

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИТНЫХ СРЕД С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОГО ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

Немировский Ю.В., Янковский А.П.

Разработана численно-аналитическая методика моделирования нелинейно-наследственного динамического поведения пространственно-армированных композитов, позволяющая описывать внутреннее трение в таких средах с учетом разносопротивляемости фазовых материалов и рассматривать их в дискретные моменты времени как нелинейно-упругие анизотропные среды с начальным напряженным состоянием.

Ключевые слова: армирование пространственное, структурная теория, наследственность нелинейная, ползучесть, численное моделирование, внутреннее трение

Введение. В самолето- и ракетостроении в настоящее время особое внимание к себе привлекают композиционные материалы с пространственным расположением арматуры [1 и др.]. Так как полимерные материалы, как правило, используемые при создании таких композитов, обладают ярко выраженными наследственными свойствами, то актуальной является проблема моделирования механического поведения пространственно-армированных композитных сред из вязко-наследственных материалов. В силу этого в работах [2, 3] были предложены модели описания линейного и нелинейного вязкоупругого поведения пространственно-армированных полимерных сред. К определенному недостатку этих работ относится то, что монолитная в реальности композитная среда представляется в виде отдельных однонаправленно армированных стержней, ориентация которых соответствует заданным направлениям армирования; при этом указанные армированные стержни получают несвязанными между собой в единое целое (в монолитный материал). Кроме того, при таком подходе существует определенная неоднозначность в распределении всего объема связующего по однонаправленно армированным стержням, что существенно сказывается на значениях эффективных характеристик пространственно-армированного композита.

Настоящее исследование посвящено построению численно-аналитической модели нелинейно-наследственного поведения пространственно-армированного композита, лишенной указанных выше недостатков и позволяющей описывать внутреннее трение в таких материалах.

Структурная модель. В глобальной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 рассмотрим гибридный композит, армированный в произвольных направлениях N семействами волокон с интенсивностями ω_k ($k = 1, 2, \dots, N$). Направление армирования k -м семейством волокон задается направляющими косинусами $l_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, 3$); если направление армирования задано с помощью двух углов сферической системы координат (см. рисунок 1) – полярного расстояния θ_k и долготы φ_k , то

$$l_1^{(k)} = \sin \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_2^{(k)} = \sin \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_3^{(k)} = \cos \theta_k, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Обобщая на пространственный случай армирования модель с одномерным напряженным состоянием в волокнах, впервые предложенную в [4] для случая плоского армирования, получим следующие выражения для средних напряжений в композиции:

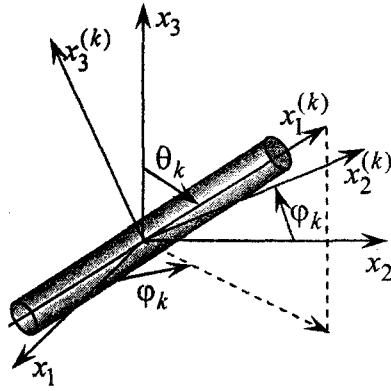


Рисунок 1 – Ориентация волокна k -го семейства в пространстве x_1, x_2, x_3

$$\sigma_{ij} = (1 - \delta\Omega)\sigma_{ij}^m + \sum_{k=1}^N [\sigma_k - (1 - \delta)\sigma_k^m] \omega_k l_i^{(k)} l_j^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \Omega = \sum_{k=1}^K \omega_k, \quad (1)$$

где δ – функция переключения, позволяющая выбрать вариант модели [5] (жесткий при $\delta=0$ и мягкий при $\delta=1$); σ_{ij}^m – напряжения в связующей матрице; σ_k – продольное напряжение в арматуре k -го семейства; σ_k^m – одномерное напряженное состояние в фиктивных волокнах из материала связующей матрицы, направленных по траекториям армирования k -го семейства [5].

