Институт горного дела СО РАН, Новосибирск

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДОВ НЕАРХИМЕДОВА АНАЛИЗА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ СРЕД СО СТРУКТУРОЙ

Ревуженко А.Ф.

The non-Archimedean variables which characterized by presence of scale level hierarchy are supposed to use for description of dynamics of structural inhomogeneous media. The formal description of non-Archimedean straight line is presented. A one-dimensional problem about shear wave propagation in the medium with two scale levels is considered. It was shown that the wave propagation velocity on real scale level can be essential lower then on microlevel.

Значительное место в трудах профессора Чигарева Анатолия Власовича занимает исследование вопросов, связанных с динамикой структурно-неоднородных сред. Основные его результаты в этой области изложены в фундаментальной монографии [1]. Вопросы динамики структурно-неоднородных сред являются весьма важными как в теоретическом, так и в прикладном отношении. Собственно, любая реальная среда является структурно-неоднородной. Весь вопрос в степени приближения, которая была бы достаточной для решения поставленных задач. В ряде задач достаточно использовать только осредненные характеристики и, значит, представления о некоторой эффективной сплошной среде без структуры. Однако при исследовании целого ряда тонких эффектов параметры структуры необходимо учитывать явно.

Здесь уместно отметить, что подобные проблемы возникают также при решении статических задач теории пластичности и механики горных пород. Одно из направлений в этих областях основано на введении внутренних переменных. Например, наряду с гладким полем перемещений, для которого легко вычисляется ротор, вводится дополнительное поле микровращений, которое от ротора уже не зависит. При этом микровращение так же, как и ротор является гладкой функцией координат (за исключением особых поверхностей, которые рассматриваются отдельно). Таким образом, все построения делаются в рамках концепции сплошной среды. Особо следует подчеркнуть, что здесь независимые координаты и время представляют собой вещественные переменные. Следовательно, оси декартовых координат – это обычные вещественные прямые.

1. Последовательное развитие моделей с внутренними переменными показывает, что внутренней структурой необходимо наделять саму независимую переменную, а значит, и само пространство и время. Одно из основных свойств обычной вещественной прямой состоит в том, что она удовлетворяет аксиоме Архимеда: для любых вещественных чисел $0<\alpha<\beta$ всегда найдется натуральное число N такое, что величина $N\cdot\alpha$ превзойдет β. Иными словами, аксиома Архимеда означает, что если мы идем вдоль прямой с шагом α, то таким образом мы можем достичь любой точки на данной прямой. В этом смысле вещественную прямую можно считать одномасштабной. Поэтому переход к многомасштабной прямой должен быть связан с отказом от ограничений, которые диктуются аксиомой Архимеда. Фактически аксиома Архимеда означает, что на вещественной прямой отсутствуют точки, которые соответствуют актуальным бесконечно малым или бесконечно большим числам. Следовательно, на неархимедовой прямой именно такие точки должны быть и именно они будут определять иерархию масштабных уровней прямой.

Хорошо известно, что вещественная числовая прямая является сплошной. Поэтому сразу неясно, как на нее можно поместить какие-то новые числа. Данная проблема решается следующим образом. Точка, или на числовой прямой – вещественное число – это объект, который «не имеет частей». Последнее, однако, верно только в случае, когда мы рассматриваем точку со степенью разрешения, которую дает классический анализ. Если степень разрешения увеличить, то мы увидим, что точка (вещественное число) представляет собой многомерный шар с размытой внешней границей.

Для иллюстрации используем следующие образы. Пусть вещественной прямой соответствует ряд шарообразных тел α, которые соприкасаются друг с другом в диаметрально противоположных точках (рисунок 1).

