ИЗВЕСТИЯ РАН. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2015, № 2, с. 40–49

УПРАВЛЕНИЕ В ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ

УДК 517.977

УСПОКОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ С МНОГИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ ПОСРЕДСТВОМ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

А. В. Метельский, О. И. Урбан, В. Е. Хартовский

Белоруссия, Минск, Белорусский национальный технический ун-т,

Гродно, Гродненский государственный ун-т им. Я. Купалы

Поступила в редакцию 29.04.14 г., после доработки 22.10.14 г.

Для линейных автономных дифференциально-разностных систем с соизмеримыми запаздываниями решена задача успокоения решения посредством линейного дифференциально-разностного регулятора типа обратной связи по состоянию. Предложено обобщение этих результатов на линейные автономные дифференциально-разностные системы с соизмеримыми запаздываниями нейтрального типа в случае непрерывного решения. Отличительная черта работы – отсутствие у исходной системы свойства полной управляемости.

DOI: 10.7868/S0002338815020109

Введение. Одним из ключевых вопросов теории автоматического регулирования является конструирование регуляторов, обеспечивающих системе заданные свойства. Это приводит к необходимости исследования задач стабилизации [1–4], модальной управляемости [5, 6], спектральной приводимости [7, 8], полной управляемости обратной связью [9–11]. На последней остановимся подробнее.

Проблема полной управляемости (полного успокоения) впервые была поставлена Н.Н. Красовским [12] для систем запаздывающего типа и затем изучалась многими авторами (исторические сведения приведены в [13, 14], поэтому в настоящей статье не обсуждаются). В [13–15] предложено обобщение этой задачи в смысле успокоения решения системы постоянно действующим управлением. В большинстве случаев результаты исследований задачи полной управляемости и ее обобщения [13–15] представляют собой, как правило, критерии разрешимости и методы формирования программных управлений. В качестве исключения укажем [9–11], в которых успокоение одновходной линейной дифференциально-разностной системы осуществляется при помощи обратной связи. Основная идея – за счет регулятора полного успокоения обеспечить точечную вырожденность замкнутой системы в направлениях, отвечающих фазовым переменным исходной системы. При этом необходимым и достаточным условием существования регулятора является условие полной управляемости [16], которое совпадает с условием спектральной управляемости [17] – полной управляемости конечномерной подсистемы, соответствующей всякому спектральному значению исходной системы.

В случае многовходных систем с многими запаздываниями в управлении условия полной (спектральной) управляемости являются избыточными для существования программного управления, успокаивающего решение [13–15]. Соответственно возникает вопрос: можно ли в случае системы, не обладающей свойством полной управляемости, замкнуть ее линейной обратной связью так, чтобы обеспечить решению исходной системы равенство $x(t) \equiv 0$, $t \geq t_1$, каково бы ни было начальное состояние системы? В настоящей статье получены условия на параметры системы с соизмеримыми запаздываниями, при которых дается положительный ответ на поставленный вопрос. Достаточные условия существования такой обратной связи совпадают с критерием успокоения решения не полностью управляемых систем [14, 15].

Охарактеризуем структуру статьи. В разд. 1–3 для многовходной линейной дифференциально-разностной системы строится линейный регулятор, обеспечивающий успокоение решения в случае, когда нарушается условие полной управляемости. В разд. 4 предложенная методика обобщается на случай системы нейтрального типа с непрерывным решением.

1. Структура регулятора для систем запаздывающего типа. Предположим, что объект управления описывается линейной автономной дифференциально-разностной системой с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(t-ih) + \sum_{i=0}^{m} B_i u(t-ih), \quad t > 0, \tag{1.1}$$

и начальным условием

$$x(t) = \eta(t), \quad u(t) \equiv u^0(t), \ t \in [-mh, \ 0], \tag{1.2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – решение уравнения (1.1), $u \in \mathbb{R}^r$ – кусочно-непрерывное управляющее воздействие (управление), $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $i = \overline{0,m}$, – постоянные матрицы, $h > 0$ – постоянное запаздывание. Считаем, что в начальном условии (1.2) функция $\eta \in C([-mh,0],\mathbb{R}^n)$, где $C([-mh,0],\mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных на отрезке $[-mh,0]$ вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^n$, $u^0(t)$, $t \in [-mh,0]$ – произвольная кусочно-непрерывная функция.

Если определить полиномиальные матрицы

$$A(z) = \sum_{i=0}^{m} A_i z^i, \quad B(z) = \sum_{i=0}^{m} B_i z^i$$

и считать, что z – оператор сдвига (т.е. $zf(t) = f(t-h)$), то систему (1.1) можно переписать в операторном виде $\dot{x}(t) = A(z)x(t) + B(z)u(t)$. Далее, для удобства изложения, будем придерживаться подобной формы записи.

Критерий полной управляемости (полного успокоения) системы (1.1) имеет вид [16]

$$\operatorname{rank}[\lambda E_n - A(e^{-\lambda h}), B(e^{-\lambda h})] = n \ \forall \ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1.3}$$

где $E_k \in \mathbb{R}^{k\times k}$ – единичная матрица, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел. Напомним, что система (1.1) называется полностью управляемой, если для любого указанного выше начального условия (1.2) существуют момент времени $t_1 > 0$ и управление $u(t)$, $t \in (0, \ t_1 - mh]$, $u(t) \equiv 0, \ t > t_1 - mh$, такие, что

$$x(t) \equiv 0, \quad t \ge t_1. \tag{1.4}$$

В [9–11] показано, что для случая систем (1.1) со скалярным управлением без запаздывания при условии полной управляемости (1.3) тождество (1.4) можно обеспечить регулятором типа обратной связи по состоянию. Однако регуляторы работ [9–11] на общий случай систем (1.1) автоматически не переносятся. Это связано с двумя причинами. Во-первых, для систем общего вида (1.1) условие (1.3) не является необходимым для существования программного управления без требования $u(t) \equiv 0, \ t > t_1 - mh$, реализующего (1.4) [14, 15]. Во-вторых, входное воздействие типа обратной связи в случае нарушения условия (1.3) должно менять свою структуру, согласно некоторому разностному уравнению, более подробно этот вопрос рассмотрен ниже (см. утверждение 1).

