Автоматика и телемеханика, № 12, 2015

Стохастические системы, системы массового обслуживания

© 2015 г. **Ю.С. КРУК**, канд. физ.-мат. наук (juls1982@list.ru)
(Белорусский национальный технический университет),
Ю.Е. ДУДОВСКАЯ, канд. физ.-мат. наук (dudovskaya@gmail.com)
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ ОТКРЫТОЙ СЕТИ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ[1]

Исследуется стационарное функционирование открытой сети массового обслуживания с неактивными заявками и информационными сигналами. Количество работы по обслуживанию заявки – случайная величина, имеющая произвольное распределение. Стационарное распределение вероятностей состояний сети имеет мультипликативную форму и инвариантно относительно функционального вида распределения величины работы, требующейся для обслуживания заявки.

1. Введение

В настоящее время в теории сетей массового обслуживания проблема исследования надежности обслуживающих систем становится все более актуальной. Однако не только обслуживающая система может выходить из строя, поступающие в систему заявки также могут терять свои качественные характеристики.

С точки зрения надежности поступающих заявок, большой интерес для исследователей представляют сети массового обслуживания с неактивными заявками. Заявки в таких сетях делятся на два класса: первые могут обслуживаться узлами, а вторые являются временно неактивными и не обслуживаются, скапливаясь в очередях узлов. Поступающие в сеть потоки информационных сигналов позволяют заявкам менять свое состояние: из неактивного переходить в состояние, когда они могут получать обслуживание, и наоборот. В большинстве случаев исследователей интересуют характеристики стационарного функционирования таких сетей, в частности, вид стационарного распределения вероятностей состояний.

Неактивные заявки можно интерпретировать как заявки, имеющие некоторый дефект, делающий их непригодными для обслуживания. Действитель-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № ф14м-099).

но, при передаче данных в информационно-телекоммуникационных сетях может возникать ситуация, когда пересылаемая заявка становится непригодной для обслуживания в результате какой-либо поломки или сбоя в процессе ее пересылки. Таким образом, результаты исследования сетей с временно неактивными заявками представляют интерес с прикладной точки зрения.

В [1] рассматривается стационарное функционирование открытой сети с неактивными заявками и исследуется стационарное распределение вероятностей состояний в предположении, что длительности обслуживания заявок имеют экспоненциальное распределение. В [2, 3] исследовано стационарное функционирование сетей, являющихся обобщением модели из [1] на случаи циркулирования заявок и сигналов различных типов и поступления в сеть потоков неактивных заявок.

Классическая открытая сеть массового обслуживания Джексона исследуется в [4] в предположении, что длительность обслуживания заявки имеет показательное распределение, однако на практике это ограничение выполняется редко. Действительно, на практике закон распределения длительности обслуживания заявки чаще всего отличается от показательного. Поэтому существует актуальная проблема разработки аналитического аппарата для исследования сетей массового обслуживания с произвольными функциями распределения времени обслуживания, привлекающая все большее внимание исследователей [5–9]. Работы [8, 9] посвящены исследованию инвариантности стационарного распределения вероятностей состояний замкнутой и открытой сетей массового обслуживания с неактивными заявками в случае произвольного распределения длительностей обслуживания. Установлено, что стационарное распределение вероятностей состояний сетей имеет мультипликативную форму и инвариантно относительно функционального вида распределения длительности обслуживания.

В.А. Ивницкий в [7] при исследовании немарковских сетей массового обслуживания вводит понятие кусочно-линейных (КЛСеМО) и кусочно-непрерывных сетей массового обслуживания (КНСеМО). Обслуживание в таких сетях имеет не“временную”, а так называемую “энергетическую” трактовку, т.е. каждая операция обслуживания характеризуется случайной величиной работы, которую необходимо выполнить. Поскольку при произвольных функциях распределения количества работы, необходимого для обслуживания заявки, случайный процесс, характеризующий количество заявок в каждом из узлов, уже не будет марковским, то, как и в большинстве работ по инвариантности, используется метод расширения фазового пространства (дополнительных переменных). В зависимости от того, как ведут себя дополнительные переменные, характеризующие остаточное количество работы, необходимое для окончания некоторой операции обслуживания, и происходит деление немарковских сетей на КЛСеМО и КНСеМО. Для КЛСеМО дополнительные переменные $\xi(t)$ убывают по линейному закону, при этом скорость убывания может зависеть от состояния узла или состояния сети в целом

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = -\alpha.$$

Для КНСеМО скорость убывания зависит от остаточного количества работы. Эта зависимость выражается некоторой непрерывной функцией

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = -\beta(\xi(t)).$$

В [7] приведены результаты по инвариантности для многих открытых и замкнутых сетей массового обслуживания с различными "немедленными" дисциплинами: для сети Джексона с зависимостью параметров обслуживания и циркуляции от состояния сети, для сети с разными классами требований и параметрами потоков обслуживания и циркуляции, зависящими от состояния сети, для сети с обобщенным групповым обслуживанием, сети с детерминированной циркуляцией, для замкнутой звездообразной сети, открытой сети с потерями и для многих других сетей массового обслуживания.