Так как в волокнах k -го семейства реализуется одномерное напряженное состояние, то при нелинейно-наследственном поведении фазовых материалов можем записать определяющие соотношения в виде [6; 7]

$$\begin{aligned} g_k(\varepsilon_k)\varepsilon_k &= \sigma_k(t) + \int_0^t \sum_{l=1}^{L_k} A_l^{(k)} \exp(-(t-\tau)/\theta_l^{(k)}) \sigma_k(\tau) d\tau, \\ g_m(\varepsilon_k)\varepsilon_k &= \sigma_k^m(t) + \int_0^t \sum_{l=1}^L M_l \exp(-(t-\tau)/\theta_l^m) \sigma_k^m(\tau) d\tau \quad (1 \leq k \leq N), \\ g(\varepsilon_*, \varepsilon_0)(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0) &= s_{ij}^m(t) + \int_0^t \sum_{l=1}^{L_s} K_l^s \exp(-(t-\tau)/\theta_l^s) s_{ij}^m(\tau) d\tau \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ g_0(\varepsilon_*, \varepsilon_0)\varepsilon_0 &= \sigma_0^m(t) + \int_0^t \sum_{l=1}^{L_0} K_l^0 \exp(-(t-\tau)/\theta_l^0) \sigma_0^m(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad \sigma_0^m = \frac{1}{3}(\sigma_{11}^m + \sigma_{22}^m + \sigma_{33}^m), \quad \varepsilon_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} l_i^{(k)} l_j^{(k)}, \\ g(\varepsilon_*, \varepsilon_0) &= \frac{2\sigma_*^m(\varepsilon_*, \varepsilon_0)}{3\varepsilon_*}, \quad s_{ij}^m = \sigma_{ij}^m - \delta_{ij}\sigma_0^m \quad (i, j = 1, 2, 3, \quad 1 \leq k \leq N), \\ \varepsilon_* &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)}; \end{aligned} \quad (3)$$

t – время; ε_{ij} – компоненты тензора деформаций; ε_* – интенсивность деформаций; ε_k – продольная деформация в арматуре k -го семейства; σ_*^m – интенсивность напряжений в материале матрицы, связанная известным соотношением с $\varepsilon_*, \varepsilon_0$;

$g_0(\varepsilon_*, \varepsilon_0)$ – известная зависимость объемного модуля от ε_* , ε_0 (функции $g_0(\varepsilon_*, \varepsilon_0)$, $g(\varepsilon_*, \varepsilon_0)$ или $\sigma_*^m(\varepsilon_*, \varepsilon_0)$ известны из диаграмм мгновенного деформирования материала связующего; зависимость этих функций от обоих аргументов позволяет учитывать свойство разносопротивляемости материала связующей матрицы); $g_k(\varepsilon)$, $g_m(\varepsilon)$ – заданные функции, характеризующие диаграмму мгновенного деформирования материалов арматуры k -го семейства ($\sigma = g_k(\varepsilon)\varepsilon$) и связующей матрицы ($\sigma = g_m(\varepsilon)\varepsilon$) и известные из опытов на растяжение – сжатие; δ_{ij} – символ Кронекера; $A_l^{(k)}$, M_l , K_l^0 , K_l^s – известные из экспериментов постоянные, характеризующие ядра ползучести; $\theta_l^{(k)}$, θ_l^m , θ_l^0 , θ_l^s – известные из экспериментов константы фазовых материалов, имеющие смысл характерного времени ползучести. Представление в (2) разностных ядер ползучести в виде линейных комбинаций экспоненциальных функций (с числом слагаемых L_k, L, L_0, L_s) позволяет аппроксимировать ядра более сложной структуры, в том числе и некоторые виды слабосингулярных ядер [8, с. 192].

Определяющими соотношениями (2), (3) описывается механическое поведение не только полимеров, но и некоторых металлов на стадии их активного нагружения [6, с. 217].

Так как даже простейшие задачи неустановившейся ползучести для изотропных элементов конструкций требуют привлечения численных методов интегрирования по времени [9], то тем более это касается сложно армированных композитных сред. Поэтому в настоящем исследовании разработаем численно-аналитическую модель нелинейно-наследственного поведения пространственно-армированного композита. С этой целью дискретизируем задачу по времени t , т.е. будем рассматривать ее решения в моменты времени t_n ($n = 0, 1, 2, \dots, t_0 = 0$). Предполагаем, что в момент времени t_n (и во все предыдущие моменты) решение задачи уже известно. Построим определяющие соотношения (2) для момента времени

$$t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где τ_n – шаг по времени (возможно, переменный).

