

<sup>1)</sup>Белорусский государственный университет транспорта, Гомель

<sup>2)</sup>Московский авиационный институт (госуниверситет), Москва

## ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ОРТОТРОПНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ С НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКОУПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Старовойтов Э.И.<sup>1)</sup>, Протуро И. И.<sup>1)</sup>, Тарлаковский Д.В.<sup>2)</sup>

*Cylindrical bending of a three-layer orthotropic plate with a nonlinear viscoelastic filler is considered. For the kinematics description of carryings layers accepted the Kirchhoff hypotheses. To describe kinematics of pack of the plate hypotheses of the broken normal are accepted. The system of equilibrium equations was obtained, and solved.*

**Введение.** Распространение волн в неоднородной пористой среде исследовано в [1], изгиб слоистых стержней и круговых пластин, работающих в области малых упругопластических деформаций – в [2, 3]. Изгиб линейно и нелинейно упругих прямоугольных ортотропных трехслойных пластин исследован в [4–6]. Здесь рассмотрен цилиндрический изгиб ортотропной прямоугольной пластины с нелинейно вязкоупругим наполнителем.

**Постановка задачи.** Рассматривается несимметричная по толщине упругая трехслойная ортотропная прямоугольная пластина с жестким несжимаемым наполнителем. Система координат  $x, y, z$  связывается со срединной плоскостью наполнителя. Для описания кинематики пакета использована гипотеза «ломаной» нормали: в тонких несущих слоях 1, 2 справедливы гипотезы Кирхгофа, в сравнительно толстом наполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол относительно осей координат  $\psi_x(x, y), \psi_y(x, y)$ . Деформации малые.

На внешний слой стержня действует распределенная силовая нагрузка  $p_x(x, y), p_y(x, y), q(x, y)$ . Через  $w(x, y)$  и  $u_x(x, y), u_y(x, y)$  обозначен прогиб и продольное перемещение средней плоскости наполнителя соответственно. Так как материалы всех слоев несжимаемы в поперечном направлении, то прогиб в остальных точках нормали к срединной поверхности совпадает с  $w(x, y)$ . По контуру предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительно сдвигу слоев, но не мешающих деформированию из своей плоскости.

Толщина  $k$ -го слоя ( $k = 1, 2, 3$ ) обозначена через  $h_k$ , при этом  $h_3 = 2c$ . С помощью введенных геометрических гипотез, продольные перемещения в слоях выражаются через пять искомым функции  $w(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y), \psi_x(x, y), \psi_y(x, y)$ :

$$\begin{aligned} u_x^{(1)} &= u_x + c\psi_x - zw_{,x}, \quad (c \leq z \leq c + h_1); \quad u_x^{(3)} = u_x + z\psi_x - zw_{,x}, \quad (-c \leq z \leq c); \\ u_x^{(2)} &= u_x - c\psi_x - zw_{,x}, \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c); \quad u_y^{(1)} = u_y + c\psi_y - zw_{,y}, \quad (c \leq z \leq c + h_1); \\ u_y^{(3)} &= u_y + z\psi_y - zw_{,y}, \quad (-c \leq z \leq c); \quad u_y^{(2)} = u_y - c\psi_y - zw_{,y}, \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $z$  – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости наполнителя. Запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Уравнения равновесия трехслойной пластины получены с использованием принцип возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta W = \delta A, \quad (2)$$

где  $\delta W, \delta A$  – вариации работ внутренних усилий и внешних сил соответственно.

При определении работы внешних сил считаем, что к срединной поверхности наполнителя приложены произвольные распределенные нагрузки, а по контуру пластины – распределенные по кромкам сторон силы и моменты.