Энергетическая интерпретация обобщает представление о процессе обслуживания, представляет большой интерес с практической точки зрения и позволяет рассматривать более широкий класс задач и исследовать более сложные и интересные модели сетей. Так, в [6, 10, 11] находится вид стационарного распределения вероятностей состояний, условия эргодичности и устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний по отношению к функциональной форме распределения количества работы, требующегося для обслуживания заявок. Сети с отрицательными заявками и многорежимными стратегиями рассматриваются в [12], где устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний по отношению к функциональной форме распределения количества работы по переключению режимов. В [13] установлена инвариантность стационарного распределения в случае энергетической постановки для замкнутой сети массового обслуживания с неактивными заявками.

В настоящей статье рассматривается обобщение модели из [8] на случай "энергетической" интерпретации процесса обслуживания. Цель статьи – исследование открытой КЛСеМО с временно неактивными заявками и информационными сигналами. Предполагается, что величины работ, требующихся для обслуживания заявок в узлах, распределены по произвольному закону. Устанавливается инвариантность стационарного распределения состояний сети по отношению к функциональной форме распределений величин работ, требующихся для обслуживания заявок, при фиксированных первых моментах.

2. Описание модели сети

Рассматривается открытая сеть массового обслуживания с множеством узлов $J = \{1, \ldots, N\}$. В узлы сети извне поступают независимые пуассоновские потоки заявок с интенсивностями λ_i, $i \in J$. Все заявки, находящиеся в сети, подразделяются на обыкновенные, которые могут получать обслуживание, и неактивные. Предполагается поступление в узлы сети извне независимых пуассоновских потоков информационных сигналов с интенсивностями ν_i и φ_i, $i \in J$. Поступивший в i-й узел с интенсивностью ν_i информационный сигнал уменьшает количество обыкновенных заявок на единицу и увеличивает на единицу количество неактивных заявок; в случае отсутствия в i-м узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть. Поступивший в i-й узел с интенсивностью φ_i информационный сигнал уменьшает на единицу количество неактивных заявок, увеличивая на единицу число обыкновенных заявок; в случае отсутствия в i-м узле неактивных заявок сигнал покидает сеть. Обслуживания информационные сигналы не требуют.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $z(t) = \big((n_i(t), n'_i(t)),\ i \in J\big)$, где $(n_i(t), n'_i(t))$ – состояние i-го узла в момент времени t. Здесь $n_i(t)$ и $n'_i(t)$ – число обыкновенных и неактивных заявок соответственно в i-м узле в момент времени t, а общее число заявок в i-м узле равно $n_i(t) + n'_i(t)$. Процесс $z(t)$ обладает счетным фазовым пространством Z.

Нумерация обыкновенных заявок в очереди каждого узла осуществляется от “хвоста” очереди к прибору, т.е. если в i-м узле находится n_i обыкновенных (активных) заявок, то заявка, которая обслуживается, имеет номер n_i, а последняя заявка в очереди имеет номер 1. Неактивные заявки в очереди i-го узла нумеруются следующим образом: заявка, последняя ставшая неактивной, имеет номер n'_i. Поступающий в узел i сигнал ν_i воздействует на обыкновенную заявку, имеющую номер 1, которая становится неактивной заявкой под номером $n'_i + 1$. Сигнал φ_i воздействует на неактивную заявку, имеющую номер n'_i, которая становится обыкновенной заявкой под номером 1.

Дисциплина обслуживания – $LCFS$-PR. Поступающая в узел i заявка начинает сразу обслуживаться и получает номер $n_i + 1$, а вытесненная заявка сохраняет номер n_i и становится первой в очереди на дообслуживание. Предполагается, что в начальный момент времени временно неактивные заявки в сети отсутствуют.

Если в момент времени t состояние i-го узла есть вектор $(n_i(t), n'_i(t))$ и сразу после указанного момента в этот узел поступает заявка, которая, как отмечалось выше, начинает немедленно обслуживаться, то количество работы по ее обслуживанию является случайной величиной $\eta_i(n_i + n'_i + 1)$ с функцией распределения $B_i(n_i + n'_i + 1, z)$ и средним $\tau_i(n_i + n'_i + 1) < \infty$. Предполагается, что $B_i(n_i + n'_i + 1, 0) = 0$, $i \in J$. Если в момент времени t состояние i-го узла есть $(n_i(t), n'_i(t))$, то обслуживание ведется со скоростью $\alpha_i(n_i + n'_i)$, т.е. зависит от состояния узла, $i \in J$. Обслуживание в таких сетях имеет не “временну́ю”, а так называемую “энергетическую” трактовку, т.е. каждая операция обслуживания характеризуется случайной величиной работы, которую необходимо выполнить. Заявка, получившая обслуживание в i-м узле, мгновенно с вероятностью $p_{i,j}$ переходит в узел j, а с вероятностью $p_{i,0}$ покидает сеть $\big(\sum_{j\in J} p_{i,j} + p_{i,0} = 1,\ i \in J\big)$. Не ограничивая общности рассуждений, договоримся считать $p_{i,i} = 0$, $i \in J$. Матрица маршрутизации предполагается неприводимой.