Введем в рассмотрение дискретные по времени функции:

$$\begin{aligned} \sigma_k^n &\equiv \sigma_k(t_n), \quad \sigma_k^m \equiv \sigma_k^m(t_n), \quad s_{ij}^m \equiv s_{ij}^m(t_n), \quad \sigma_0^m \equiv \sigma_0^m(t_n), \quad \varepsilon_{ij}^n \equiv \varepsilon_{ij}(t_n), \quad \varepsilon_k^n \equiv \varepsilon_k(t_n), \\ S_l^{(k)} &\equiv \int_0^{t_n} \sigma_k(\tau) \exp(\tau/\theta_l^{(k)}) d\tau \quad (1 \leq l \leq L_k), \quad S_l^{m(k)} \equiv \int_0^{t_n} \sigma_k^m(\tau) \exp(\tau/\theta_l^m) d\tau \quad (1 \leq l \leq L), \\ S_{ij}^{(l)} &\equiv \int_0^{t_n} s_{ij}^m(\tau) \exp(\tau/\theta_l^s) d\tau \quad (i, j = 1, 2, 3, 1 \leq l \leq L_s), \\ S_l^0 &\equiv \int_0^{t_n} \sigma_0^m(\tau) \exp(\tau/\theta_l^0) d\tau \quad (1 \leq l \leq L_0), \end{aligned} \quad (5)$$

которые по предположению в момент времени t_n уже известны.

Записывая соотношения (2) для момента времени (4) с учетом обозначений типа (5) и вычисляя интегралы, входящие в (2), на интервале $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ по формуле

трапеций, а также используя вырожденность экспоненциальных разностных ядер [8, с. 192], окончательно получим

$$\begin{aligned}
 g_k \left(\begin{matrix} n+1 \\ \varepsilon_k \end{matrix} \right) \varepsilon_k &= \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_k} A_l^{(k)} \right)^{n+1} \sigma_k + \sum_{l=1}^{L_k} A_l^{(k)} \left\{ \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\theta_l^{(k)}} \right) S_l^{(k)} + \frac{\tau_n}{2} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\theta_l^{(k)}} \right) \sigma_k \right\}^n, \\
 g_m \left(\begin{matrix} n+1 \\ \varepsilon_k \end{matrix} \right) \varepsilon_k &= \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^L M_l \right)^{n+1} \sigma_k^m + \sum_{l=1}^L M_l \left\{ \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\theta_l^m} \right) S_l^{m(k)} + \frac{\tau_n}{2} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\theta_l^m} \right) \sigma_k^m \right\}^n, \\
 g \left(\begin{matrix} n+1 & n+1 \\ \varepsilon_*, \varepsilon_0 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} n+1 & n+1 \\ \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0 \end{matrix} \right) &= \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_s} K_l^s \right)^{n+1} s_{ij}^m + \sum_{l=1}^{L_s} K_l^s \left\{ \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\theta_l^s} \right) S_{ij}^{(l)} + \frac{\tau_n}{2} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\theta_l^s} \right) s_{ij}^m \right\}^n, \\
 g_0 \left(\begin{matrix} n+1 & n+1 \\ \varepsilon_*, \varepsilon_0 \end{matrix} \right) \varepsilon_0 &= \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_0} K_l^0 \right)^{n+1} \sigma_0^m + \sum_{l=1}^{L_0} K_l^0 \left\{ \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\theta_l^0} \right) S_l^0 + \frac{\tau_n}{2} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\theta_l^0} \right) \sigma_0^m \right\}^n.
 \end{aligned}$$