Задачу выбора управления $u(t)$, $t \ge 0$, обеспечивающего тождество (1.4) без требования $u(t) \equiv 0, \ t > t_1 - mh$, будем называть, в отличие от задачи полного успокоения системы [9–12, 14, 16], задачей успокоения решения системы.

В настоящей работе успокоение решения системы предлагается осуществить линейным дифференциально-разностным регулятором вида

$$u(t) = K_1(z)x(t) + e_1 x_{n+1}(t) + T\psi(t), \quad t > 0, \tag{1.5}$$

$$\psi(t) = Sz\psi(t) + K_2(z)x(t), \quad t > 0, \tag{1.6}$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F_1^1(z)x(t) + F_2^1(z)x_{n+1}(t) + F_3^1(z)y(t), \ t > 0, \tag{1.7}$$

$$\dot{y}(t) = F_1^2(z)x(t) + F_2^2(z)x_{n+1}(t) + F_3^2(z)y(t), \ t > 0, \tag{1.8}$$

где $K_1(z) \in \mathbb{R}^{r\times n}[z]$, $K_2(z) \in \mathbb{R}^{r_T\times n}[z]$ ($\mathbb{R}^{k_1\times k_2}[z]$ – множество матриц размера $k_1 \times k_2$, элементы которых являются полиномами переменной z), $T \in \mathbb{R}^{r\times r_T}$, $S \in \mathbb{R}^{r_T\times r_T}$, r_T – некоторое натуральное число, $e_1 = \operatorname{col}[1, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}^r$, $F_1^1(z) \in \mathbb{R}^{1\times n}[z]$, $F_2^1(z) \in \mathbb{R}^{1\times 1}[z]$, $F_3^1(z) \in \mathbb{R}^{1\times s}[z]$, $F_1^2(z) \in \mathbb{R}^{s\times n}[z]$, $F_2^2(z) \in \mathbb{R}^{s\times 1}[z]$, $F_3^2(z) \in \mathbb{R}^{s\times s}[z]$; $x_{n+1} \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathbb{R}^{r_T}$, $y = \operatorname{col}[y_1, \dots, y_s] \in \mathbb{R}^s$ – дополнительные переменные. Функции $x(t)$, $t < -mh$, и $x_{n+1}(t)$, $y(t)$, $\psi(t)$, $t \le 0$, могут быть любыми непрерывными.

Замечание 1. Уточним, как формируется управляющее воздействие посредством регулятора (1.5)–(1.8). На каждом фиксированном полуинтервале $(lh, (l+1)h]$, $l = 0, 1, \dots$, управление $u(t)$, $t > 0$, на основании равенства (1.5) и разностного уравнения (1.6) линейно выражается через x, x_{n+1} и y. Подставив это управление в (1.1) и дополнив полученное соотношение уравнениями (1.7), (1.8), получим на полуинтервале $(lh, (l+1)h]$, $l = 0, 1, \dots$, линейную автономную дифференциальную систему с решением $\operatorname{col}[x, x_{n+1}, y]$.

Сформулируем условия разрешимости задачи успокоения решения системы, а также опишем матрицы T и S, входящие в структуру регулятора (1.5)–(1.8). Для этого по аналогии с [13–15] рассмотрим последовательность векторов δ_k, $k = m, m+1, \dots$, которая является решением разностного уравнения

$$B_0\delta_k + \sum_{i=1}^{m} B_i\delta_{k-i} = 0, \quad k = m, m+1, \dots, \tag{1.9}$$

порождаемого начальным условием $\delta_i = \tilde{\delta}_i$, $i = \overline{0, m-1}$. Последовательность δ_k, $k = m, m+1, \dots$, существует в том и только в том случае [13–15], когда $\tilde{\delta}_{m-i} = T_i c$, $i = \overline{1, m}$, где $T_i \in \mathbb{R}^{r\times r_T}$ – некоторые матрицы, $c \in \mathbb{R}^{r_T}$ – произвольный постоянный вектор (один и тот же для всех матриц T_i). Процедура построения матриц T_i приведена в работах [13–15], поэтому здесь не описывается. Отметим, что ее реализация всегда возможна и заключается в решении конечного числа однородных алгебраических систем. В (1.5) и далее полагаем $T = T_m$.

Найдем произвольную матрицу $S \in \mathbb{R}^{r_T\times r_T}$, удовлетворяющую уравнениям

$$B_0T_1S + \sum_{i=1}^{k} B_iT_i = 0, \quad T_kS = T_{k-1}, \quad k = \overline{2, m}.$$

Существование матрицы S следует из определения матриц T_i. Заметим, что будет выполняться равенство

$$\sum_{i=0}^{m} B_iTS^{m-i} = 0. \tag{1.10}$$

Определим матрицы $G_0 = B_0T$, $G_i = G_{i-1}S + B_iT$, $i = \overline{1, m}$. Обратим внимание, что

$$G_m = \sum_{i=0}^{m} B_iTS^{m-i} = 0.$$

Обозначим

$$G(z) = \sum_{i=0}^{m-1} G_iz^i.$$

Справедливо следующее утверждение [14].