Для открытых сетей показано, что в случае неприводимости матрицы маршрутизации $(p_{i,j})$ система уравнений трафика

$$\varepsilon_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i p_{i,j}, \quad j \in J, \tag{1}$$

имеет единственное положительное решение $\{\varepsilon_j,\ j \in J\}$ [4].

3. Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний сети

В [1] рассмотрен случай, когда $B_i(n_i+n'_i, z) = 1-\exp\{-\mu_i z\}$ ($\mu_i > 0$, $z > 0$), $\tau_i(n_i + n'_i) = 1/\mu_i$ с единичной скоростью обслуживания $\alpha_i(n_i + n'_i) = 1$, т.е. в этом случае $B_i(n_i + n'_i, z)$ является функцией распределения экспоненциального времени обслуживания, $i \in J$. Тогда $z(t)$ – марковский процесс, для которого справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [1]. *При выполнении условий*

$$\varepsilon_i < \mu_i, \tag{2}$$

$$\varepsilon_i \nu_i < \mu_i \varphi_i \tag{3}$$

марковский процесс $z(t)$ эргодичен, а стационарное распределение вероятностей состояний процесса имеет вид

$$p((n_1, n'_1), \ldots, (n_N, n'_N)) = p_1(n_1, n'_1) \ldots p_N(n_N, n'_N). \tag{4}$$

Здесь $((n_1, n'_1), \ldots, (n_N, n'_N)) \in Z$, а

$$p_i(n_i, n'_i) = \Bigl(1 - \frac{\varepsilon_i}{\mu_i}\Bigr)\Bigl(\frac{\varepsilon_i}{\mu_i}\Bigr)^{n_i}\Bigl(1 - \frac{\varepsilon_i \nu_i}{\mu_i \varphi_i}\Bigr)\Bigl(\frac{\varepsilon_i \nu_i}{\mu_i \varphi_i}\Bigr)^{n'_i}$$

– стационарное распределение вероятностей состояний i-го узла, $\{\varepsilon_j,\ j \in J\}$ – решение системы уравнений трафика (1).

В [9] было рассмотрено обобщение модели из [1] на случай произвольного распределения длительностей обслуживания. Было найдено стационарное распределения вероятностей состояний, условия эргодичности, установлена инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний по отношению к функциональной форме распределения длительностей обслуживания. В [8] аналогичный результат получен для случая замкнутой сети с неактивными заявками.

Исследуем теперь более широкий случай, рассматривая энергетическую интерпретацию процесса обслуживания. Пусть количество работы по обслуживанию заявки является случайной величиной $\eta_i(n_i + n'_i)$ с произвольной функцией распределения $B_i(n_i + n'_i, z)$ и математическим ожиданием $\tau_i(n_i + n'_i) < \infty$. Пусть $\psi_{i,k}(t)$ – количество работы, которое осталось выполнить с момента t для завершения обслуживания заявки, стоящей в момент времени t на k-й позиции в i-м узле, $\psi_i(t) = (\psi_{i,1}(t), \ldots, \psi_{i,n_i+n'_i}(t))$, $i \in J$. В силу сказанного если состояние i-го узла есть (n_i, n'_i), то

$$\frac{d\psi_{i,n_i+n'_i}(t)}{dt} = -\alpha_i(n_i + n'_i), \quad i \in J.$$

Тогда в общем случае процесс $z(t)$ не является марковским, поэтому рассмотрим кусочно-линейный марковский процесс $\zeta(t) = (z(t),\ \psi(t))$, добавляя к $z(t)$ непрерывную компоненту $\psi(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_N(t))$.

Введем обозначения:

$$F(z,x) = F(z, x_{1,1}, \ldots, x_{1,n_1+n_1'}; x_{2,1}, \ldots, x_{2,n_2+n_2'}; \ldots; x_{N,1}, \ldots, x_{N,n_N+n_N'}) =$$
$$= \lim_{t\to\infty} P\{z(t) = z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \psi_{i,n_i+n_i'}(t) < x_{i,n_i+n_i'}, i \in J\},$$
$$z \in Z,\ \ x_{k,l} \in \mathbb{R}\ \forall\, k,\, l.$$

Функции $F(z,x)$ будем называть стационарными функциями распределения вероятностей состояний кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$, поскольку при каждом фиксированном z функция $F(z,x)$ в части непрерывных компонент представляет собой функцию распределения.