После некоторых преобразований из выражения (2) получим систему уравнений равновесия рассматриваемой пластины в усилиях:

$$\begin{aligned} N_{x,x} + Q_{xy,y} + p_x = 0; \quad N_{y,y} + Q_{xy,x} + p_y = 0; \quad M_{xx,xx} + M_{yy,yy} + 2M_{xy,xy} + q - q_r = 0; \\ H_{xx,x} + H_{xy,y} - Q_{xx} = 0; \quad H_{yy,y} + H_{xy,x} - Q_{yy} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь суммарные внутренние усилия и моменты введены соотношениями:

$$\begin{aligned} N_x = \sum_{k=1}^3 N_x^{(k)}; \quad N_y = \sum_{k=1}^3 N_y^{(k)}; \quad M_y = \sum_{k=1}^3 M_y^{(k)}; \quad M_x = \sum_{k=1}^3 M_x^{(k)}; \quad M_{xy} = \sum_{k=1}^3 M_{xy}^{(k)}; \\ Q_{xy} = \sum_{k=1}^3 Q_{xy}^{(k)}; \\ H_{xx} = c(N_x^{(1)} - N_x^{(2)}) + M_{xx}^{(3)}; \quad H_{yy} = c(N_y^{(1)} - N_y^{(2)}) + M_{yy}^{(3)}; \\ H_{xy} = c(Q_{xy}^{(1)} - Q_{xy}^{(2)}) + M_{xy}^{(3)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как материалы слоев пластины ортотропны, соотношения между деформациями и напряжениями представимы в форме:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{(k)} = \frac{1}{E_x^{(k)}} \sigma_{xx}^{(k)} - \frac{\nu_{xy}^{(k)}}{E_y^{(k)}} \sigma_{yy}^{(k)} - \frac{\nu_{xz}^{(k)}}{E_z^{(k)}} \sigma_{zz}^{(k)}, \quad \varepsilon_{yy}^{(k)} = -\frac{\nu_{yx}^{(k)}}{E_x^{(k)}} \sigma_{xx}^{(k)} + \frac{1}{E_y^{(k)}} \sigma_{yy}^{(k)} - \frac{\nu_{yz}^{(k)}}{E_z^{(k)}} \sigma_{zz}^{(k)}, \\ \varepsilon_{zz}^{(k)} = -\frac{\nu_{zx}^{(k)}}{E_x^{(k)}} \sigma_{xx}^{(k)} - \frac{\nu_{zy}^{(k)}}{E_y^{(k)}} \sigma_{yy}^{(k)} + \frac{1}{E_z^{(k)}} \sigma_{zz}^{(k)}, \quad \varepsilon_{xy}^{(k)} = \frac{1}{G_{xy}^{(k)}} \sigma_{xy}^{(k)}, \quad \varepsilon_{yz}^{(k)} = \frac{1}{G_{yz}^{(k)}} \sigma_{yz}^{(k)}, \quad \varepsilon_{zx}^{(k)} = \frac{1}{G_{zx}^{(k)}} \sigma_{zx}^{(k)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $E_i, \nu_{ij}, G_{ij}$  — модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модули сдвига материала соответствующего слоя.

Применив (5), (1), соотношения Коши, выразим внутренние усилия и моменты, входящие в (3), через искомые функции  $u_x(x, y), u_y(x, y), \psi_x(x, y), \psi_y(x, y), w(x, y)$ . В итоге получим систему уравнений равновесия прямоугольной ортотропной трехслойной пластины в перемещениях:

$$\begin{aligned} a_1 u_{x,yy} + a_2 u_{y,xy} + a_3 u_{x,xx} + a_4 \psi_{x,yy} + a_5 \psi_{y,xy} + a_6 \psi_{x,xx} - a_7 w_{,xxx} - a_8 w_{,xyy} + p_x = 0; \\ a_1 u_{y,xx} + a_9 u_{x,xy} + a_{10} u_{y,yy} + a_4 \psi_{y,xx} + a_{11} \psi_{x,xy} + a_{12} \psi_{y,yy} - a_{13} w_{,yyy} - a_{14} w_{,xyy} + p_y = 0; \\ a_7 u_{x,xxx} + a_{13} u_{y,yyy} + a_{15} u_{x,xyy} + a_{16} u_{y,xyx} + a_{17} \psi_{x,xxx} + a_{18} \psi_{y,yyy} + \\ + a_{19} \psi_{x,xyy} + a_{20} \psi_{y,xyx} - a_{21} w_{,xxx} - a_{22} w_{,yyy} - a_{23} w_{,xyy} + q = 0; \\ a_6 u_{x,xx} + a_5 u_{y,xy} + a_4 u_{x,yy} + a_{24} \psi_{x,xx} + a_{25} \psi_{y,xy} + a_{30} \psi_{x,yy} - a_{26} w_{,xyy} - a_{27} w_{,xxx} - G_{xz}^{(3)} c \psi_x = 0; \\ a_{12} u_{y,yy} + a_{11} u_{x,xy} + a_4 u_{y,xx} + a_{28} \psi_{y,yy} + a_{29} \psi_{x,xy} + a_{30} \psi_{y,xx} - a_{31} w_{,yxx} - a_{32} w_{,yyy} - G_{yz}^{(3)} c \psi_y = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

