

## ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МНОГОСТЕННОЙ УГЛЕРОДНОЙ НАНОТРУБКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЛОКАЛЬНОЙ КОНТИНУАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Михасев Г.И., Шейко А.Н.

*On the base of the theory of thin orthotropic cylindrical shells, and by using the non-local constitutive equations of Eringen, the system of differential equations describing motion of a carbon multi-walled nanotube lying in an elastic medium is derived. The interaction between the nanotube wall is described in the term of the van der Waals forces. As an example, axisymmetric forms of free vibrations of the single-walled nanotube is considered.*

**Введение.** Развитие нанотехнологий дало мощный толчок к проведению интенсивных исследований по выявлению уникальных свойств углеродных нанотрубок (УНТ) и созданию математических моделей, описывающих наноразмерные объекты с позиций механики сплошных сред. Если число работ, посвященных изучению механических свойств углеродных нанотрубок чрезвычайно велико (см., например, обзорную статью [1]), то исследования по континуальному моделированию многослойных нанотрубок до сих пор ограничивались рассмотрением достаточно простых моделей, основанных либо на теории слоистых полых балок [2, 3], либо на классических теориях тонких оболочек [4, 5]. Целью данной работы является вывод уравнений движения многостенной углеродной нанотрубки с использованием нелокального закона физического состояния Эрингена, а также теории слоистых ортотропных оболочек с учетом сил ван-дер-Вальса. В сокращенном варианте вывод данных уравнений приведен в [6]. В качестве примера рассматриваются свободные колебания одностенной УНТ, в явном виде получено соотношение для собственной частоты, зависящее от упругих свойств матрицы, в которой лежит УНТ, а также от параметра, характеризующего упругую нелокальность в законе физического состояния.

**Система координат и исходные предположения.** Многостенную углеродную нанотрубку будем моделировать как механическую систему, состоящую из  $N$  концентрически вложенных цилиндрических оболочек. Пусть  $L = Rl$ ,  $R_n = Rr_n$  и  $h_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) – длина, радиус срединной поверхности  $n$ -ой трубки и ее эффективная толщина соответственно, а  $R$  – характерный размер нанотрубки (например,  $R = R_N$ ). На срединной поверхности  $n$ -ой оболочки введем местную ортогональную систему координат  $\alpha = Rx$ ,  $\beta_n = Rr_n\varphi$  с ортами  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ , где  $x$ -безразмерная осевая координата, а  $\varphi$ -угол как показано на рисунке 1.

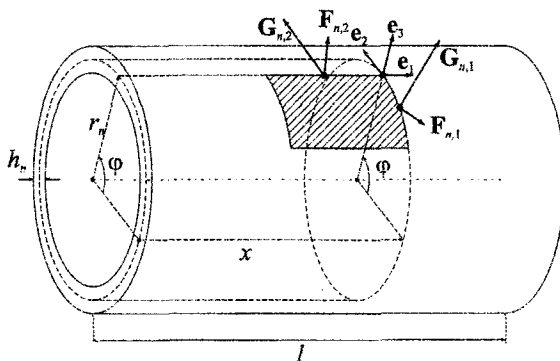


Рисунок 1 – Криволинейная система координат на поверхности  $n$ -ой трубки. Усилия и моменты

Известно, что механические свойства углеродной нанотрубки зависят как от линейных размеров, так и от хиральности ее решетки [7, 8]. Молекулярные расчеты, выполненные в работах [9, 10], показали, что характер бифуркации одностенной трубки при осевом сжатии и кручении существенно зависит от ее хиральности, проявляющейся в анизотропии упругих свойств. На основе молекулярного моделирования Чанг [11] вывел упругие постоянные одностенной углеродной трубки, моделируемой анизотропной упругой оболочкой в зависимости от строения ее решетчатой структуры; в частности, показано, что для зигзагообразной трубки имеет место свойство ортотропии с главными направлениями упругости, совпадающими с криволинейными линиями  $x = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$ . Еще ранее в работе [12] было показано, что независимо от хиральности одностенная углеродная нанотрубка радиуса  $R$  может моделироваться ортотропной упругой оболочкой с погрешностью порядка  $O\left[\left(a/R\right)^2\right]$ , где  $a \approx 0,14\text{нм}$  – характерный внутренний размер решетки. Следуя работам [11, 12], далее считаем, что каждый слой, составляющий многостенную нанотрубку, может быть представлен упругой ортотропной цилиндрической оболочкой, характеризующейся параметрами  $E_{n,i}$ ,  $\nu_{n,i}$ ,  $G_n$  ( $i = 1, 2; n = 1, 2, \dots, N$ ), где  $E_{n,1}$ ,  $E_{n,2}$  – модули Юнга в направлениях  $x$  и  $\varphi$  срединной поверхности соответственно,  $\nu_{n,1}$ ,  $\nu_{n,2}$  – коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сокращение (растяжение) при растяжении (сжатии) в направлениях  $x$  и  $\varphi$ , а  $G_n$  – модуль сдвига в плоскости трубки, параллельной срединной поверхности. При этом, в силу симметрии,  $E_{n,2}\nu_{n,1} = E_{n,1}\nu_{n,2}$  для любого  $n$ . Соотношения для вычисления данных параметров в зависимости от диаметра и хиральности одностенной трубки представлены в работе [11].