Эти соотношения можно записать так

$$\begin{aligned}
 g_k \left(\begin{matrix} n+1 \\ \varepsilon_k \end{matrix} \right) \varepsilon_k &= \sigma_k - \sigma_k^0, \quad g_m \left(\begin{matrix} n+1 \\ \varepsilon_k \end{matrix} \right) \varepsilon_k = \sigma_k^m - \sigma_k^{m0} \quad (1 \leq k \leq K), \\
 g \left(\begin{matrix} n+1 & n+1 \\ \varepsilon_*, \varepsilon_0 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} n+1 & n+1 \\ \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0 \end{matrix} \right) &= s_{ij}^m - s_{ij}^{m0} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad g_0 \left(\begin{matrix} n+1 & n+1 \\ \varepsilon_*, \varepsilon_0 \end{matrix} \right) \varepsilon_0 = \sigma_0^m - \sigma_0^{m0},
 \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned}
 g_k \left(\begin{matrix} n+1 \\ \varepsilon_k \end{matrix} \right) &\equiv \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_k} A_l^{(k)} \right)^{-1} g_k \left(\begin{matrix} n+1 \\ \varepsilon_k \end{matrix} \right), \quad g_m \left(\begin{matrix} n+1 \\ \varepsilon_k \end{matrix} \right) \equiv \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^L M_l \right)^{-1} g_m \left(\begin{matrix} n+1 \\ \varepsilon_k \end{matrix} \right), \\
 g \left(\begin{matrix} n+1 & n+1 \\ \varepsilon_*, \varepsilon_0 \end{matrix} \right) &\equiv \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_s} K_l^s \right)^{-1} g \left(\begin{matrix} n+1 & n+1 \\ \varepsilon_*, \varepsilon_0 \end{matrix} \right), \quad g_0 \left(\begin{matrix} n+1 & n+1 \\ \varepsilon_*, \varepsilon_0 \end{matrix} \right) \equiv \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_0} K_l^0 \right)^{-1} g_0 \left(\begin{matrix} n+1 & n+1 \\ \varepsilon_*, \varepsilon_0 \end{matrix} \right);
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_k^0 &\equiv - \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_k} A_l^{(k)} \right)^{-1} \sum_{l=1}^{L_k} A_l^{(k)} \left\{ \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\theta_l^{(k)}} \right) S_l^{(k)} + \frac{\tau_n}{2} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\theta_l^{(k)}} \right) \sigma_k \right\}^n, \\
 \sigma_k^{m0} &\equiv - \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^L M_l \right)^{-1} \sum_{l=1}^L M_l \left\{ \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\theta_l^m} \right) S_l^{m(k)} + \frac{\tau_n}{2} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\theta_l^m} \right) \sigma_k^m \right\}^n, \\
 s_{ij}^{m0} &\equiv - \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_s} K_l^s \right)^{-1} \sum_{l=1}^{L_s} K_l^s \left\{ \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\theta_l^s} \right) S_{ij}^{(l)} + \frac{\tau_n}{2} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\theta_l^s} \right) s_{ij}^m \right\}^n, \\
 \sigma_0^{m0} &\equiv - \left(1 + \frac{\tau_n}{2} \sum_{l=1}^{L_0} K_l^0 \right)^{-1} \sum_{l=1}^{L_0} K_l^0 \left\{ \exp \left(-\frac{t_{n+1}}{\theta_l^0} \right) S_l^0 + \frac{\tau_n}{2} \exp \left(-\frac{\tau_n}{\theta_l^0} \right) \sigma_0^m \right\}^n.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Умножим последнее равенство (6) на δ_{ij} и результат сложим с третьим равенством, тогда с учетом (3) получим

$$\sigma_{ij}^m = g \left(\begin{matrix} n+1 & n+1 \\ \varepsilon_*, \varepsilon_0 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} n+1 & n+1 \\ \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0 \end{matrix} \right) + \delta_{ij} g_0 \left(\begin{matrix} n+1 & n+1 \\ \varepsilon_*, \varepsilon_0 \end{matrix} \right) \varepsilon_0 + \sigma_{ij}^{m0} \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{9}$$

где

$$\sigma_{ij}^m = s_{ij}^m + \delta_{ij} \sigma_0^m, \quad \sigma_{ij}^{m0} = s_{ij}^{m0} + \delta_{ij} \sigma_0^{m0}. \tag{10}$$

Функции пространственных переменных σ_k^0 , σ_k^{m0} , σ_{ij}^{m0} , определенные по формулам (8), (10), можно трактовать как начальные напряжения в соответствующих фазовых материалах в момент времени t_{n+1} , которые, согласно (5), (8), в этот момент времени известны в каждой точке x_i композитного тела.