Теорема 1 (критерий успокоения решения системы). Для того чтобы для любого начального условия (1.2) системы (1.1) существовало управление $u(t)$, $t > 0$, обеспечивающее (1.4), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\operatorname{rank}[\lambda E_n - A(e^{-\lambda h}), B(e^{-\lambda h}), G(e^{-\lambda h})] = n \ \forall\ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{1.11}$$

Далее будем считать, что имеет место условие (1.11). Перейдем к построению регулятора (1.5)–(1.8), обеспечивающего тождество (1.4).

2. Процедура построения регулятора. Прежде всего разъясним влияние на динамику замкнутой системы функции ψ, входящей в структуру регулятора (1.5)–(1.8). Для этого докажем следующее утверждение, в котором попутно укажем точный вид системы, которой удовлетворяют функции x, x_{n+1}, y в случае регулятора (1.5)–(1.8).

Лемма. Пусть $K_i(z)$, $i = 1,2$ и $F_i^j(z)$, $i = \overline{1,3}$, $j = 1,2$, – любые полиномиальные матрицы указанных выше размеров. При любых $\psi(t)$, $x(t)$, $x_{n+1}(t)$, $y(t)$, $t \le 0$, функции $x(t)$, $x_{n+1}(t)$, $y(t)$ при $t > mh$ удовлетворяют линейной автономной дифференциально-разностной системе с соизмеримыми запаздываниями вида

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_{n+1}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(z) + B(z)K_1(z) + G(z)K_2(z) & B(z)e_1 & 0_{n\times s} \\ F_1^1(z) & F_2^1(z) & F_3^1(z) \\ F_1^2(z) & F_2^2(z) & F_3^2(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_{n+1}(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

где $0_{n\times s} \in \mathbb{R}^{n\times s}$ – нулевая матрица.

Доказательство. Пусть $\psi(t)$, $t > 0$, определяется уравнением (1.6). Используя определение матриц G_i, проделаем следующую цепочку преобразований:

$$B(z)T\psi(t) = \sum_{i=0}^{m} B_i z^i T\psi(t) = G_0\psi(t) + \sum_{i=0}^{m-1} (G_{i+1} - G_i S)\, z^{i+1}\psi(t) = \sum_{i=0}^{m} G_i z^i \psi(t) - \sum_{i=0}^{m-1} G_i z^{i+1} S\psi(t) =$$

$$= G(z)(E_{\mathrm{T}} - zS)\psi(t).$$

В последнем равенстве воспользовались тем, что $G_m = 0$. Учитывая (1.6), окончательно приходим к равенству

$$B(z)T\psi(t) = G(z)K_2(z)x(t). \tag{2.2}$$

Подставим теперь управление $u(t)$, $t > 0$, определяемое формулой (1.5), в систему (1.1) и заменим величину $B(z)T\psi(t)$, согласно (2.2). В итоге получим, что решение $\mathrm{col}\left[x(t), x_{n+1}(t), y(t)\right]$, $t > mh$, системы (1.1), замкнутой регулятором (1.5)–(1.8), удовлетворяет (2.1). Лемма доказана.

Опишем процедуру построения регулятора (1.5)–(1.8), обеспечивающего решению системы (1.1) тождество (1.4). Положим $\tilde{B}(z) = \left[B(z),\ G(z)\right]$. Рассмотрим пару матриц $\{A(z), \tilde{B}(z)\}$. В силу (1.11)

$$\mathrm{rank}[\tilde{B}(z), \ldots, A^{n-1}(z)\tilde{B}(z)] = n$$

(здесь и далее под рангом полиномиальной матрицы понимаем [18, с. 143] наибольший порядок неравного тождественному нулю ее минора). Выберем столбцы $\tilde{b}_{s_i}(z)$, $i = \overline{1,\theta}$, матрицы $\tilde{B}(z)$ так, чтобы имели место равенства:

$$\mathrm{rank}[\tilde{b}_{s_1}(z), \ldots, A^{n_1-1}(z)\tilde{b}_{s_1}(z), \tilde{b}_{s_2}(z), \ldots, A^{n_2-1}(z)\tilde{b}_{s_2}(z), \ldots, A^{n_j-1}(z)\tilde{b}_{s_j}(z)] =$$

$$= \mathrm{rank}[\tilde{b}_{s_1}(z), \ldots, A^{n_1-1}(z)\tilde{b}_{s_1}(z), \tilde{b}_{s_2}(z), \ldots, A^{n_2-1}(z)\tilde{b}_{s_2}(z), \ldots, A^{n_j-1}(z)\tilde{b}_{s_j}(z), A^{n_j}(z)\tilde{b}_{s_j}(z)] =$$

$$= n_1 + n_2 + \ldots + n_j,\ \ j = \overline{1,\theta},\ \ n_1 + n_2 + \ldots + n_\theta = n.$$

Обозначим

$$A_{\tilde{b}}(z) = [\tilde{b}_{s_1}(z), \ldots, A^{n_1-1}(z)\tilde{b}_{s_1}(z), \tilde{b}_{s_2}(z), \ldots, A^{n_2-1}(z)\tilde{b}_{s_2}(z), \ldots, \tilde{b}_{s_\theta}(z), \ldots, A^{n_\theta-1}(z)\tilde{b}_{s_\theta}(z)].$$

Учитывая, что $\mathrm{rank}\, A_{\tilde{b}}(z) = n$, построим [18, с. 139] квадратную полиномиальную матрицу $R(z)$, $\det R(z) \equiv \mathrm{const} \ne 0$, такую, что матрица $R(z)A_{\tilde{b}}(z)$ имеет структуру

$$R(z)A_{\tilde b}(z)=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & * & \dots & * \\ * & * & \dots & *\end{bmatrix},$$

где символом “*” обозначены некоторые полиномы, причем полиномы, стоящие на побочной диагонали, отличны от тождественного нуля. Заметим, что умножение матрицы $A_{\tilde b}(z)$ слева на матрицу $R(z)$ равносильно элементарным преобразованиям ее строк. Положим $\bar A(z)=R(z)A(z)R^{-1}(z)$, $\bar B(z)=R(z)\tilde B(z)$. Далее для простоты считаем, что в матрице $A_{\tilde b}(z)$ номер $s_1=1$. Тогда первый столбец $\bar b_1(z)$ матрицы $\bar B(z)$ будет иметь вид $\mathrm{col}[0,\dots,0,\bar b(z)]$, где $\bar b(z)$ – некоторый полином.

