t\right)+\frac{1}{2k^2V_0^2g}\ln\left(1+kgV_0t\right)-\frac{t}{2kV_0}-\frac{gt^2}{4}, \tag{44}$$

что в точности совпадает с уравнением (16), полученным первым способом решения задачи.

Продифференцировав уравнение (43), определим закон изменения скорости по оси x

$$V_x=\frac{dx}{dt}=\frac{V_0\cos\alpha_0}{1+kgV_0t}, \tag{45}$$

что совпадает с уравнением (5). Закон изменения скорости по оси y определим, продифференцировав по времени уравнение (44),

$$V_y=\frac{dy}{dt}=\frac{2V_0\sin\alpha_0-2gt-kg^2V_0t^2}{2\left(1+kgV_0t\right)}, \tag{46}$$

которое легко преобразуется к виду (11). Уравнение траектории в координатной форме можно также определить, проинтегрировав второе уравнение системы (42) с учетом (28)

$$dy=V_y dt=V\sin\alpha dt=V\sin\alpha\left(-\frac{Vd\alpha}{g\cos\alpha}\right)=-\frac{V^2}{g}tg\alpha d\alpha, \tag{47}$$

где с учетом (34) $-\frac{V^2}{g}d\alpha = dx$.

Тогда $dy = tg\alpha dx$. (48)

Интегрирование этого уравнения возможно, если будет известна зависимость $tg\alpha$ от координаты x, т.е. если предварительно будет проинтегрировано первое уравнение системы (42), что выше и сделано.

Поэтому с учетом (40) $dy = \left[tg\alpha_0 - \frac{\left(e^{\frac{2kgx}{\cos\alpha_0}} - 1 \right)}{2k^2V_0^2\cos\alpha_0} \right] dx$

отсюда $y = xtg\alpha_0 + \frac{x}{2kV_0^2\cos\alpha_0} - \frac{\int_0^x e^{\frac{2kgx}{\cos\alpha_0}} dx}{2kV_0^2\cos\alpha_0}$,

что соответствует уравнению (41).

Время подъема на максимальную высоту определим из условия, что в наивысшей точке траектории $V_y = 0$. Приравняв в уравнении (46) нулю правую часть, получим квадратное уравнение относительно t вида

$$t_{\text{под}}^2 + \frac{2}{kgV_0}t_{\text{под}} - \frac{2\sin\alpha_0}{kg^2} = 0 . \quad (49)$$

Определив корни этого уравнения, и учитывая, что $t > 0$, получим

$$t_{\text{под}} = \frac{1}{kgV_0}\left(\sqrt{1 + 2kV_0^2\sin\alpha_0} - 1 \right). \quad (50)$$

За это время снаряд вдоль оси x пролетит расстояние s, которое определяется с учетом уравнения (43), подставив в него выражение для $t_{\text{под}}$

$$s = \frac{\cos\alpha_0}{kg}\ln\left(\sqrt{1 + 2kV_0^2\sin\alpha_0} \right), \quad (51)$$

а с учетом формулы (45) будет иметь скорость

$$V_{x/t=t_{\text{под}}} = \frac{V_0\cos\alpha_0}{\sqrt{1 + 2kV_0^2\sin\alpha_0}} . \quad (52)$$

Рассмотрим числовой пример.

Воспользуемся полученными аналитическими формулами (50), (51), (52) и (44) и определим время подъема снаряда на максимальную высоту $t_{\text{под}}$, пройденное за это время расстояние s по оси x, проекцию скорости на ось x в этом положении и максимальную высоту h подъема снаряда, приняв $V_0 = 800$ м/с, $\alpha_0 = 15^\circ$ и $k = 0{,}00002$ с^2/м^2. При этих данных: $t_{\text{под}} = 1{,}23$ с , $s = 5000$ м, $V_x = 280$ м/с, и $h = y_{(t=t_{\text{под}})} = 875$ м.

Таким образом, при принятых числовых значениях максимальная высота подъема снаряда в 5,71 раз меньше дальности полета до достижения этой высоты, поэтому траектория полета является настильной (рис. 3).

На этом рисунке приведены траектории полета снаряда, построенные по уравнению (19) для трех углов $\alpha_0 = 5^\circ$ – линия 1; $\alpha_0 = 10^\circ$ – линия 2; $\alpha_0 = 15^\circ$ – линия 3.