Таким образом, соотношения (9) и два первых равенства (6) в момент времени t_{n+1} можно трактовать как определяющие соотношения для фазовых материалов, поведение которых характеризуется зависимостями нелинейно-упругого тела с начальным напряженным состоянием.

Подставим напряжения σ_k^{n+1} , $\sigma_k^{m, n+1}$, σ_{ij}^{n+1} , определенные в (6), (9), в равенства (1) при $t = t_{n+1}$, тогда с учетом обозначений типа (5) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{n+1} = & (1 - \delta\Omega) \left[g \left(\varepsilon_*, \varepsilon_0 \right) \left(\varepsilon_{ij}^{n+1} - \delta_{ij} \varepsilon_0 \right) + \delta_{ij} g_0 \left(\varepsilon_*, \varepsilon_0 \right) \varepsilon_0 \right] + \\ & + \sum_{k=1}^N \omega_k I_i^{(k)} I_j^{(k)} \left[g_k \left(\varepsilon_k \right) \varepsilon_k - (1 - \delta) g_m \left(\varepsilon_k \right) \varepsilon_k \right] + \sigma_{ij}^0, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\sigma_{ij}^0 \equiv (1 - \delta\Omega) \sigma_{ij}^{m0} + \sum_{k=1}^K \omega_k I_i^{(k)} I_j^{(k)} \left(\sigma_k^0 - (1 - \delta) \sigma_k^{m0} \right). \quad (12)$$

Деформации ε_0 , ε_* , ε_k , ε_{ij} в (11) связаны зависимостями типа (3).

Равенства (11) с учетом (3) можно рассматривать как определяющие соотношения для исследуемого композита в момент времени t_{n+1} . Напряжения σ_{ij}^0 при этом можно трактовать как начальные напряжения в композиции, известные в момент времени t_{n+1} (см. (12), (10), (8)). В общем случае соотношения (11) с учетом (3) являются нелинейными относительно деформаций ε_{ij}^{n+1} .

Линеаризуем соотношения (11), предполагая, что функции $g(\varepsilon_*, \varepsilon_0)$, $g_0(\varepsilon_*, \varepsilon_0)$, $g_k(\varepsilon_k)$, $g_m(\varepsilon_k)$ (см. (2), (3)) удовлетворяют достаточным условиям сходимости метода итераций [7, с. 199], аналогичного методу переменных параметров упругости. Если на некоторой m -й итерации известны m -ые приближения $\varepsilon_{ij}^{[m]}$ деформаций в момент времени t_{n+1} , то согласно (3) будут известны m -ые приближения функций $\varepsilon_0^{[m]}$, $\varepsilon_*^{[m]}$, $\varepsilon_k^{[m]}$. Для следующего же $(m+1)$ -го приближения деформаций $\varepsilon_{ij}^{[m+1]}$ и напряжений $\sigma_{ij}^{[m+1]}$ будут справедливы линейные соотношения (см. (11), (3)):

$$\sigma_{ij}^{[m+1]} = (1 - \delta\Omega) \left[g \left(\begin{matrix} n+1 \\ \varepsilon_*^{[m]}, \varepsilon_0^{[m]} \end{matrix} \right) \left(\varepsilon_{ij}^{[m+1]} - \frac{\delta_{ij}}{3} \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll}^{[m+1]} \right) + \frac{\delta_{ij}}{3} g_0 \left(\begin{matrix} n+1 \\ \varepsilon_*^{[m]}, \varepsilon_0^{[m]} \end{matrix} \right) \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ll}^{[m+1]} \right] + \sum_{k=1}^N \omega_k \left[g_k \left(\begin{matrix} n+1 \\ \varepsilon_k^{[m]} \end{matrix} \right) - (1 - \delta) g_m \left(\begin{matrix} n+1 \\ \varepsilon_k^{[m]} \end{matrix} \right) \right] \sum_{l=1}^3 \sum_{p=1}^3 \varepsilon_{lp}^{[m+1]} I_l^{(k)} I_p^{(k)} I_i^{(k)} I_j^{(k)} + \sigma_{ij}^0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (13)$$

где «начальные» напряжения σ_{ij}^0 изменяются в зависимости от номера n (от момента времени t_n) и не зависят от номера итерации m .