Теорема 2. *При выполнении условия*

$$\sum_{z\in Z} q(z) \prod_{i=1}^{N} \left(\varepsilon_i^{n_i} \left(\frac{\varepsilon_i \nu_i}{\varphi_i}\right)^{n_i'} \prod_{s=1}^{n_i+n_i'} \tau_i(s)\alpha_i(s)^{-1} \right) < \infty, \tag{5}$$

где

$$q(z) = \sum_{i=1}^{N} \left(\lambda_i + \tau_i(s)^{-1}\alpha_i(s) + \nu_i + \varphi_i\right),$$

процесс $\zeta(t)$ эргодичен, а стационарные функции распределения вероятностей состояний $F(z,x)$ определяются по формулам

$$F(z,x) = p_1(n_1, n_1')p_2(n_2, n_2') \ldots p_N(n_N, n_N') \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{N} \prod_{s=1}^{n_i+n_i'} \frac{1}{\tau_i(s)} \int_0^{x_{i,s}} (1 - B_i(s,u))du,\ z \in Z, \tag{6}$$

где

$$p_i(n_i, n_i') = {\varepsilon_i}^{n_i} \left(\frac{\varepsilon_i \nu_i}{\varphi_i}\right)^{n_i'} \prod_{s=1}^{n_i+n_i'} \frac{\tau_i(s)}{\alpha_i(s)} p_i(0,0), \tag{7}$$

ε_i находятся из (1), а

$$p_i(0,0) = \left(\sum_{n_i=0}^{\infty} \sum_{n_i'=0}^{\infty} {\varepsilon_i}^{n_i} \left(\frac{\varepsilon_i \nu_i}{\varphi_i}\right)^{n_i'} \prod_{s=1}^{n_i+n_i'} \frac{\tau_i(s)}{\alpha_i(s)} \right)^{-1}, \quad i \in J. \tag{8}$$

Доказательство теоремы 2 приведено в Приложении.

Обозначим через $\{p(z),\ z \in Z\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z(t)$. Из теоремы 2 с учетом равенства $p(z) = F(z, +\infty)$ вытекает следующее следствие.

Следствие. Если выполняется соотношение (5), то процесс $z(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение вероятностей состояний $\{p(z),\ z \in \in Z\}$ не зависит от функционального вида распределений $B_i(s,x)$, $i \in J$, и имеет мультипликативную форму

$$p(z) = p_1(n_1, n'_1)p_2(n_2, n'_2)\dots p_N(n_N, n'_N),$$

где $p_i(n_i, n'_i)$ определяются по формулам (7), (8). Здесь $p_i(n_i, n'_i)$, $i \in J$, – стационарное распределение вероятностей состояний изолированного узла.

4. Заключение

Исследована работа открытой сети массового обслуживания с неактивными заявками и информационными сигналами. Дисциплиной обслуживания являлся абсолютный приоритет поступающей заявки с дообслуживанием вытесненной с прибора заявки. Для случая произвольного распределения величин работ, требующихся для обслуживания заявок, установлена инвариантность стационарного распределения состояний сети по отношению к функциональной форме распределений величин работ при фиксированных первых моментах. Найдено условие эргодичности. Установлено, что стационарное распределение сети имеет форму произведения, где каждый множитель является распределением отдельного узла, помещенного в фиктивную окружающую среду. Результаты исследований сети могут быть использованы на практике для анализа стационарного функционирования реальных объектов, имеющих сетевую структуру и допускающих неактивное состояние заявок.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим процесс $\zeta(t)$. При выполнении условия (5) $\zeta(t)$ эргодичен. Строгое доказательство этого факта может быть проведено с помощью предельной теоремы Смита [10], если учесть, что случайный процесс $\zeta(t)$ является регенерирующим. Действительно, функционирование сети схематично можно представить как чередование периодов, когда сеть находится в состоянии “0” (в узлах нет ни обыкновенных, ни неактивных заявок), и периодов занятости сети (в противном случае). Момент перехода сети в свободное состояние “0” является моментом регенерации. Далее доказательство сводится к применению теоремы Смита для регенерирующих процессов.

Изменения состояния кусочно-линейного процесса $\zeta(t)$ за счет поступления в сеть заявок или поступления информационных сигналов, переводящих заявки из обыкновенного состояния в неактивное или наоборот, будем называть спонтанными изменениями.

Обозначим через $e_i \in Z$ вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n'_i) = (1, 0)$, и через $e'_i \in Z$ вектор, все координаты которого равны нулю кроме $(n_i, n'_i) = (0, 1)$.

Пусть h мало. Рассмотрим вероятность события

$$P\{z(t+h) = z, \psi_{i,1}(t+h) < x_{i,1}, \dots, \psi_{i,n_i+n'_i}(t+h) < x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J\}.$$

Это событие может произойти следующими взаимоисключающими способами.