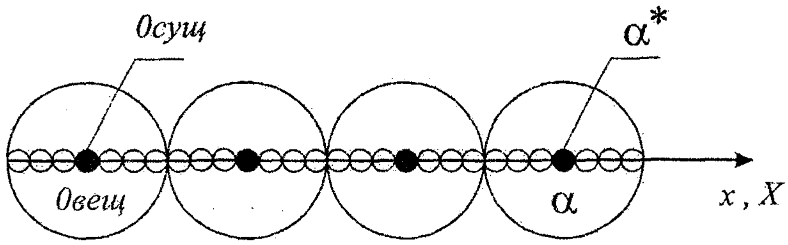

Рисунок 1

Между шарами никаких зазоров нет, поэтому вставить между ними ничего невозможно. На этом основании будем считать, что данное свойство соответствует свойству непрерывности вещественной прямой. Каждый шар имеет свое индивидуальное имя. Такую конструкцию назовем линейкой 1. Если при измерении некоторого отрезка левый его конец помещается в пределах шара $0_{вещ}$, а правый – в пределах шара под именем α, то мы говорим, что длина отрезка равна α. Линейка 2 представляет собой такую же конструкцию, но только с шарами гораздо меньшего диаметра. Данной линейке соответствует неархимедовая прямая. Тот факт, что малые шары также контактируют между собой соответствуют непрерывности неархимедовой прямой. Один из шаров линейки 2 назовем именем $0_{сущ}$. Совместим теперь две линейки так, чтобы центр малого шара $0_{сущ}$ попал точно в центр большого шара $0_{вещ}$, а остальные шары расположились так, как показано на рис.1, т.е. контакт между большими шарами совпал бы с одним из контактов между малыми шарами. (Значит, отношение диаметров шаров должно быть числом нечетным). Маленьким шарам мы будем давать уже два имени: первое – это индивидуальное имя, причем малый шар, который находится точно в центре большого шара α будем называть α^* – ядром вещественного числа α. Второе имя – неиндивидуальное: если малые шары попадают в большой шар α, то всем им присваивается одно и то же имя α.

Будем теперь измерять некоторый отрезок линейкой 2. Если мы будем пользоваться индивидуальными именами, то получим результат, более точный, чем при измерении линейкой 1. Однако если пользоваться неиндивидуальными именами, то результат будет, очевидно, тем же, что и при измерении линейкой 1.

Теперь естественно взять линейку номер 2 и удалить из нее все шары, которые оказались не в центре больших шаров. Такую конструкцию можно назвать линейкой $1'$. Функционально она ничем не отличается от линейки 1. Однако теперь у нее шары между собой не контактируют. Поэтому между ними можно помещать другие такие же шары и постепенно идти к линейке 2.

Перейдем теперь к формальным построениям.

1 шаг. Считаем, что натуральные числа и арифметические операции над ними заданы изначально. На этом основании натуральные и рациональные числа $1,2,3...n,...;r$ будем называть абсолютными.

2 шаг. Образуем последовательности абсолютных рациональных чисел r_n. Данные последовательности служат исходным материалом для построения чисел как вещественной, так и неархимедовой прямой. Вещественное число по Кантору [2] – это совокупность эквивалентных последовательностей Коши r_n. Для таких последовательностей для любого натурального N всегда существует другое натуральное M такое, что для $n,m > M$ имеет $|r_n - r_m| < 1/N$. Кроме того, последовательности r_n, r_n' эквивалентны, если для $n > M$

$$|r_n - r_n'| < 1/N.$$

Данная совокупность обозначается как

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} r_n. \tag{1}$$

Таким образом, число 0 из ряда 0,1,2,... отличается от вещественного числа нуль принципиально. В первом случае нуль – это абсолютное число, равное разности равных изначально заданных чисел ($0_{\text{абс}}$). Во втором случае $0_{\text{вещ}}$ – это класс последовательностей рациональных чисел:

$$0_{\text{вещ}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = \ldots.$$

Выберем отсюда последовательности $r_n > 0$. Совокупность последовательностей обратных к ним $1/r_n$ обозначим как ∞, оставив для факта объединения прежнее обозначение – $\lim$:

$$\infty = \lim_{n\to\infty} n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \ldots = \lim_{n\to\infty} n^n, \ldots. \tag{2}$$

Аналогично определяется и объект $(-\infty)$. Объекты $\pm\infty$ включаются в состав (расширенной) вещественной прямой. Данная прямая является основой всего математического анализа.