Поскольку имеет место (1.11), то $\mathrm{rank}[\lambda E_n-\bar A(e^{-\lambda h}),\ \bar B(e^{-\lambda h})]=n\ \forall\ \lambda\in\mathbb{C}$. В силу последнего условия можно построить [19] полиномиальную матрицу $\bar K(z)$, такую, что

$$\mathrm{rank}[\lambda E_n-D(e^{-\lambda h}),\ \bar b_1(e^{-\lambda h})]=n\ \forall\ \lambda\in\mathbb{C},\tag{2.3}$$

где $D(z)=\bar A(z)+\bar B(z)\bar K(z)$.

Введем в рассмотрение вспомогательную линейную автономную дифференциально-разностную систему с соизмеримыми запаздываниями

$$\dot{\bar x}(t)=D(z)\bar x(t)+\bar b_1(z)\bar x_{n+1}(t),\ t>0,\tag{2.4}$$

$$\dot{\bar x}_{n+1}(t)=v(t),\ t>0,\tag{2.5}$$

где $\bar x=\mathrm{col}[\bar x_1,\dots,\bar x_n]\in\mathbb{R}^n$, $\bar x_{n+1}\in\mathbb{R}$ – решение системы (2.4), (2.5), $v(t),\ t>0$, – скалярное кусочно-непрерывное управляющее воздействие. Необходимости конкретизировать начальное условие системы (2.4), (2.5) для дальнейших рассуждений нет. Из (2.3) следует, что

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}\lambda E_n-D(z) & -\bar b_1(z) & 0_n \\ 0 & \lambda & 1\end{bmatrix}=n+1\ \forall\ \lambda\in\mathbb{C},$$

где $0_n=\mathrm{col}[0,\dots,0]\in\mathbb{R}^n$, т.е. для системы (2.4), (2.5) выполняется критерий полной управляемости (1.3). Используя методику работы [9], построим регулятор полного успокоения системы (2.4), (2.5). Этот регулятор запишем в виде

$$v(t)=\bar F_1^1(z)\bar x(t)+F_2^1(z)\bar x_{n+1}(t)+F_3^1(z)\bar y(t),\quad t>0,\tag{2.6}$$

$$\dot{\bar y}(t)=\bar F_1^2(z)\bar x(t)+F_2^2(z)\bar x_{n+1}(t)+F_3^2(z)\bar y(t),\quad t>0,\tag{2.7}$$

где вспомогательные переменные $\bar x_{n+1}\in\mathbb{R}$, $\bar y=\mathrm{col}[\bar y_1,\dots,\bar y_s]\in\mathbb{R}^s$, s – некоторое натуральное число, $\bar F_1^1(z)\in\mathbb{R}^{1\times n}[z]$, $F_2^1(z)\in\mathbb{R}^{1\times 1}[z]$, $F_3^1(z)\in\mathbb{R}^{1\times s}[z]$, $\bar F_1^2(z)\in\mathbb{R}^{s\times n}[z]$, $\bar F_2^2(z)\in\mathbb{R}^{s\times 1}[z]$, $F_3^1(z)\in\mathbb{R}^{s\times s}[z]$. Согласно построению регулятора полного успокоения [9], замкнутая система (2.4)–(2.7) является точечно вырожденной в направлениях, отвечающих первым $n+1$ компонентам ее решения, т.е. компонентам $\bar x_1,\bar x_2,\dots,\bar x_{n+1}$. Другими словами, найдется момент времени $t_1>0$, такой, что каковы бы ни были начальные условия $\bar x(t),\bar x_{n+1}(t),\bar y(t),t\le 0$, будут выполняться тождества

$$\bar x_i(t)\equiv 0,\quad t\ge t_1,\quad i=\overline{1,n+1}.\tag{2.8}$$

В соотношениях (1.5)–(1.8) положим $K(z)=\bar K(z)R(z)=\mathrm{col}[K_1(z),K_2(z)]$, $K_1(z)\in\mathbb{R}^{r\times n}[z]$, $K_2(z)\in\mathbb{R}^{r_T\times n}[z]$, $F_1^1(z)=\bar F_1^1(z)R(z)$, $F_1^2(z)=\bar F_1^2(z)R(z)$, матрицы T, S, $F_i^j(z),i=2,3,j=1,2,$ указаны раньше. Регулятор (1.5)–(1.8) построен.

Покажем теперь, что построенный регулятор действительно обеспечивает системе (1.1) равенство (1.4). Для этого рассмотрим систему (2.1). Перейдем в ней к новым переменным по формуле

$$\mathrm{col}[x(t),x_{n+1}(t),y(t)]=\mathrm{diag}[R^{-1}(z),1,E_s]\mathrm{col}[\bar x(t),\bar x_{n+1}(t),\bar y(t)].\tag{2.9}$$

В итоге получим систему (2.4)–(2.7). Преобразование (2.9) невырожденное, поэтому из равенства (2.8) следует, что система (2.1) является точечно вырожденной в направлениях, отвечающих первым $n+1$ переменным. А это значит, что при любой начальной функции η в (1.2) будет иметь место тождество (1.4).