1. С момента t за время h не произошло ни одного спонтанного изменения и обслуживание ни в одном узле не закончилось. Вероятность этого равна

$$P\Big\{z(t)=z,\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n'_i)hI_{n_i>0}\leqslant\psi_{i,n_i+n'_i}(t)<$$
$$<x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i)hI_{n_i>0},\ i\in J\Big\}\times$$
$$\times\left(1-\sum_{i=1}^{N}\Big(\lambda_i+\nu_iI_{n_i>0}+\varphi_iI_{n'_i>0}\Big)h+o(h)\right).$$

2. За время h поступила заявка в i-й узел, которая сразу начала обслуживаться, ни в одном узле обслуживание не закончилось, других спонтанных изменений не произошло. Вероятность этого равна

$$P\Big\{z(t)=z-e_i,\psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0}\leqslant\psi_{k,n_k+n'_k}(t)<$$
$$<x_{k,n_k+n'_k}+\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0},\ \ k\in J,\ \ k\neq i,$$
$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n'_i-1)(h-\theta)I_{n_i>1}\leqslant\psi_{i,n_i+n'_i-1}(t)<$$
$$<x_{i,n_i+n'_i-1}+\alpha_i(n_i+n'_i-1)(h-\theta)I_{n_i>1},\ i\in J\Big\}\times$$
$$\times B_i\left(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i)\theta\right)I_{n_i>0}\left(\lambda_ih+o(h)\right),$$

где $(h-\theta)$ – время, которое прошло с момента t до поступления заявки, а θ – время с момента поступления заявки до $t+h$, $0<\theta<h$.

3. За время h в j-м узле заявка была обслужена, после чего она мгновенно перешла в i-й узел, спонтанных изменений не произошло. Вероятность этого равна

$$P\Big\{z(t)=z-e_i+e_j,\psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0}\leqslant\psi_{k,n_k+n'_k}(t)<$$
$$<x_{k,n_k+n'_k}+\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,\ k\neq j,$$
$$\psi_{j,1}(t)<x_{j,1},\ldots,\psi_{j,n_j+n'_j}(t)<x_{j,n_j+n'_j},\psi_{j,n_j+n'_j+1}(t)<$$
$$<\alpha_j(n_j+n'_j+1)(h-\theta),$$
$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n'_i-1)(h-\theta)I_{n_i>1}\leqslant\psi_{i,n_i+n'_i-1}(t)<$$
$$<x_{i,n_i+n'_i-1}+\alpha_i(n_i+n'_i-1)(h-\theta)I_{n_i>1}\Big\}\times$$
$$\times B_i\left(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i)\theta\right)p_{j,i}I_{n_i>0}+o(h),$$

где $(h-\theta)$ – время, которое прошло с момента времени t до окончания обслуживания заявки, $0<\theta<h$.

4. За время h в j-м узле заявка была обслужена, после чего она покинула сеть, спонтанных изменений не произошло. Вероятность этого события

$$P\Big\{z(t) = z + e_j, \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, \alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0} \leqslant \psi_{k,n_k+n'_k}(t) < \\ < x_{k,n_k+n'_k} + \alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq j, \\ \psi_{j,1}(t) < x_{j,1}, \ldots, \psi_{j,n_j+n'_j}(t) < x_{j,n_j+n'_j}, \psi_{j,n_j+n'_j+1}(t) < \\ < \alpha_j(n_j + n'_j + 1)(h - \theta)\Big\}p_{j,0} + o(h).$$

5. За время h в i-й узел поступил информационный сигнал интенсивности ν_i, уменьшивший количество обыкновенных заявок на единицу и увеличивший на единицу количество неактивных заявок, других спонтанных изменений не произошло, обслуживание ни в одном узле не закончилось. Вероятность этого равна

$$P\Big\{z(t) = z + e_i - e'_i, \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, \alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0} \leqslant \psi_{k,n_k+n'_k}(t) < \\ < x_{k,n_k+n'_k} + \alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i, \\ \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i + n'_i)h \leqslant \psi_{i,n_i+n'_i}(t) < \\ < x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i + n'_i)h\Big\}(\nu_i h + o(h))I_{n'_i>0}.$$

6. За время h в i-й узел поступил информационный сигнал интенсивности φ_i, уменьшивший количество неактивных заявок на единицу и увеличивший на единицу количество обыкновенных заявок, других спонтанных изменений не произошло, обслуживание ни в одном узле не закончилось. Вероятность этого события

$$P\Big\{z(t) = z - e_i + e'_i, \psi_{k,1}(t) < x_{k,1}, \ldots, \alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0} \leqslant \psi_{k,n_k+n'_k}(t) < \\ < x_{k,n_k+n'_k} + \alpha_k(n_k + n'_k)hI_{n_k>0},\ k \in J,\ k \neq i, \\ \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i + n'_i)hI_{n_i>1} \leqslant \psi_{i,n_i+n'_i}(t) < \\ < x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i + n'_i)hI_{n_i>1}\Big\}(\varphi_i h + o(h))I_{n_i>0}.$$

7. И, наконец, за время h происходит не менее двух изменений состояния сети. Вероятность этого события есть $o(h)$.