Соотношения (13) целесообразно записать в традиционной тензорной форме

$$\sigma_{ij}^{[m+1]} = \sum_{l=1}^3 \sum_{p=1}^3 C_{ijlp}^{[m]} \varepsilon_{lp}^{[m+1]} + \sigma_{ij}^0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (14)$$

где $C_{ijlp}^{[m]}$ – известные коэффициенты, выражения для которых получаются из сравнения (13), (14):

$$C_{ijlp}^{[m]} = (1 - \delta\Omega) \left[g \left(\begin{matrix} n+1 \\ \varepsilon_*^{[m]}, \varepsilon_0^{[m]} \end{matrix} \right) \left(\delta_{il} \delta_{jp} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{lp} \right) + \frac{1}{3} g_0 \left(\begin{matrix} n+1 \\ \varepsilon_*^{[m]}, \varepsilon_0^{[m]} \end{matrix} \right) \delta_{ij} \delta_{lp} \right] + \sum_{k=1}^N \omega_k \left[g_k \left(\begin{matrix} n+1 \\ \varepsilon_k^{[m]} \end{matrix} \right) - (1 - \delta) g_m \left(\begin{matrix} n+1 \\ \varepsilon_k^{[m]} \end{matrix} \right) \right] I_i^{(k)} I_j^{(k)} I_l^{(k)} I_p^{(k)}, \quad i, j, l, p = 1, 2, 3.$$

При решении соответствующей нелинейно-вязкоупругой краевой задачи для пространственно-армированного композита в квазистатической постановке $(m+1)$ -ые приближения усредненные напряжения в композиции $\sigma_{ij}^{[m+1]}$ (см. (14)) в момент времени t_{n+1} должны удовлетворять общеизвестным уравнениям равновесия и статическим граничным условиям, а приближения деформаций $\varepsilon_{ij}^{[m+1]}$ должны быть связаны с приближениями перемещений $u_i^{[m+1]}$ дифференциальными соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij}^{[m+1]} = \frac{1}{2} \left(\partial_i u_j^{[m+1]} + \partial_j u_i^{[m+1]} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (15)$$

где ∂_i – оператор частного дифференцирования по пространственной переменной x_i ($i = 1, 2, 3$).

В случае же решения задачи динамического деформирования рассматриваемого композита (состоящего, например, из полимерных фазовых материалов [1]) в момент времени t_{n+1} должны быть получены соответствующие уравнения для приближений усредненных напряжений $\sigma_{ij}^{[m+1]}$ и перемещений $u_i^{[m+1]}$. Покажем, как это можно сделать в рамках численного моделирования.

Дискретизация по времени уравнений движения. Уравнения движения эквивалентного материала в глобальной декартовой системе координат x_i в рамках геометрически линейной постановки имеют вид [6–8]

$$\rho \ddot{u}_i = X_i + \partial_1 \sigma_{i1} + \partial_2 \sigma_{i2} + \partial_3 \sigma_{i3}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (16)$$

где X_i – приведенные объемные силы, действующие на эквивалентный материал в направлении x_i (определяются по правилу простой смеси от соответствующих сил, действующих на фазовые материалы [10]); ρ – приведенная объемная плотность эквивалентного материала (определяется по правилу простой смеси от соответствующих плотностей материалов компонентов композиции [10]); точка означает оператор частного дифференцирования по времени t .