Заглянем теперь внутрь вещественных чисел (1) и (2). Мы видим, что они состоят из отдельных последовательностей абсолютных рациональных чисел. Это, однако, слишком высокая степень разрешения. Для наших целей ее необходимо уменьшить. Уменьшим ее следующим образом.

3 шаг. Не будем различать последовательности, которые отличаются друг от друга конечным числом своих членов. Формально это означает следующее. Пусть

$$A = \underset{n}{Lim}\, r_n \; - \tag{3}$$

совокупность последовательности r_n и других последовательностей, которые могут отличаться от r_n конечным числом членов. Ясно, что вещественные числа (1), (2) состоят из объединения объектов (3). На этом основании объекты (3) назовем элементарными числами. Элементарное число A будем считать пределом (в смысле Lim) r_n, а последовательности r_n – приближениями A. Рациональные числа r отождествляем с $\underset{n}{Lim}\, r$. Арифметические операции и частичный порядок между элементарными числами введем через их приближения. Число $0_{\text{вещ}}$ состоит из совокупности элементарных чисел

$$\mathrm{E} = \underset{n}{Lim}\frac{1}{n} > \mathrm{E}^2 = \underset{n}{Lim}\frac{1}{n^2}; \ldots \mathrm{E}\cdot j = \underset{n}{Lim}\frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

где $j = \underset{n}{Lim}(-1)^{n+1}$. Ясно, что для любого рационального $r > 0$ имеем $\mathrm{E} < r$. Значит, элементарное число E – это актуальное бесконечно малое число. Точно также число $\mathrm{E} = \omega = Lim\, n > r$ – бесконечно большое число. Элементарных чисел, однако, недостаточно для построения анализа. Необходимо сделать еще несколько шагов.

4 шаг. Продолжим натуральный ряд в область бесконечно больших чисел

$$1, 2, 3 \ldots \omega, \omega + 1, \ldots \omega^2 \ldots \omega^\omega \ldots \nu, \ldots \mu \ldots . \tag{4}$$

5 шаг. Образуем последовательности элементарных чисел, занумерованные числами (4):

$$A_1, A_2 \ldots A_\omega \ldots A_\nu \ldots A_\mu \ldots .$$

Последовательность будем считать фундаментальной, если для любого элементарного числа Γ из (4) найдется Λ из (4) такое, что для любых $\nu, \mu > \Lambda$ будем иметь $|A_\nu - A_\mu| < 1/\Gamma$. Две последовательности A_ν, A'_ν считаем эквивалентными, если для любого Γ из (4) существует Λ из (4) такие, что $|A_\nu - A'_\nu| < 1/\Gamma$ при $\nu > \Lambda$.

6 шаг. Совокупность последовательностей, в которую входит фундаментальная последовательность A_ν и последовательности, эквивалентные ей, будем называть существенным числом и обозначать как

$$\sigma = \operatorname*{limit}_{\nu} A_\nu . \tag{5}$$

σ считаем пределом A_ν, а A_ν – приближениями σ. Операции над числами (5) и частичный порядок в области (5) введем через приближения. Элементарные числа (3) в области в область (5) входят через процедуру $\operatorname*{limit}_{\nu} \operatorname*{Lim}_{n} r_n$. Доказательства корректности всех определений трудностей не представляют.

Числовая область (5) является полной и достаточной для построения неархимедова математического анализа. Первый вопрос, который возникает на этом пути, сводится к следующему: как бесконечномерная числовая область (5) соотносится с одномерной областью вещественных чисел? Возьмем для примера вещественное число (1) и продолжим последовательность Коши $r_n = r(n)$ по следующим правилам. На место номер $\omega = \operatorname*{Lim}_{n} n$ поставим число $\operatorname*{Lim}_{n} r(n)$, на место номер $\omega + 1$ – число $Lim\, r(n+1)$, … на место номер ω^2 – число $\operatorname*{Lim}_{n} r(n^2)$ и т.д. В общем виде данное правило выглядит так:

$$r(\nu) = r\left(\operatorname*{Lim}_{n} \nu(n)\right) = \operatorname*{Lim}_{n} r(\nu(n)), \tag{6}$$