Замечание 2. Если для исходной системы выполнено условие (1.3), то для построения регулятора (1.5)–(1.8) необходимо провести указанные выше рассуждения с матрицей $G(z)=0$. При этом в регуляторе (1.5)–(1.8) следует положить $S=0$, $T=0$, $K_2(z)=0$, т.е. уравнение (1.6) из структуры регулятора можно исключить.

3. Обоснование алгебраической связи в структуре регулятора. В регуляторе (1.5)–(1.8) имеется алгебраическая связь, определяемая разностным уравнением (1.6). Поэтому входное воздействие (1.5) как функция аргумента x на каждом полуинтервале $(lh,\ (l+1)h]$, $l=0,1,\ldots$, будет менять свою структуру. Если для системы (1.1) выполняется условие полной управляемости (1.3), то в соответствии с замечанием 2 входное воздействие как функция аргумента x будет иметь постоянную структуру. В общем случае построить регулятор с входным воздействием постоянной структуры относительно x, обеспечивающий (1.4), т.е. регулятор более простого типа, невозможно. Обоснуем это следующим утверждением.

Утверждение. Пусть для системы (1.1) нарушается условие (1.3). Если управление $u(t)$, $t>0$, обеспечивает решению системы (1.1) тождество (1.4), то при $t>t_2=t_1+mh$ оно представимо в виде $u(t)=T\varphi(t)+\mu(t)$, $t>t_2$, где функция $\varphi(t), t>t_2-h$, удовлетворяет разностному уравнению $\varphi(t)=Sz\varphi(t)$, $t>t_2$, а функция $\mu(t)$, $t>t_2-mh$, – уравнению $B(z)\mu(t)=0$, $t>t_2$, и начальному условию $\mu(t)\equiv 0, t\in(t_2-mh,t_2]$.

Доказательство. Пусть нарушается условие (1.3). Тогда если управление $u(t)$, $t>0$, обеспечивает тождество (1.4), то [14] выполняется равенство

$$B(z)u(t)=0, \quad t>t_2. \tag{3.1}$$

Формулу (3.1) запишем в виде

$$B_0u_k(t)+\sum_{i=1}^{m}B_iu_{k-i}(t)=0, \quad t\in(t_2,t_2+h], \quad k=0,1,\ldots, \tag{3.2}$$

где $u_k(t)=u(t+kh)$, $k=-m,-(m-1),\ldots$ При каждом фиксированном $t\in(t_2,t_2+h]$ соотношение (3.2) представляет собой разностное уравнение типа (1.9). Поскольку (3.2) имеет решение $u(t)$, $t>0$, то найдется [14] кусочно-непрерывная функция $f(t)$, $t\in(t_2,t_2+h]$, такая, что $u_{-i}(t)=T_if(t)$, $t\in(t_2,t_2+h]$, $i=\overline{1,m}$.

Определим функции $\tilde u_k(t)$, $t\in(t_2,t_2+h]$, равенствами

$$\tilde u_{-i}(t)=TS^{m-i}f(t), \quad i=\overline{1,m}, \quad \tilde u_k(t)=TS^{m-1}\varphi_k(t), \quad t\in(t_2,t_2+h], \quad k=0,1,\ldots \tag{3.3}$$

В (3.3) учтено, что $T_i=TS^{m-i}$, $i=\overline{1,m}$, а функции $\varphi_k(t)$, $t\in(t_2,t_2+h]$, $k=0,1,\ldots$, определяются уравнением

$$B_0TS^{m-1}\varphi_k(t)+\sum_{i=1}^{m}B_iTS^{m-i}\varphi_{k-i}(t)=0, \quad t\in(t_2,t_2+h], \quad k=0,1,\ldots, \tag{3.4}$$

и начальным условием $\varphi_{-i}(t)=f(t)$, $t\in(t_2,t_2+h]$, $i=\overline{1,m}$. Используя равенство (1.10), непосредственной проверкой убеждаемся, что функции $\varphi_k(t)=S\varphi_{k-1}(t)$, $t\in(t_2,t_2+h]$, $k=0,1,\ldots$, удовлетворяют уравнению (3.4). Поэтому функции (3.3) удовлетворяют уравнению (3.2) (при $u_k=\tilde u_k$). Определим функцию φ равенствами $\varphi(t)=S^{m-1}\varphi_k(t-kh)$, $t\in(t_2+kh,t_2+(k+1)h]$, $k=-1,0,\ldots$ Тогда функция $\tilde u(t)=T\varphi(t)$, $t>t_2$, удовлетворяет уравнению (3.1) с начальными данными $\tilde u(t-ih)=T_if(t)$, $t\in(t_2,t_2+h]$, $i=\overline{1,m}$. Положим $\mu(t)=u(t)-\tilde u(t)$, $t>t_2-mh$. Утверждение доказано.

Замечание 3. Ввиду (2.2) $B(z)(T\psi(t)+\mu(t))=B(z)T\psi(t)=G(z)K_2(z)x(t)$, $t>t_2-mh$. Поэтому функция μ не влияет (см. лемму 1) на решение $x(t)$, $t>mh$, замкнутой системы (1.1). Этим обусловлен вид уравнения (1.5) регулятора.

З а м е ч а н и е 4. Можно построить регулятор, обеспечивающий системе (2.1) помимо тождества (1.4) конечный спектр и асимптотическую устойчивость. Для этого надо применительно к системе (2.8), (2.9) воспользоваться результатами работ [10, 11]. Однако в этом случае в замкнутой системе, вообще говоря, появится распределенное запаздывание.