Естественно, что в каждом из перечисленных пунктов и для каждого узла параметр θ свой. Но чтобы не загромождать выкладки, индексация для θ не вводится.

В силу сказанного имеем:

$$P\left\{z(t + h) = z, \psi_{i,1}(t + h) < x_{i,1}, \ldots, \psi_{i,n_i+n'_i}(t + h) < x_{i,n_i+n'_i},\ i \in J\right\} = \\ = P\Big\{z(t) = z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i + n'_i)hI_{n_i>0} \leqslant \psi_{i,n_i+n'_i}(t) < \\ < x_{i,n_i+n'_i} + \alpha_i(n_i + n'_i)hI_{n_i>0},\ i \in J\Big\}\times$$

$$\times\left(1-\sum_{i=1}^{N}\left(\lambda_i+\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n'_i>0}\right)h+o(h)\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}P\Big\{z(t)=z-e_i,\psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0}\leqslant\psi_{k,n_k+n'_k}(t)<$$

$$<x_{k,n_k+n'_k}+\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n'_i-1)(h-\theta)I_{n_i>1}\leqslant\psi_{i,n_i+n'_i-1}(t)<$$

$$<x_{i,n_i+n'_i-1}+\alpha_i(n_i+n'_i-1)(h-\theta)I_{n_i>1},\ i\in J\Big\}\times$$

$$\times B_i\left(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i)\theta\right)I_{n_i>0}(\lambda_i h+o(h))+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}P\Big\{z(t)=z-e_i+e_j,\psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0}\leqslant$$

$$\leqslant\psi_{k,n_k+n'_k}(t)<x_{k,n_k+n'_k}+\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,\ k\neq j,$$

$$\psi_{j,1}(t)<x_{j,1},\ldots,\psi_{j,n_j+n'_j}(t)<x_{j,n_j+n'_j},\psi_{j,n_j+n'_j+1}(t)<\alpha_j(n_j+n'_j+1)(h-\theta),$$

$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n'_i-1)(h-\theta)I_{n_i>1}\leqslant\psi_{i,n_i+n'_i-1}(t)< \tag{П.1}$$

$$<x_{i,n_i+n'_i-1}+\alpha_i(n_i+n'_i-1)(h-\theta)I_{n_i>1}\Big\}\times$$

$$\times B_i\left(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i)\theta\right)p_{j,i}I_{n_i>0}+o(h)+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}P\Big\{z(t)=z+e_j,\psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0}\leqslant\psi_{k,n_k+n'_k}(t)<$$

$$<x_{k,n_k+n'_k}+\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq j,$$

$$\psi_{j,1}(t)<x_{j,1},\ldots,\psi_{j,n_j+n'_j}(t)<x_{j,n_j+n'_j},\psi_{j,n_j+n'_j+1}(t)<$$

$$<\alpha_j(n_j+n'_j+1)(h-\theta)\Big\}p_{j,0}+o(h)+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}P\Big\{z(t)=z+e_i-e'_i,\psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0}\leqslant$$

$$\leqslant\psi_{k,n_k+n'_k}(t)<x_{k,n_k+n'_k}+\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n'_i)h\leqslant\psi_{i,n_i+n'_i}(t)<$$

$$<x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i)h\Big\}(\nu_i h+o(h))I_{n'_i>0}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}P\Big\{z(t)=z-e_i+e'_i,\psi_{k,1}(t)<x_{k,1},\ldots,\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0}\leqslant$$

$$\leqslant\psi_{k,n_k+n'_k}(t)<x_{k,n_k+n'_k}+\alpha_k(n_k+n'_k)hI_{n_k>0},\ k\in J,\ k\neq i,$$

$$\psi_{i,1}(t)<x_{i,1},\ldots,\alpha_i(n_i+n'_i)hI_{n_i>1}\leqslant\psi_{i,n_i+n'_i}(t)<$$

$$<x_{i,n_i+n'_i}+\alpha_i(n_i+n'_i)hI_{n_i>1}\Big\}(\varphi_i h+o(h))I_{n_i>0}+o(h).$$

Далее каждую вероятность, входящую в приведенные выше уравнения, выразим через функции вида

$$F_t(z,x) = P\left\{z(t) = z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \psi_{i,n_i+n_i'}(t) < x_{i,n_i+n_i'},\ i \in J\right\}.$$