где коэффициенты  $a_i$  выражаются через геометрические и упругие характеристики материалов слоев [5].

Решение линейной задачи для случая цилиндрического изгиба [6] имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi(x) = C_2 \operatorname{sh}(\beta x) + C_3 \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{1}{\beta} \left[ \operatorname{sh}(\beta x) \int g(x) \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g(x) \operatorname{sh}(\beta x) dx \right]; \\ w(x) = \frac{1}{\alpha_2} \left[ \alpha_1 \int \psi dx - a_7 L_3^{-1}(p) + a_3 L_4^{-1}(q) + \frac{a_3 C_1}{6} x^3 \right] + \frac{C_4}{2} x^2 + C_5 x + C_6; \\ u(x) = \gamma_3 \psi + \frac{1}{\alpha_2} \left[ -a_{21} L_2^{-1}(p) + a_7 L_3^{-1}(q) + \frac{a_7}{2} C_1 x^2 \right] + C_7 x + C_8, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $L_1^{-1}, L_2^{-1}, L_3^{-1}$  — обозначены линейные интегральные операторы

$$L_1^{-1}(f) = \int f dx; \quad L_2^{-1}(f) = \iint f dx dx; \quad L_3^{-1}(f) = \iiint f dx dx dx.$$

Константы интегрирования  $C_1, \dots, C_8$  определяются из граничных условий.

Для шарнирно опертой по обеим сторонам ( $x=0, x=l$ ) пластины граничные условия принимают вид:

$$x=0, x=l: u = \psi = w = M = 0. \quad (12)$$

В случае жесткой заделки левого конца пластины ( $x=0$ ) при свободном правом ( $x=l$ ) (консольное опирание) граничные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} x=0: \quad w = w_{,x} = \psi = u = 0; \\ x=l: \quad M = M_{,x} = N = \psi = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В случае жесткой заделки обоих концов:

$$x=0, x=l: w = w_{,x} = \psi = u = 0. \quad (14)$$

**Постановка и решение нелинейной задачи вязкоупругости.** Для описания нелинейно вязкоупругих свойств заполнителя применяем соотношения между напряжениями и деформациями:

$$s_{ij}^{(3)} = 2G_3 [f_1^{(3)}(\epsilon_i^{(3)}) \epsilon_{ij}^{(3)} - \int_0^t R_3(t-\tau) f_2^{(3)}(\epsilon_i^{(3)}) \epsilon_{ij}^{(3)}(\tau) d\tau], \quad \sigma^{(3)} = 3K_3(\epsilon^{(3)}). \quad (15)$$

Здесь  $G_3, K_3$  – модули сдвиговой и объемной деформации,  $R_3(t)$  ядро релаксации материала заполнителя,  $f_1^{(3)}(\epsilon_i^{(3)}) = \omega^{(3)}(\epsilon_i^{(3)})$ ,  $f_2^{(3)}(\epsilon_i^{(3)}) = 1 - \omega^{(3)}(\epsilon_i^{(3)})$  – универсальные функции, описывающие физическую нелинейность заполнителя,  $\omega^{(3)}$  – функция нелинейности.