4. Построение регулятора для системы нейтрального типа. В настоящем пункте рассмотрим вопрос построения регулятора типа обратной связи по состоянию в случае линейной автономной дифференциально-разностной системы нейтрального типа с многими соизмеримыми запаздываниями

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)-\sum_{i=1}^{m}L_i x(t-ih)\right)=\sum_{i=0}^{m}A_i x(t-ih)+\sum_{i=0}^{m}B_i u(t-ih),\quad t>0, \tag{4.1}$$

где $L_i\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Все остальные обозначения, используемые в данном пункте без пояснений, имеют прежний смысл. В качестве начального условия системы (4.1) возьмем набор (1.2) с начальной функцией $\eta\in C\left([-mh,0],\mathbb{R}^n\right)$ и произвольной кусочно-непрерывной функцией u^0. Согласно [20, с. 322], под решением системы (4.1) понимается непрерывная (необязательно дифференцируемая) функция $x(t)$, $t\ge -mh$, совпадающая с функцией η при $t\in[-mh,0]$ и удовлетворяющая (4.1) почти всюду.

Введем полиномиальную матрицу

$$L(z)=\sum_{i=1}^{m}L_i z^i$$

и рассмотрим полиномиальную матрицу

$$G(z)=\sum_{i=0}^{m-1}G_i z^i,$$

где матрицы G_i определены ранее (см. разд. 1). Справедливо следующее утверждение [15].

Т е о р е м а 2 (критерий успокоения решения). Для того чтобы для любого начального условия (1.2) системы (4.1) существовало управление $u(t)$, $t>0$, обеспечивающее (1.4), необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись равенства:

$$1)\ \operatorname{rank}[\lambda(E_n-L(e^{-\lambda h}))-A(e^{-\lambda h}),B(e^{-\lambda h}),G(e^{-\lambda h})]=n\ \ \forall\ \lambda\in\mathbb{C}, \tag{4.2}$$

$$2)\ \det\left[\lambda^m E_n-\sum_{i=1}^{m}\lambda^{m-i}L_i\right]=\lambda^{mn}. \tag{4.3}$$

З а м е ч а н и е 5. Если в (4.2) положить $G(e^{-\lambda h})=0$, то полученное условие одновременно с условием (4.3) будут определять для системы (4.1) критерий полной управляемости [15].

Рассмотрим вопрос построения линейной обратной связи, обеспечивающей решению x системы (4.1) тождество (1.4). Считаем, что имеют место условия (4.2), (4.3). Из (4.3) следует, что $\det\left[E_n-L(z)\right]\equiv 1$. Пусть $\Pi(z)$ − матрица, обратная к матрице $\left[E_n-L(z)\right]$. Обозначим $A_\Pi(z)=A(z)\Pi(z)$. Тогда в силу (4.2) будет выполняться

$$\operatorname{rank}[\lambda E_n-A_\Pi(e^{-\lambda h}),B(e^{-\lambda h}),G(e^{-\lambda h})]=n\ \forall\ \lambda\in\mathbb{C}. \tag{4.4}$$

Значит, для линейной автономной дифференциально-разностной системы (с решением $\breve{x}\in\mathbb{R}^n$)

$$\dot{\breve{x}}(t)=A_\Pi(z)\breve{x}(t)+B(z)u(t),\quad t>0, \tag{4.5}$$

существует регулятор вида (1.5)–(1.8), обеспечивающий $\breve{x}(t)\equiv 0$, $t\ge\hat{t}_1$, при некотором $\hat{t}_1>0$ независимо от начального условия системы (4.5). Этот регулятор запишем в виде

$$u(t)=K_1(z)\breve{x}(t)+e_1x_{n+1}(t)+T\psi(t),\quad t>0, \tag{4.6}$$

$$\psi(t)=Sz\psi(t)+K_2(z)\breve{x}(t),\quad t>0, \tag{4.7}$$

$$\dot{x}_{n+1}(t)=F_1^1(z)\breve{x}(t)+F_2^1(z)x_{n+1}(t)+F_3^1(z)y(t),\quad t>0, \tag{4.8}$$

$$\dot{y}(t)=F_1^2(z)\breve{x}(t)+F_2^2(z)x_{n+1}(t)+F_3^2(z)y(t),\quad t>0, \tag{4.9}$$

где все обозначения те же, что и в регуляторе (1.5)–(1.8). Подставив (4.6) в уравнение (4.5), получим

$$\dot{\breve{x}}(t) = \left(A_\Pi(z) + B(z)K_1(z)\right)\breve{x}(t) + B(z)e_1 x_{n+1}(t) + B(z)T\psi(t), \quad t > 0. \tag{4.10}$$

В уравнениях (4.6)–(4.10) сделаем замену переменных $\breve{x}(t) = \left[E_n - L(z)\right]x(t)$. После анализа полученных соотношений приходим к следующему утверждению: регулятор

$$u(t) = K_1(z)\left[E_n - L(z)\right]x(t) + e_1 x_{n+1}(t) + T\psi(t), \quad t > 0, \tag{4.11}$$

$$\psi(t) = Sz\psi(t) + K_2(z)\left[E_n - L(z)\right]x(t), \quad t > 0, \tag{4.12}$$

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F_1^1(z)\left[E_n - L(z)\right]x(t) + F_2^1(z)x_{n+1}(t) + F_3^1(z)y(t), \quad t > 0, \tag{4.13}$$

$$\dot{y}(t) = F_1^2(z)\left[E_n - L(z)\right]x(t) + F_2^2(z)x_{n+1}(t) + F_3^2(z)y(t), \quad t > 0, \tag{4.14}$$