где $\nu(n)$ – приближения ν: $\nu = Lim\, \nu(n)$. Запись (6) дает основание сказать, что здесь идет речь о непрерывном продолжении функции $r(n)$ с конечных аргументов n на бесконечные аргументы ν. Легко доказать, что для любой последовательности Коши $r(n)$ последовательность (6) будет фундаментальной в смысле (5). Существенное число, которое определяется данной последовательностью обозначим через α^*. Таким образом имеем

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} r(n); \quad \alpha^* = \operatorname*{limit}_{\nu} \operatorname*{Lim}_{n} r(\nu(n)). \tag{7}$$

Существенное число α^* назовем ядром вещественного числа α. Если обратиться к образу, показанному на рис.1, то процедура (7) означает построение в центре большого шара α, который имеет составные части, точки α^*, которая частей уже не имеет.

Здесь уместно напомнить, что для построения математического анализа достаточно только аксиоматического определения поля вещественных чисел. При аксиоматическом подходе определение вещественного числа по Кантору (шар α на рисунке 1) превращается в одну из моделей, на которой реализуется указанная система аксиом. Две числовые области (7) изоморфны между собой. Поэтому α^* можно рассматривать как другую модель вещественных чисел. На прямой OX между объектами α^* обнаруживается множество вакансий (см. рисунок 1). Теперь все готово, чтобы сделать следующий шаг.

7 шаг. Поместим на неархимедовую прямую числа вида

$$\mathrm{X} = x_{-m}\omega^m + \ldots + x_0 + x_1\mathrm{E} + \ldots + x_n\mathrm{E}^n, \tag{8}$$

где $x_{-m}, \ldots x_0, \ldots x_n$ – ядра вещественных чисел. Нетрудно сделать обобщение, когда сумма (8) превращается в ряд с бесконечным числом слагаемых.

2. В работе [3] неархимедовые переменные использовались для построения двухмасштабной модели горной породы. В рамках данной модели был решен ряд задач о деформировании горного массива вокруг выработок. Ниже рассмотрим пример динамической задачи.

Рассмотрим предельно упрощенную одномерную постановку. Ограничимся только двумя масштабными уровнями пространства и одним уровнем времени:

$$\mathrm{X} = x + \xi, \quad \xi = x_1\mathrm{E}; \quad \mathrm{T} = t,$$

здесь x, x_1 и t – ядра вещественных чисел. Масштабный уровень переменных x, t будем называть вещественным уровнем, а переменной ξ – (первым) микроуровнем. Вторым микроуровнем будем называть масштаб переменной $x_2\mathrm{E}^2$ и т.д. Пусть $u = u(x, \xi, t)$ – перемещение вдоль оси, ортогональной к OX, то есть рассматривается волна сдвига. Для функций, определенных на неархимедовой прямой, можно ввести понятия пределов, производных и интегралов. Ниже воспользуемся определениями [4]. Пусть на микроуровне среда ведет себя линейно упруго. Тогда касательные напряжения связаны со сдвигом линейной зависимостью

$$\tau(x, \xi, t) = \mu \frac{\partial u(x, \xi, t)}{\partial \xi}, \tag{9}$$

где $\mu = const$ – модуль сдвига. Предположим, что на микроуровне основной закон динамики можно записать таким образом

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, \xi, t)}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u(x, \xi, t)}{\partial \xi^2}.$$

Здесь предполагается, что плотность на микроуровне ρ постоянна и, кроме того, массовые силы отсутствуют.