Для численного интегрирования уравнений (16) по времени t перепишем их в виде следующей системы

$$\dot{u}_i = v_i(t, x_1, x_2, x_3), \quad \rho \dot{v}_i = X_i + \partial_1 \sigma_{i1} + \partial_2 \sigma_{i2} + \partial_3 \sigma_{i3}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (17)$$

где v_i – скорости смещения точек эквивалентного материала в направлении x_i .

Как и прежде, предполагаем, что в момент времени t_n механическое состояние эквивалентного материала известно. Тогда приближенное решение интересующей нас задачи в момент времени t_{n+1} (см. (4)) получим численным интегрированием по времени системы (17) с применением формулы трапеций, имеющей второй порядок точности по τ_n и гарантирующей абсолютную устойчивость используемой численной схемы [11]:

$$u_i^{n+1} - u_i^n = \frac{\tau_n}{2} \left(v_i^{n+1} + v_i^n \right), \quad i = 1, 2, 3; \quad (18)$$

$$\rho \left(v_i^{n+1} - v_i^n \right) = \frac{\tau_n}{2} \left(X_i^{n+1} + X_i^n + \sum_{j=1}^3 \left(\partial_j \sigma_{ij}^{n+1} + \partial_j \sigma_{ij}^n \right) \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (19)$$

где приняты обозначения, аналогичные (5).

Используя (18), выразим

$$v_i^{n+1} = \frac{2}{\tau_n} \left(u_i^{n+1} - u_i^n \right) - v_i^n, \quad i = 1, 2, 3 \quad (20)$$

и исключим v_i^{n+1} из уравнений (19). Тогда после элементарных преобразований уравнений (19) с учетом (20) получим

$$\sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij}^{n+1} - \frac{4\rho}{\tau_n^2} u_i^{n+1} = -X_i^{n+1} - X_i^n - \sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij}^n - \frac{4\rho}{\tau_n^2} u_i^n - \frac{4\rho}{\tau_n} v_i^n, \quad i = 1, 2, 3. \quad (21)$$

Преобразуем уравнения (21) так, чтобы исключить из их правых частей дифференцирование ∂_j . С этой целью введем в рассмотрение функции, зависящие только от пространственных переменных \mathbf{x} :

$$-Y_i^n(\mathbf{x}) \equiv \sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij}^n(\mathbf{x}) - \frac{4\rho}{\tau_n^2} u_i^n(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad (22)$$

тогда система (21) примет вид

$$\sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij}^{n+1}(\mathbf{x}) - \frac{4\rho}{\tau_n^2} u_i^{n+1}(\mathbf{x}) = -Y_i^{n+1}(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (23)$$

где правая часть, согласно (21), (22), определяется по рекуррентной формуле

$$Y_i^{n+1}(\mathbf{x}) = -Y_i^n(\mathbf{x}) + X_i^{n+1}(\mathbf{x}) + X_i^n(\mathbf{x}) + \frac{8\rho}{\tau_n^2} u_i^n(\mathbf{x}) + \frac{4\rho}{\tau_n} v_i^n(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (24)$$

Равенства (23) остаются справедливыми не только для истинных напряжений σ_{ij}^{n+1} и перемещений u_i^{n+1} в момент времени t_{n+1} , но и для их $(m+1)$ -х приближений $\sigma_{ij}^{[m+1]}$ и $u_i^{[m+1]}$. Поэтому после подстановки в (23) соотношений (14) с учетом (15) окончательно получим

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{p=1}^3 \partial_j C_{ijlp}^{n+1} \partial_l u_p^{[m+1]} - \frac{4\rho}{\tau_n^2} u_i^{[m+1]} = -Y_i^{n+1}(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij}^0, \quad i=1, 2, 3, \quad (25)$$

где правые части не зависят от номера итерации m .

Так как решение задачи предполагается известным в момент времени t_n , т.е.

известны функции $Y_i^n(\mathbf{x})$, $u_i^n(\mathbf{x})$, $v_i^n(\mathbf{x})$ во всех точках рассматриваемой армированной конструкции, то по формулам (24), (12) можем определить правые части в уравнениях (25), которые можно трактовать как уравнения равновесия некоторого линейно-упругого анизотропного неоднородного материала, каждая точка которого как бы покоится на упругом винклеровском основании с коэффициентом постели, равным $4\rho/\tau_n^2$. При этом на $(m+1)$ -й итерации функции $Y_i^{n+1}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^3 \partial_j \sigma_{ij}^0$ в правых частях уравнений (25) можно трактовать как приведенные объемные нагрузки, действующие на этот материал.