Исходя из соотношений (15), выделим в тензоре напряжений в заполнителе упругие (с индексом «e») и неупругие (с индексом « $\omega$ ») слагаемые:

$$\sigma_x^{(3)} = \sigma_x^{(3)e} - \sigma_x^{(3)\omega}, \quad \sigma_{xz}^{(3)} = \sigma_{xz}^{(3)e} - \sigma_{xz}^{(3)\omega},$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(3)\omega} &= 2G_3 [\omega_3 \epsilon_x^{(3)} + \int_0^t R_3(t-\tau)(1-\omega_3) \epsilon_x^{(3)}(\tau) d\tau], \quad \sigma_x^{(3)e} = 2G_3 \epsilon_x^{(3)} + 3K_3 \epsilon^{(3)}, \\ \sigma_{xz}^{(3)\omega} &= 2G_3 [\omega_3 \epsilon_{xz}^{(3)} + \int_0^t R_3(t-\tau)(1-\omega_3) \epsilon_{xz}^{(3)}(\tau) d\tau], \quad \sigma_{xz}^{(3)e} = 2G_3 \epsilon_{xz}^{(3)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Проведя подобную операцию с внутренними усилиями, получим:

$$N^{(3)} = N^{(3)e} - N^{(3)\omega}, \quad M^{(3)} = M^{(3)e} - M^{(3)\omega}, \quad Q^{(3)} = Q^{(3)e} - Q^{(3)\omega}. \quad (17)$$

Упругие (с индексом «e») и неупругие (с индексом « $\omega$ ») составляющие в (17) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} N^{(3)e} &= \int_{h_k} \sigma_x^{(3)e} dz, \quad N^{(3)\omega} = \int_{h_k} \sigma_x^{(3)\omega} dz, \quad M^{(3)e} = \int_{h_k} \sigma_x^{(3)e} z dz, \\ M^{(3)\omega} &= \int_{h_k} \sigma_x^{(3)\omega} z dz, \quad Q^{(3)e} = \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)e} dz, \quad Q^{(3)\omega} = \int_{-c}^c \sigma_{xz}^{(3)\omega} dz. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставив внутренние усилия (18) в уравнения равновесия (3.1), приводим систему к виду:

$$\begin{cases} N_{,x}^e = -p + N_{,x}^{(3)\omega}, \\ H_{,x}^e - Q^e = M_{,x}^{(3)\omega} - Q^{(3)\omega}, \\ M_{,xx}^e = -q + M_{,xx}^{(3)\omega}, \end{cases} \quad (19)$$

где

$$N^e = N^{(1)} + N^{(2)} + N^{(3)e}, \quad M^e = M^{(1)} + M^{(2)} + M^{(3)e}, \quad Q^e = Q^{(3)e},$$

$$H^e = c(N^{(1)} - N^{(2)}) + M^{(3)e}. \quad (20)$$

Окончательные формулы для вычисления неупругих составляющих в (20) получим, используя соотношения (16) и (18):

$$\begin{aligned} N^{(3)\omega} &= \frac{4}{3} G_3 \int_{-c}^c \left[ \omega_3 \varepsilon_x^{(3)} + \int_0^t R_3(t-\tau)(1-\omega_3) \varepsilon_x^{(3)} d\tau \right] dz, \\ M^{(3)\omega} &= \frac{4}{3} G_3 \int_{-c}^c \left[ \omega_3 \varepsilon_x^{(3)} + \int_0^t R_3(t-\tau)(1-\omega_3) \varepsilon_x^{(3)} d\tau \right] z dz, \\ Q^{(3)\omega} &= 2G_3 \int_{-c}^c \left[ \omega_3 \psi + \int_0^t R_3(t-\tau)(1-\omega_3) \psi d\tau \right] dz, \end{aligned} \quad (21)$$

где принято обозначение:  $\omega_3 = \omega^{(3)}(\varepsilon_i^{(3)})$

Далее упругие составляющие внутренних усилий, входящие в уравнения (19), выразим через три линейно независимые функции  $u(x, t)$ ,  $\psi(x, t)$ ,  $w(x, t)$ . В результате получим систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} a_1 u_{,xx} + a_6 \psi_{,xx} - a_7 w_{,xxx} = -p + p_\omega, \\ a_6 u_{,xx} + a_2 \psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} - a_5 \psi = h_\omega, \\ a_7 u_{,xxx} + a_3 \psi_{,xxx} - a_4 w_{,xxx} = -q + q_\omega. \end{cases} \quad (22)$$