обеспечивает решению системы (4.1) тождество

$$[E_n - L(z)]x(t) \equiv 0, \quad t \geq \hat{t}_1. \tag{4.15}$$

Обозначим

$$\hat{x}(t) = \mathrm{col}\left[x(t), \ldots, x(t-(m-1)h)\right], \quad \hat{L} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & \ldots & L_{m-1} & L_m \\ E_n & 0_{n\times n} & \ldots & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & \ldots & E_n & 0_{n\times n} \end{bmatrix}.$$

Уравнение (4.15) перепишем в виде

$$\hat{x}(t) = \hat{L}\hat{x}(t-h), \quad t \geq \hat{t}_1. \tag{4.16}$$

Используя теорему Лапласа для определителей и (4.3), приходим к равенству $\det[\lambda E_{mn} - \hat{L}] = \lambda^{mn}$, т.е. матрица $\hat{L}$ является нильпотентной. Обозначим через ξ индекс нильпотентности матрицы $\hat{L}$ ($\hat{L}^{\xi} = 0$). Из (4.16) и нильпотентности матрицы $\hat{L}$ следует, что $\hat{x}(t) \equiv 0,\ t \geq \hat{t}_1 + (\xi - 1)h$. Из последнего равенства в силу структуры матрицы $\hat{L}$ имеем $x(t) \equiv 0,\ t \geq t_1$, где $t_1 = \hat{t}_1 + (\xi - m)h$.

Теперь укажем систему, которой будут удовлетворять функции x, x_{n+1}, y в случае системы (4.1), замкнутой регулятором (4.11)–(4.14). В результате замены $\breve{x}(t) = \left[E_n - L(z)\right]x(t)$ получим замкнутую систему (4.5)–(4.9), решение которой удовлетворяет системе вида (2.1). Поэтому в системе (2.1) формально заменим $x(t)$ на $\left[E_n - L(z)\right]x(t)$, а $\dot{x}(t)$ – на $d\left(\left[E_n - L(z)\right]x(t)\right)/dt$. В итоге получим линейную автономную дифференциально-разностную систему нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями.

5. Пример. Рассмотрим систему (4.1) с матрицами ($m = 3$, $n = 2$)

$$L(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z + z^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(z) = \begin{bmatrix} 3 - 4z^2 - 2z^3 & 2 + 2z \\ 2 - 2z - \dfrac{11z^2}{5} - \dfrac{z^3}{5} & 3 + \dfrac{z}{5} \end{bmatrix}, \quad B(z) = \begin{bmatrix} 0 & 5z^2 \\ z - z^2 & 4z^2 \end{bmatrix},$$

$h = \ln 2$. Для данной системы нарушается условие полной управляемости, указанное в замечании 5. Вычисляем $T = \mathrm{col}[1, 0]$, $S = 1$, $G(z) = \mathrm{col}[0, z]$. Несложная проверка показывает, что условия (4.2) и (4.3) теоремы 2 выполнены. Найдем матрицу

$$\Pi(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ z^2 + z & 1 \end{bmatrix}$$

и построим систему (4.5):

$$\dot{\breve{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2z + 3 & 2z + 2 \\ z^2 + z + 2 & \dfrac{z}{5} + 3 \end{bmatrix}\breve{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 5z^2 \\ z - z^2 & 4z^2 \end{bmatrix}u(t), \quad t > 0. \tag{5.1}$$

Заметим, что для системы (5.1) также нарушается условие полной управляемости (1.3). Воспользовавшись разд. 2, строим для системы (5.1) регулятор (1.5)–(1.8). Матрица

$$\tilde{B}(z)=\begin{bmatrix}0 & 5z^2 & 0\\ z-z^2 & 4z^2 & z\end{bmatrix},$$

поэтому можно сразу положить $R(z)=E_2$, $\bar{A}(z)=\tilde{A}(z)$, $\bar{B}(z)=\tilde{B}(z)$. В данном случае удобно взять $s_1=3$. По схеме работы [19] находим

$$\bar{K}(z)=K(z)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & \frac{9}{5}\end{bmatrix}$$

и выписываем систему (2.4), (2.5)

$$\dot{\bar{x}}(t)=\begin{bmatrix}3+2z & 2+2z\\ 2+2z & 3+2z\end{bmatrix}\bar{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ z\end{bmatrix}\bar{x}_3(t),\quad t>0,$$

$$\dot{\bar{x}}_3(t)=v(t),\quad t>0.$$

Согласно методике работы [9], характеристический полином $d(p)$ замкнутой системы (2.4)–(2.7) можно взять вида $d(p)=p^2(p-1)(p-5)$. Вычисляем полиномиальные матрицы $\bar{F}_1^1(z)=F_1^1(z)$, $\bar{F}_1^2(z)=F_1^2(z)$, $F_i^j(z), i=2,3, j=1,2$, входящие в (2.7). В качестве примера выпишем

$$F_3^1(z)=\frac{1}{64}z-\frac{35}{64}z^2+\frac{97}{64}z^3-\frac{29}{64}z^4-\frac{49}{32}z^5+z^6,$$

$$F_3^2(z)=\left(\frac{27905648}{158565}+\frac{1}{62\ln 2}\right)z-\left(\frac{17}{311\ln 2}+\frac{82025584}{158565}\right)z^2+\left(\frac{63}{62\ln 2}+\frac{8738096}{52855}\right)z^3+$$
$$+\left(\frac{17}{311\ln 2}+\frac{82025584}{158565}\right)z^4-\left(\frac{32}{311\ln 2}+\frac{54119936}{158565}\right)z^5.$$