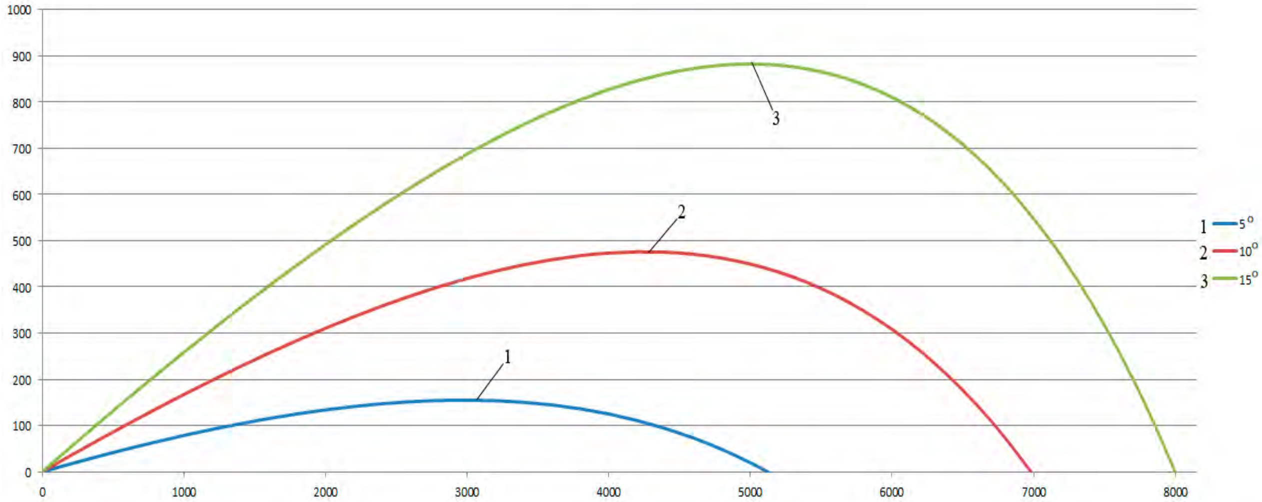

Рисунок 3

Резюме

Исследования, выполненные в данной работе, привели к следующим результатам:

• Получено впервые аналитическое решение дифференциальных уравнений движения снаряда в декартовых осях координат при квадратичном законе сопротивления, которое стало возможным путем введения допущения, что при движении по настильной траектории (угол наклона ствола орудия $\alpha_0 \le 15^\circ$) составляющая скорости полета снаряда по оси y $V_y << V_x$, тогда $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = V_x\sqrt{1+\left(\frac{V_y}{V_x}\right)^2} = V_x\sqrt{1+tg^2\alpha_0} = \frac{V_x}{\cos\alpha_0}$, где $\frac{1}{\cos\alpha_0} = const$;

• Получено решение дифференциальных уравнений движения в естественных осях при квадратичном законе сопротивления путем введения допущения, что $\cos^3\alpha = \cos\alpha_0 \cdot \cos^2\alpha$, а $\cos\alpha_0 = const$;

• Показано, что хотя способы интегрирования дифференциальных уравнений существенно отличаются, но конечные результаты по определению основных параметров траектории в точности совпадают;

• Анализ двух способов интегрирования дифференциальных уравнений движения показывает, что более доступным для понимания является способ решения задачи в декартовых осях;

• Рассмотрен числовой пример, в результате чего определены основные параметры траектории полета снаряда и построены траектории для различных углов наклона ствола орудия к горизонту.

Литература

1. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики: В 2-х томах. Т. II. Динамика.—6-е изд., перераб. и доп—М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 640 с.
2. Амельянчик А.И., Горбач Н.И. К вопросу о движении артиллерийского снаряда. Межведомственный сборник научно-методических статей «Теоретическая и прикладная механика», выпуск 24 БНТУ. – Минск, 2009.
3. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. - М.: ООО «Издательство Астрель» АСТ, 2002. - 992 с: ил.
4. Яблонский, АА. Курс теоретической механики: учебник для техн. вузов / А.А. Яблонский. - 6-е изд. испр. - М.: Высш. шк., 1984-423 е.: ил.
5. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. - М.: «Наука», 1981. - 480 с.

Поступила в редакцию 05.10.2012