Здесь неупругие слагаемые в правой части уравнений (22) вычисляются по формулам

$$p_\omega = N_{,x}^{(3)\omega}, \quad h_\omega = (M_{,x}^{(3)\omega} - Q^{(3)\omega}), \quad q_\omega = M_{,xx}^{(3)\omega}. \quad (23)$$

Для решения системы (22) используем метод последовательных приближений, базирующийся на методе «упругих» решений Ильюшина. Предположим, что в (22), (23) содержится малый параметр, например,  $\omega^{(3)} < 1$ . Тогда возможен метод итераций, при котором для любого  $n$ -го приближения получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} a_1 u_{,xx}^{(n)} + a_6 \psi_{,xx}^{(n)} - a_7 w_{,xxx}^{(n)} = -p + p_\omega^{(n-1)}, \\ a_6 u_{,xx}^{(n)} + a_2 \psi_{,xx}^{(n)} - a_3 w_{,xxx}^{(n)} - a_5 \psi^{(n)} = h_\omega^{(n-1)}, \\ a_7 u_{,xxx}^{(n)} + a_3 \psi_{,xxx}^{(n)} - a_4 w_{,xxx}^{(n)} = -q + q_\omega^{(n-1)}. \end{cases} \quad (24)$$

Величины  $p_\omega^{(n-1)}$ ,  $h_\omega^{(n-1)}$ ,  $q_\omega^{(n-1)}$ , соответствующие неупругим составляющим (23), на первом шаге ( $n = 1$ ) принимаются равными нулю, в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения и носят название *дополнительных «внешних» нагрузок*. Они служат поправками на физическую нелинейность и реономность материалов. Формулы для них получим, используя (23), (21):

$$\begin{aligned} p_\omega^{(n-1)} &= N_{,x}^{(3)\omega(n-1)}, \quad h_\omega^{(n-1)} = (M_{,x}^{(3)\omega(n-1)} - Q^{(3)\omega(n-1)}), \quad q_\omega^{(n-1)} = M_{,xx}^{(3)\omega(n-1)}, \\ N^{(3)\omega(n-1)} &= \frac{4}{3} G_3 \int_{-c}^c \left[ \omega_3(\varepsilon_i^{(3)(n-1)}) \varepsilon_x^{(3)(n-1)} + \int_0^t R_3(t-\tau)(1-\omega_3(\varepsilon_i^{(3)(n-1)})) \varepsilon_x^{(3)(n-1)} d\tau \right] dz, \\ M^{(3)\omega} &= \frac{4}{3} G_3 \int_{-c}^c \left[ \omega_3(\varepsilon_i^{(3)(n-1)}) \varepsilon_x^{(3)(n-1)} + \int_0^t R_3(t-\tau)(1-\omega_3(\varepsilon_i^{(3)(n-1)})) \varepsilon_x^{(3)(n-1)} d\tau \right] z dz, \\ Q^{(3)\omega} &= 2G_3 \int_{-c}^c \left[ \omega_3(\varepsilon_i^{(3)(n-1)}) \psi^{(n-1)} + \int_0^t R_3(t-\tau)(1-\omega_3(\varepsilon_i^{(3)(n-1)})) \psi^{(n-1)} d\tau \right] dz. \end{aligned} \quad (25)$$

Применение метода последовательных приближений позволяет сводить на каждом шаге приближения рассматриваемую задачу к однородной линейной нестационарной задаче термоупругости с дополнительными «внешними» нагрузками.

