УДК 517.52

О РАЗЛОЖЕНИИ ФУНКЦИЙ В КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ РЯДЫ

Акимов В.А., Новиков А.А.

УО «Белорусский национальный технический университет», Минск

Рассмотрим разложение гладкой функции в неортогональный ряд вида:

$$Sh = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{m}{n} x . \quad (1)$$

Применяя операторный метод [1], получаем: . (1)
Для сравнения выписываем известное разложение этой же функции в ортогональный ряд Фурье:

$$Shax = \frac{2Sh(la)}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\delta_n}{a^2+\delta_n^2} \sin \delta_n x . \quad (2)$$

где $\delta_n = \frac{\pi n}{l}$. Полагая в (2) $\delta_n = \pi m$ получим ряд (1).

Аналогичные соотношения получаются и для некоторых других разложений. Это обстоятельство дает основание выдвинуть гипотезу о прямой замене целочисленного параметра n функцией от n. Рассмотрим, в частности, два разложения вида:

$$Shax = \frac{2Sh(la)}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}a_n}{a^2+a_n^2} \sin a_n x . \quad (3)$$

$$Shax = \frac{2Sh(la)}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\beta_n x}{a^2+\beta_n^2}\sin\beta_n x\,. \qquad (4)$$

где $a_n = \frac{\pi\sqrt{n}}{l}$, $\beta_n = \frac{\pi}{nl}$.

Отметим, что такое предположение, встречающееся в теории рядов впервые, возникло благодаря общности операторного метода. Такие неортогональные ряды, порожденные ортогональными, назовем квазиортогональными рядами. В данной работе покажем быстроту сходимости построенных рядов (3) и (4), заменив в них (по крайней мере пока) полученные коэффициенты коэффициентами, вычисленными методом наименьших квадратов.

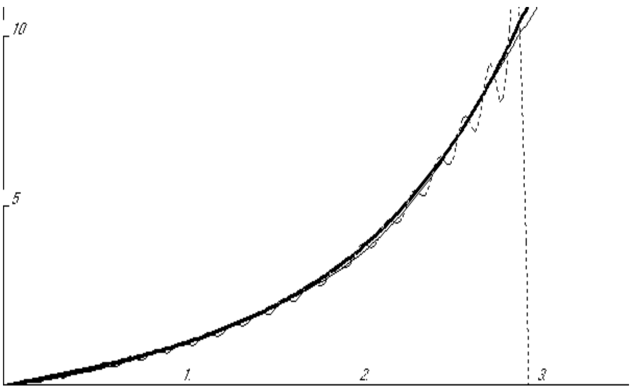

***Рисунок** – Сравнение аппроксимационного приближения функции sh(x) (жирная линия) частичными суммами: квазиортогонального ряда по sin(√nx) для n=4 (тонкая линия) и ряда Фурье по sin(nx) для n=40 (пунктирная линия)*

На этом графике непосредственно видна лучшая сходимость квазиортогональных рядов по сравнению с ортогональными. Даже 4 члена квазиортогонального ряда обеспечивают лучшую сходимость, достигаемую 40 членами ортогонального ряда. Похожий график получается и для ряда (4). Вопрос о достижении такой же хорошей сходимости за счет собственных коэффициентов квазиоортогональных рядов, порождаемых ортогональными рядами, остается открытым. Из всего вышесказанного вытекает, что квазиортогональные ряды использовать выгодно, но коэффициенты в них надо вычислять методом наименьших квадратов. Получается своего рода смешанный метод.

Резюме

В работе вводится понятие квазиортогональных рядов. Приводится численный пример разложения гладкой функции в квазиортогональный ряд методом наименьших квадратов.

Литература

Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости. Мн. УП «Технопринт» ; 2003г.-101с.

Summary

In this article the concept of quasiorthogonal ranks is entered. The numerical example of decomposition of smooth function in a quasiorthogonal row is given by a method of the smallest squares.

Поступила в редакцию 11.10.2012