Остальные матрицы $F_1^1(z)$, $F_2^1(z)$, $F_1^2(z)$, $F_2^2(z)$ приводить не будем в силу их громоздкости. Способ их вычисления можно посмотреть в работе [9] (формулы (18), (20)–(22), (26)). Далее, следуя рассуждениям разд. 2, получаем регулятор (4.6)–(4.9)

$$\begin{aligned}
&u(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\breve{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}x_3(t)+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\psi(t),\quad t>0,\\
&\psi(t)=\psi(t-h)+\begin{bmatrix}0 & \frac{9}{5}\end{bmatrix}\breve{x}(t),\quad t>0,\\
&\dot{x}_3(t)=F_1^1(z)\breve{x}(t)+F_2^1(z)x_3(t)+F_3^1(z)y(t),\quad t>0,\\
&\dot{y}(t)=F_1^2(z)\breve{x}(t)+F_2^2(z)x_3(t)+F_3^2(z)y(t),\quad t>0,
\end{aligned}\tag{5.2}$$

где $y\in\mathbb{R}$. Теперь выписываем регулятор (4.11)–(4.14) для исходной системы рассматриваемого примера:

$$\begin{aligned}
&u(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}x_3(t)+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\psi(t),\quad t>0,\\
&\psi(t)=\psi(t-h)+\begin{bmatrix}-\frac{9}{5}z^2-\frac{9}{5}z & \frac{9}{5}\end{bmatrix}x(t),\quad t>0,\\
&\dot{x}_3(t)=F_1^1(z)\begin{bmatrix}1 & 0\\ -z^2-z & 1\end{bmatrix}x(t)+F_2^1(z)x_3(t)+F_3^1(z)y(t),\quad t>0,\\
&\dot{y}(t)=F_1^2(z)\begin{bmatrix}1 & 0\\ -z^2-z & 1\end{bmatrix}x(t)+F_2^2(z)x_3(t)+F_3^2(z)y(t),\quad t>0.
\end{aligned}\tag{5.3}$$

Выполнение тождества (1.4) для рассматриваемой системы, замкнутой построенным регулятором (5.3), следует [9] из точечной вырожденности системы (2.1), соответствующей (см. лемму) системе (5.1), (5.2).

Заключение. Для линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа с непрерывным решением представлена процедура построения линейной обратной связи, обеспечивающей успокоение решения исходной системы. Отличительной чертой работы является возможность применения указанного регулятора к системам, не обладающим свойством полной управляемости.

Отдельный интерес представляют системы нейтрального типа (4.1) в случае абсолютно непрерывной начальной функции. Условия существования программного управления, обеспечивающего их решению условие (1.4), получены в [13]. Однако построить необходимый регулятор при их выполнении весьма затруднительно. Если же характеристический квазиполином соответствующей однородной системы имеет запаздывающий тип, то, как следует из разд. 4, ситуация меняется на противоположную. В ряде случаев запаздывающего типа характеристического квазиполинома можно добиться, используя результаты работы [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.* О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
2. *Осипов Ю.С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 5. С. 606–618.
3. *Миняев С.И., Фурсов А.С.* Одновременная стабилизация: построение универсального стабилизатора для линейных объектов с запаздыванием с использованием спектральной проводимости // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 11. С. 1533–1539.
4. *Rabah R., Sklyar G.M., Rezounenko A.V.* On Strong Stability and Stabilizability of Linear Systems of Neutral Type // Advanced in Time-Delay Systems. 2004. P. 257–268.
5. *Марченко В.М.* Управление системами с последействием в шкалах линейных регуляторов по типу обратной связи // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 1003–1017.
6. *Павловская А.Т, Хартовский В.Е.* Управление линейными системами с запаздыванием нейтрального типа регуляторами с обратной связью динамической структуры // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 3. С. 3–18.
7. *Manitius A.Z., Olbrot A.W.* Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays // IEEE Trans. on Autom. Control. 1979. AC-24. № 4. P. 541–553.
8. *Watanabe K., Nobuyama E., Kitamori T. et al.* A New Algorithm for Finite Spectrum Assignment of Single-Input Systems with Time Delay // IEEE Trans. on Autom. Control. 1992. AC-37. № 9. P. 1377–1383.
9. *Метельский А.В.* Полное успокоение линейной автономной дифференциально-разностной системы регулятором того же типа // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 9. С. 1240–1255.
10. *Метельский А.В.* Спектральное приведение, полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием одним регулятором // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1436–1452.
11. *Метельский А.В.* Полное успокоение и стабилизация системы с запаздыванием через спектральное приведение // Изв. РАН. ТиСУ. 2014. № 1. С. 3–11.
12. *Красовский Н.Н.* Оптимальные процессы в системах с запаздыванием // Статистические методы. // Тр. II Междунар. конгр. ИФАК. Базель, 1963. М.: Наука, 1965. Т. 2. С. 201–210.
13. *Хартовский В.Е., Павловская А.Т.* Полная управляемость и управляемость линейных автономных систем нейтрального типа // АиТ. 2013. № 5. С. 59–79.
14. *Хартовский В.Е.* Обобщение задачи полной управляемости дифференциальных систем с соизмеримыми запаздываниями // Изв. РАН. ТиСУ. 2009. № 6. С. 3–11.
15. *Хартовский В.Е.* Задача полной управляемости и ее обобщение для линейных автономных систем нейтрального типа // Изв. РАН. ТиСУ. 2012. № 6. С. 15–28.
16. *Марченко В.М.* К управляемости линейных систем с последействием // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 5. С. 1083–1086.
17. *Bhat K.P., Koivo H.N.* Modal Characterization of Controllability and Observability of Time-Delay Systems // IEEE Trans. on Autom. Control. 1976. AC-21. № 2. P. 292–293.
18. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
19. *Watanabe K.* Finite Spectrum Assignment and Observer for Multivariable Systems with Commensurate Delays // IEEE Trans. on Automatic Control. 1986. V. 31. № 6. P. 543–550.
20. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.