Основная проблема возникает при описании связей между различными масштабными уровнями среды. Например, пусть мы находимся в точке $\mathrm{X} = a$, то есть $x = a, \xi = 0$. Если двигаться в сторону увеличения X, оставаясь на микроуровне, то достичь бóльших значений x таким образом невозможно. Например, при шаге равном E, через n шагов мы попадем в точку $\mathrm{X} = a + n\mathrm{E}$. То есть продвинуться по вещественному уровню прямой указанным способом нельзя. Ясно, что здесь нужна какая-то процедура предельного перехода. Остановимся на следующем варианте. Предположим, что в положительном направлении от точки $\xi = 0$ можно продвинуться только до значения $\xi = q$, а в отрицательном направлении только до точки $\xi = -p$; $p, q > 0$, заданы, $l = p + q$. Числа p, q, l принадлежат к первому микроуровню прямой, например, $p = 50\mathrm{E}$, $q = 100\mathrm{E}$; $l = 150\mathrm{E}$. Считаем, что выход за указанный интервал означает вступление в области перехода между двумя масштабными уровнями прямой. Возьмем две близкие точки, принадлежащие к вещественному масштабному уровню прямой: $x = a$ и $x = a + L_n$. Здесь L_n – число вещественного масштабного уровня, n – натуральный параметр. Тогда область перехода будет представлять собой интервал $(a + p,\ a + L_n - q)$. Длина этого интервала равна $(L_n - l)$. Числа L_n и l принадлежат к различным масштабным уровням, так что отношение

L_n / l для любого n будет величиной бесконечно большой. Например, $L_n = \frac{150}{n}$; $l = 150\mathrm{E} = 150 \cdot \underset{n}{Lim} \frac{1}{n}$ и $L_n / l = \frac{\omega}{n}$ – число, бесконечно большое при любом фиксированном n. Воспользуемся процедурой предельного перехода так, чтобы переходная область стянулась к точке (т.е. к контакту между двумя масштабными уровнями прямой): $\underset{n}{Lim}(L_n - l) = 0$. Для упрощения записей будем использовать обозначения следующего вида:

$$\underset{n}{Lim}\, u(x + L_n, \ldots) = u(x + l, \ldots),$$

где $\underset{n}{Lim}\, L_n = l$.

В точке контакта напряжения непрерывны. С учетом (9) это обстоятельство дает следующее уравнение:

$$\frac{\partial u(x,q,t)}{\partial \xi} = \frac{\partial u(x+l,-p,t)}{\partial \xi}.$$

Далее, величина проскальзывания (разрыва перемещения) равна

$$u(x+l,-p,t) - u(x,q,t).$$

Ограничимся линейным случаем, когда величина касательного напряжения на контакте пропорциональна проскальзыванию:

$$\mu \frac{\partial u(x,q,t)}{\partial \xi} = \frac{G}{l}\left[u(x+l,-p,t) - u(x,q,t)\right].$$

Здесь $G = const$ – постоянная материала. Таким образом, приходим к следующей системе уравнений:

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,\xi,t)}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u(x,\xi,t)}{\partial \xi^2}, \qquad \frac{\partial u(x,q,t)}{\partial \xi} = \frac{\partial u(x+l,-p,t)}{\partial \xi}$$
$$\mu \frac{\partial u(x,q,t)}{\partial \xi} = \frac{G}{l}\left[u(x+l,-p,t) - u(x,q,t)\right] \tag{10}$$

Система представляет собой три уравнения относительно одной функции, зависящей от трех переменных. Уравнения являются дифференциально-конечно-разностными. Точнее, не «конечно», а актуально-бесконечно-мало-разностными, так как сдвиги по аргументам в (10) равны актуально бесконечно малым величинам.

Прежде всего для системы необходимо проверить условие согласованности. Именно, если многомасштабность неархимедовой прямой фактически не проявляется, то система должна переходить в обычное волновое уравнение. Проверку легко сделать. Пространственная переменная суть $X = x + \xi$. Если функция фактически зависит только от X и не зависит отдельно от аргументов x и ξ, то $u(x,\xi,t) = u(x+\xi,t)$. В этом случае первое уравнение (10) переходит в обычное волновое уравнение, а второе уравнение удовлетворяется тождественно. В третьем уравнении необходимо принять, что $G \to \infty$, то есть микроуровня фактически нет и поэтому микропроскальзывания отсутствуют. При $G \to \infty$ левая часть третьего уравнения становится неопределенной $(0 \cdot \infty)$. Следовательно, само уравнение новых ограничений на решение не накладывает. Таким образом, переход от системы (10) к обычному волновому уравнению – выполняется.