Соотношения (2) справедливы при традиционном предположении, что до начального момента времени $t = t_0 = 0$ композитный материал находится в естественном состоянии, т.е. функции v_i , u_i , σ_{ij} принадлежат классу Хевисайда [6], а значит $v_i^0(\mathbf{x}) \equiv 0$, $u_i^0(\mathbf{x}) \equiv 0$, $\sigma_{ij}^0(\mathbf{x}) \equiv 0$ ($i, j=1, 2, 3$), поэтому, согласно (22), в начальный момент времени имеем

$$Y_i^0(\mathbf{x}) \equiv 0, \quad i=1, 2, 3, \quad (26)$$

а по формуле (24) с учетом (26) получаем

$$Y_i^1(\mathbf{x}) = X_i^1(\mathbf{x}) + X_i^0(\mathbf{x}), \quad i=1, 2, 3, \quad t=t_1 = \tau_0. \quad (27)$$

Система линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа (25)

определяет $(m+1)$ -ые приближения перемещений $u_i^{[m+1]}$ в момент времени t_{n+1} . Кинематические граничные условия для этой системы получаются простой заменой $u_i \rightarrow u_i^{[m+1]}$, а статические – заменой $\sigma_{ij} \rightarrow \sigma_{ij}^{[m+1]}$ с учетом соотношений (14), (15).

Методы решения таких граничных задач достаточно хорошо разработаны [12], поэтому не будем останавливаться на обсуждении этого вопроса более подробно. Отметим лишь, что для интегрирования системы (25) наиболее целесообразно использовать вариационные методы (как следствие, МКЭ), так как их применение позволяет избежать дифференцирования по пространственным переменным в правых частях равенств (25). (Численное же дифференцирование, которое необходимо будет здесь применять, всегда приводит к потере точности решения [13].)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-90402-Укр_а) и Президиума СО РАН (Постановление № 10 от 15.01.09, номер проекта 72).

ЛИТЕРАТУРА

1. Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология: учеб. пособие / под ред. А.А. Берлина. – СПб.: Профессия, 2009. – 560 с.
2. Крегер, А.Ф. Применение методов усреднения для определения вязкоупругих свойств пространственно армированных композитов / А.Ф. Крегер, Г.А. Тетерс // *Механика композитных материалов*. – 1979. – № 4. – С. 617–624.
3. Крегерс, А.Ф. Структурная модель деформирования анизотропных, пространственно армированных композитов / А.Ф. Крегерс, Г.А. Тетерс // *Механика композитных материалов*. – 1982. – № 1. – С. 14–22.
4. Немировский, Ю.В. Об упруго-пластическом поведении армированного слоя / Ю.В. Немировский // *ПМТФ*. – 1969. – № 6. – С. 81–89.
5. Немировский, Ю.В. Уравнения изгиба и устойчивости армированных оболочек и пластин из вязкоупругого материала / Ю.В. Немировский // *Динамика сплошной среды (Институт гидродинамики СО РАН СССР)*. – 1970. – Вып. 4. – С. 50–63.
6. Работнов, Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
7. Ильюшин, А.А. Труды / А.А. Ильюшин. – Т. 3: Теория термовязкоупругости / сост.: Е.А. Ильюшина, В.Г. Тунгускова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 288 с.
8. Абросимов, Н.А. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н.А. Абросимов, В.Г. Баженов. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
9. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Физматгиз, 1966. – 752 с.
10. Композиционные материалы. Справочник / под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
11. Немировский, Ю.В. Интегрирование динамических задач механики деформируемого твердого тела обобщенными методами Рунге-Кутты / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2008. – Т. 1, № 1. – С. 68–79.
12. Власов, В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: Физматгиз, 1960. – 492 с.
13. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.

Поступила 02.11.11