Процедура получения решения системы уравнений (24) не отличается от примененной для соответствующей задачи теории упругости [6]. В результате получаем искомое решение в рекуррентном виде:

$$\begin{aligned} \psi^{(n)}(x,t) &= C_2^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) + C_3^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{1}{\beta} \left[ \operatorname{sh}(\beta x) \int g^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx \right], \\ u^{(n)}(x,t) &= \gamma_3 \psi^{(n)} + \frac{1}{\alpha_2} \left[ -a_4 L_2^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + a_7 L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \frac{a_2}{2} C_1^{(n)} x^2 \right] + C_7^{(n)} x + C_8^{(n)}, \\ w^{(n)}(x,t) &= \frac{1}{\alpha_2} \left[ \alpha_1 \int \psi^{(n)} dx - a_7 L_3^{-1}(p - p_\omega^{(n-1)}) + a_1 L_4^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} a_1 C_1^{(n)} x^3 \right] + \frac{1}{2} C_4^{(n)} x^2 + C_5^{(n)} x + C_6^{(n)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь

$$g^{(n)}(x,t) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \gamma_1 h_\omega^{(n-1)} + \gamma_2 (p - p_\omega^{(n-1)}) + \gamma_1 \left( \int (q - q_\omega^{(n-1)}) dx + C_1^{(n)} \right).$$

Таким образом, формулы (26) дают *аналитическое решение* задачи о цилиндрическом изгибе трехслойной ортотропной пластины с нелинейно вязкоупругим заполнителем при различных условиях закрепления ее торцов.

**Численные результаты.** Для численной реализации решений (26), удовлетворяющих граничным условиям (12) – (14) создана компьютерная программа, использующая пакет Maple. С ее помощью проведен анализ параметров напряженно-деформированного состояния рассматриваемой трехслойной нелинейно упругой пластины с материалами слоев УВЭС–фторопласт–УВЭС. Механические характеристики материалов приведены в [2, 4].

Величины нагрузки и относительные толщины слоев ( $q = 9$  МПа;  $h_1 = h_2 = 0,04$ ;  $c = 0,06$ ) подобраны так, чтобы нелинейные и реономные свойства заполнителя в пластине (УВЭС–фторопласт–УВЭС) проявились в достаточной степени.

Аналитический вид функций  $\omega_3$  для заполнителя принимался в виде:

$$\omega^{(3)}(\varepsilon_i) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_i \leq \varepsilon_s \\ A_1 (1 - \varepsilon_s / \varepsilon_i)^{\alpha_1}, & \varepsilon_i > \varepsilon_s \end{cases}$$

где  $\varepsilon_i^{(3)}$ ,  $\varepsilon_s^{(3)}$  – интенсивности деформаций рабочая и пороговая.

Ядро релаксации принималось в виде, предложенном Ржаницыным:

$$R_3(t) = A e^{-\beta t^{\alpha-1}},$$

где для фторопласта  $A = 0.02366$ ,  $\beta = 3.33 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha = 0.05$ .

Рисунок 1 а, б демонстрирует практическую сходимость метода упругих решений. Здесь за искомое решение принято 12-е приближение, которое отличается от предыдущих двух менее чем на 0,2 % – как для прогибов  $w$ , так и для сдвигов  $\psi$ . Номер кривых на рисунках соответствует номеру  $n$  итерации,  $n = 0$  – упругому решению. Полученное решение задачи нелинейной вязкоупругости отличается от идеально упругого примерно на 130 %.

На рисунке 2 показано изменение максимальных  $a$  – прогиба  $w$ ,  $b$  – относительного сдвига  $\psi$  в зависимости от времени при различных физических уравнениях состояния заполнителя: 1 – упругий; 2 – линейно вязкоупругий; 3 – нелинейно упругий; 4 – нелинейно вязкоупругий заполнитель. Учет мгновенной физической нелинейности увеличивает максимальные перемещения в 1,45 раза; линейно

вязкоупругих свойств заполнителя за время  $t_1 = 60$  мин – в 1,18 раза; нелинейная вязкоупругость дает рост в 2,3 раза.

**Выводы.** Приведенное решение позволяет с достаточной точностью описывать перемещения в трехслойных ортотропных пластинах с физически нелинейным заполнителем при цилиндрическом изгибе. Его можно использовать для соответствующих инженерных расчетов.