Далее, наличие разностных операторов приводит к тому, что систему (10) можно свести к дифференциальным уравнениям бесконечно большого порядка. Динамические уравнения подобного типа изучались в [5]. Ниже ограничимся только первым приближением, когда многомасштабность среды сохраняется, но величину l можно устремить у нулю. Первое уравнение дает интегралы Даламбера:

$$u(x,\xi,t)=\varphi(x,\xi\pm c_\xi t), \quad c_\xi=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \tag{11}$$

где φ – произвольная функция, c_ξ – скорость поперечных волн на микроуровне среды. Второе уравнение при $l\to 0$ переходит в тождество. Третье уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\partial u(x,0,t)}{\partial\xi}=\lambda\frac{\partial u(x,0,t)}{\partial x}, \quad \frac{1}{\lambda}=1+\frac{\mu}{G}. \tag{12}$$

Достаточным условием выполнения (12) является следующее представление

$$u(x,\xi,t)=\psi(x+\lambda\xi,t), \tag{13}$$

где ψ – произвольная функция своих аргументов. Объединяя (11) и (13), получим

$$u(x,\xi,t)=f(x+\lambda(\xi\pm c_\xi t)), \tag{14}$$

где f -функция своего аргумента, определяемая начальными условиями. Из решения видно, что скорость поперечных волн на вещественном уровне среды будет равна

$$c_x=\lambda\cdot c_\xi=\frac{G}{\mu+G}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{15}$$

Таким образом, если контакты между масштабными уровнями среды являются достаточно податливыми, то есть $G \ll \mu$, то волны (14) могут распространяться с весьма малыми скоростями (15). Учет следующих приближений в (10) позволит описать более тонкие эффекты, связанные с распространением волн.

3. В заключение отметим следующее. Вопрос о разрешающей способности математического анализа – это не столько вопрос о степени точности полученных результатов, сколько вопрос о масштабных уровнях реальности, которые можно охватить предлагаемым математическим аппаратом. Числовые результаты, которые дает классический (архимедов) анализ, мы можем вычислить с количеством значащих цифр, равным любому наперед заданному натуральному числу. В неархимедовом анализе количество значащих цифр может быть равно не только любому конечному числу, но и любому актуально бесконечно большому числу из продолжения натурального ряда. Сам по себе этот факт особого значения не имеет. Практически всегда достаточно от одной до десяти значащих цифр. Принципиальное значение имеет другой факт, именно, тот факт, что процессы, которые происходят на микроуровнях, могут влиять или – более того – полностью определять поведение системы на вещественном масштабном уровне. Поэтому использование неархимедовых, многомасштабных переменных расширяет арсенал средств для решения различных задач, связанных с иерархией масштабных уровней реальных сред.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-05-91002) и СО РАН (интеграционный проект № 69).

ЛИТЕРАТУРА

1. Чигарев, А.В. Стохастическая и регулярная динамика неоднородных сред / А.В. Чигарев. – Минск: Технопринт, 2000. – 426 с.
2. Маркушевич, А.И. Действительные числа и основные принципы теории пределов / А.И. Маркушевич. – Изд-во Акад. пед. наук РСФСР. – М.; Л., 1948. – 98 с.
3. Концепция неархимедова многомасштабного пространства и модели пластических сред со структурой / С.В. Лавриков [и др.] // Физическая мезомеханика. – Май–июнь 2008. – Т. 11, № 3. – С. 45–60.
4. Механика – от дискретного к сплошному: монография / отв. ред. академик РАН В.М. Фомин; Рос. акад. наук, Сиб. отд-ние, Ин-т теоретической и прикладной механики им. Христиановича. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. – 344 с.

Поступила 08.11.11