Рассматривая $F_t(z,x)$ как сложные функции от h и предполагая, что у них существуют частные производные первого порядка по переменным t и $x_{i,n_i+n_i'}$, запишем разложения этих функций в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, учитывая, что

$$P\Big\{z(t) = z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i+n_i')h \leqslant$$
$$\leqslant \psi_{i,n_i+n_i'}(t) < x_{i,n_i+n_i'} + \alpha_i(n_i+n_i')h,\ i \in J\Big\} =$$
$$= F_t\left(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n_i'} + \alpha_i(n_i+n_i')h,\ i \in J\right) -$$
$$- \sum_{k=1}^{N} F_t\Big(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n_i'} + \alpha_i(n_i+n_i')h,$$
$$i \in J, i \neq k; x_{k,1}, \ldots, x_{k,n_k+n_k'-1}, \alpha_k(n_k+n_k')h\Big) + \ldots$$
$$\ldots + F_t\left(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n_i'-1}, \alpha_i(n_i+n_i')h,\ i \in J\right).$$

Очевидно, что те функции $F_t(z,x)$, у которых в качестве аргументов будут встречаться h не менее двух раз, при разложении в ряд Тейлора будут давать $o(h)$. Поэтому

$$P\Big\{z(t) = z, \psi_{i,1}(t) < x_{i,1}, \ldots, \alpha_i(n_i+n_i')h \leqslant$$
$$\leqslant \psi_{i,n_i+n_i'}(t) < x_{i,n_i+n_i'} + \alpha_i(n_i+n_i')h, i \in J\Big\} =$$
$$= F_t\left(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n_i'},\ i \in J\right) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_t(z, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n_i'},\ i \in J)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}} \alpha_i(n_i+n_i')h -$$
$$- \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_t(z, x_{l,1}, \ldots, x_{l,n_l+n_l'},\ l \in J,\ l \neq i; x_{i,1}, \ldots, x_{i,n_i+n_i'-1}, 0)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}} \times$$
$$\times \alpha_i(n_i+n_i')h + o(h).$$

Выражения вида $B_i(n_i+n_i', x_{i,n_i+n_i'} + \alpha_i(n_i+n_i')\theta)$ также раскладываем в ряд Тейлора как функцию переменной θ.

Устремляя t к бесконечности и учитывая, что в этом случае частная производная $F_t(z,x)$ по переменной t стремится к нулю, получаем следующую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&F(z,x) = F(z,x) + h\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(n_i+n_i') \times \\
&\times\left(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}} - \left(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}\right)_{x_{i,n_i+n_i'}=0}\right) I_{n_i>0} - \\
&-\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\lambda_i+\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n_i'>0}\right)h + o(h)\right)F(z,x) + \\
&+\sum_{i=1}^{N}\left(\lambda_i h + o(h)\right)B_i(n_i+n_i', x_{i,n_i+n_i'})F(z-e_i,x) + \\
&+h\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1, i\neq j}^{N}\alpha_j(n_j+n_j'+1)p_{j,i}B_i(n_i+n_i', x_{i,n_i+n_i'}) \times \\
&\times\left(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n_j'+1}}\right)_{x_{j,n_j+n_j'+1}=0} I_{n_i>0} + \\
&+h\sum_{j=1}^{N}\alpha_j(n_j+n_j'+1)p_{j,0}\left(\frac{\partial F(z+e_j,x)}{\partial x_{j,n_j+n_j'+1}}\right)_{x_{j,n_j+n_j'+1}=0} + \\
&+\sum_{i=1}^{N}F(z+e_i-e_i',x)(\nu_i h+o(h))I_{n_i'>0} + \\
&+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i+e_i',x)(\varphi_i h+o(h))I_{n_i>0} + o(h).
\end{aligned}
\tag{П.2}
$$

Вычтем из обеих частей $F(z,x)$, после чего оставшуюся ненулевой правую часть разделим на h и устремим h к нулю. Таким образом, для $F(z,x)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&F(z,x)\sum_{i=1}^{N}\left(\lambda_i+\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n_i'>0}\right) = \\
&=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(n_i+n_i')\left(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}} - \left(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n_i'}}\right)_{x_{i,n_i+n_i'}=0}\right) I_{n_i>0} + \\
&+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i B_i(n_i+n_i', x_{i,n_i+n_i'})F(z-e_i,x) +
\end{aligned}
$$

$$
\text{(П.3)}\qquad +\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1,i\neq j}^{N}\alpha_j(n_j+n'_j+1)p_{j,i}B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i})\times
$$

$$
\times\left(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}}\right)_{x_{j,n_j+n'_j+1}=0} I_{n_i>0}+
$$

$$
+\sum_{j=1}^{N}\alpha_j(n_j+n'_j+1)p_{j,0}\left(\frac{\partial F(z+e_j,x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}}\right)_{x_{j,n_j+n'_j+1}=0}+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{N}F(z+e_i-e'_i,x)\nu_i I_{n'_i>0}+\sum_{i=1}^{N}F(z-e_i+e'_i,x)\varphi_i I_{n_i>0}.
$$