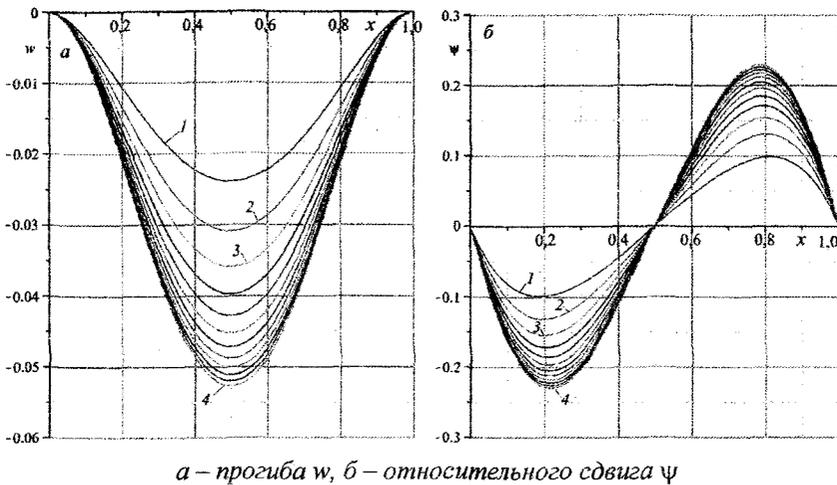


Рисунок 1 – Сходимость метода последовательных приближений

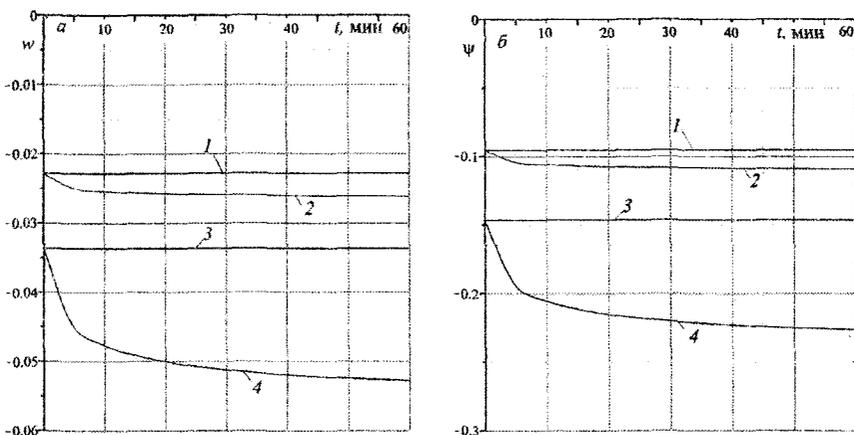


Рисунок 2 – Изменение а – максимального прогиба  $w$  [м], б – максимального относительного сдвига  $\psi$  в зависимости от времени  $t$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Поленов, В.С. Распространение волн в насыщенной жидкостью неоднородной пористой среде / В.С. Поленов, А.В. Чигарев // Прикладная математика и механика. – 2010. – Т. 74, № 2. – С. 276–284.
2. Ильюшин, А. А. Основы математической теории термовязкоупругости / А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
3. Плескачевский, Ю.М. Деформирование металлополимерных систем / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая. – Минск: Беларуская навука, 2004. – 342 с.
4. Старовойтов, Э.И. Напряженно-деформированное состояние прямоугольной трехслойной композитной пластины / Э.И. Старовойтов, И.И. Протуро // Вестник гражданских инженеров (Санкт-Петербург). – 2009. – № 1 (18). – С. 34–38.
5. Протуро, И.И. Изгиб прямоугольной трехслойной ортотропной пластины / И.И. Протуро // Материалы. Технологии. Инструменты. – 2010. – Т. 15. №1. – С. 9–13.
6. Протуро, И.И. Цилиндрический изгиб ортотропной трехслойной пластины с нелинейно упругим заполнителем / И.И. Протуро // Теор. и прикл. механика. – Минск: БИТУ, 2011. – Вып. 26.