Разобьем эту систему уравнений на уравнения локального баланса:

$$
\text{(П.4)}\qquad \sum_{i=1}^{N}\lambda_i F(z,x)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j(n_j+n'_j+1)p_{j,0}\left(\frac{\partial F(z+e_j,x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}}\right)_{x_{j,n_j+n'_j+1}=0},
$$

$$
\text{(П.5)}\qquad \begin{gathered} F(z,x)\big(\nu_i I_{n_i>0}+\varphi_i I_{n'_i>0}\big)= \\ =F(z+e_i-e'_i,x)\nu_i I_{n'_i>0}+F(z-e_i+e'_i,x)\varphi_i I_{n_i>0}, \end{gathered}
$$

$$
\text{(П.6)}\qquad \alpha_i(n_i+n'_i)\left(\left(\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\right)_{x_{i,n_i+n'_i}=0}-\frac{\partial F(z,x)}{\partial x_{i,n_i+n'_i}}\right)I_{n_i>0}=
$$

$$
=\lambda_i B_i\left(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i}\right)F(z-e_i,x)+
$$

$$
+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\alpha_j(n_j+n'_j+1)p_{j,i}B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i})\times
$$

$$
\times\left(\frac{\partial F(z+e_j-e_i,x)}{\partial x_{j,n_j+n'_j+1}}\right)_{x_{j,n_j+n'_j+1}=0} I_{n_i>0},\quad i\in J.
$$

Покажем, что функции распределения вероятностей $F(z,x)$, определенные формулами (6), являются решением системы уравнений (П.4)–(П.6), а следовательно, и системы уравнений (П.3).

Если $n_i>0$, то подставляя (6) в уравнение (П.6), приводя подобные слагаемые, деля обе части полученного соотношения на $B_i(n_i+n'_i,x_{i,n_i+n'_i})F(z-e_i,x)$, получаем уравнение трафика (1), если $n_i=0$, то (П.6) превращается в тождество. Подставляя (6) в (П.4), получаем следствие уравнения трафика $1=\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_j p_{j,0}$. И, наконец, подставляя (6) в (П.5), получаем тождество.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.* Distributions in stochastic network models. N.Y.: Nova Publishers Incorporated, 2008.

2. *Malinkovsky Yu., Bojarovich J.* An Open Queueing Network with Partly Non-active Customers // Queues: flows, systems, networks. Proc. 21th Int. Conf. Modern Probabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information and Telecommunication Networks. Minsk, Jan. 31–Feb. 3, 2011, BSU. 2011. P. 34–37.
3. *Боярович Ю.С.* Стационарное распределение сети с различными типами заявок и ненадежными требованиями / Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения. Сб. науч. ст. Минск: БГУ, 2009. Т. 2. С. 14–20.
4. *Jackson J.R.* Network of Waiting Lines // Oper. Research. 1957. No. 4. P. 518–521.
5. *Севастьянов Б.А.* Предельная теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами // Теор. вероятностей и ее применения. 1957. Т. 2. № 1. С. 106–116.
6. *Старовойтов А.Н.* Инвариантность стационарного распределения состояний сетей с многорежимными стратегиями обслуживания // Пробл. передачи информации. 2006. Т. 42. № 4. С. 121–128.
7. *Ивницкий В.А.* Теория сетей массового обслуживания. М.: Физматлит, 2004.
8. *Боярович Ю.С.* Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний замкнутой сети массового обслуживания с временно неактивными заявками // АиТ. 2012. № 10. С. 32–41.

   Boyarovich Yu.S. The Stationary Distribution Invariance of States in a Closed Queueing Network with Temporarily Non-active Customers // Autom. Remote Control. 2012. No. 73. P. 1616–1623.
9. *Bojarovich J., Malinkovsky Yu.V.* Stationary Distribution Invariance of an Open Queueing Network with Temporarily Non-active Customers // Tomsk State University. J. Control and Computer Sci. 2012. No. 20. P. 62–70.
10. *Старовойтов А.Н.* Инвариантность стационарного распределения состояний открытой сети с многорежимными стратегиями обслуживания // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2005. № 5. С. 169–171.
11. *Старовойтов А.Н.* Об инвариантности стационарных распределений вероятностей состояний открытой сети с многорежимными стратегиями обслуживания // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2006. № 4. С. 159–161.
12. *Старовойтов А.Н.* Сети с многорежимным обслуживанием, отрицательными заявками и произвольным временем пребывания в режимах // Изв. Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2007. № 6. С. 193–198.
13. *Bojarovich J., Dudovskaya Y.* Stationary Distribution Insensitivity of a Closed Queueing Network with Non-active Customers // Inform. Technologies and Mathematical Modelling Communications in Computer and Inform. Sci. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2014. V. 487. P. 50–58.
14. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: КомКнига, 2005.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Ляховым.

Поступила в редакцию 07.12.2014