**Уравнения движения в усилиях.** Выделим в срединной поверхности  $n$ -ой оболочки элемент, ограниченный координатными линиями  $x$ ,  $x + dx$  и  $\varphi$ ,  $\varphi + d\varphi$  (см. рисунок 1). Обозначим через  $F_{n,1}$  и  $G_{n,1}$  ( $F_{n,2}$  и  $G_{n,2}$ ) отнесенные к единице длины усилия и моменты внутренних *микроскопических* напряжений, действующие на линиях  $x = \text{const}$  ( $\varphi = \text{const}$ ) выделенного элемента, а через  $q_{n,t}$ ,  $q_{n,s}$ ,  $q_{n,s}^{(vdW)}$  – плотности сил инерции, поверхностных сил и сил ван-дер-Вальса (*vdW*-силы), отнесенные к единице площади срединной поверхности  $n$ -го слоя. Разложения этих сил по ортам имеют вид

$$\begin{aligned} F_{n,1} &= T_{n,1}e_1 + S_{n,1}e_2 + Q_{n,1}e_3, & G_{n,1} &= H_{n,1}e_1 - M_{n,1}e_2, \\ F_{n,2} &= T_{n,2}e_1 + S_{n,2}e_2 + Q_{n,2}e_3, & G_{n,2} &= M_{n,2}e_1 - H_{n,2}e_2, \\ q_{n,t} &= -\rho_n \dot{h}_n \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{i=1}^3 (u_{n,i}e_i), & q_{n,s} &= \sum_{i=1}^3 (q_{n,i}e_i), & q_{n,s}^{vdW} &= \sum_{i=3}^3 (q_{n,i}^{vdW}e_i) \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho_n$  – удельная масса  $n$ -ой трубки,  $t$  – время. В соответствии с континуальной моделью *vdW*-силы взаимодействия между двумя точками с координатами  $x$ ,  $\varphi$  на соседних слоях являются нелинейными функциями перемещений этих точек [13, 14]. В частности, для малых относительных перемещений радиальная *vdW*-сила между  $n$ -ым и  $(n + 1)$ -ым слоями пропорциональна [14]  $u_{n+1,3} - u_{n,3}$ . В нашем случае предлагается обобщенная линейная модель, в соответствии с которой учитываются все составляющие *vdW* – сил:

$$q_{n,i}^{vdW} = q_{n,n+1,i} + q_{n,n-1,i}, \quad q_{n,n+1,i} = c_{n+1,i}(u_{n+1,i} - u_{n,i}), \quad q_{n,n-1,i} = c_{n,i}(u_{n-1,i} - u_{n,i}). \quad (2)$$

Здесь  $c_{1,i} = u_{N+1,i} = 0$ , а  $c_{N+1,i}$  – коэффициент постели окружающей упругой среды, в которой лежит УНТ. При  $n = 2, \dots, N - 1$  параметры  $c_{n,i}$  зависят от радиусов

$R_n$  и  $R_{n-1}$   $n$ -го и  $(n-1)$ -го слоев [14]. У краев трубки коэффициенты  $c_{n,i}(\alpha)$  являются функциями продольной координаты  $\alpha$ , носящими характер краевого эффекта; вдали от краев можно принять  $c_{n,i} = \text{const}$ . При  $i=1,2$  коэффициенты  $c_{n,i}$ , соответствующие тангенциальным составляющим vdW-сил, малы и обычно во внимание не принимаются.

Условия равенства нулю главных векторов *микроскопических* сил и моментов (1), действующих на выделенный элемент (рисунок 1) дают систему уравнений, описывающую движение  $n$ -ой трубки [15]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{n,1}}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_{n,2}}{\partial \beta_n} - \rho_n h_n \frac{\partial^2 u_{n,1}}{\partial t^2} + q_{n,1} + q_{n,1}^{vdW} &= 0, \\ \frac{\partial T_{n,2}}{\partial \beta_n} + \frac{\partial S_{n,1}}{\partial \alpha} - \frac{Q_{n,2}}{R_n} - \rho_n h_n \frac{\partial^2 u_{n,2}}{\partial t^2} + q_{n,2} + q_{n,2}^{vdW} &= 0, \\ \frac{\partial Q_{n,1}}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_{n,2}}{\partial \beta_n} + \frac{T_{n,2}}{R_n} - \rho_n h_n \frac{\partial^2 u_{n,3}}{\partial t^2} + q_{n,3} + q_{n,3}^{vdW} &= 0, \\ \frac{\partial H_{n,1}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{n,2}}{\partial \beta_n} + Q_{n,2} = 0, \quad \frac{\partial H_{n,2}}{\partial \beta_n} + \frac{\partial M_{n,1}}{\partial \alpha} + Q_{n,1} &= 0, \\ S_{n,1} - S_{n,2} - R_n^{-1} H_{n,2} &= 0, \quad n=1,2,\dots,N. \end{aligned} \quad (3)$$

В четвертом и пятом уравнениях системы (3) отброшены члены, учитывающие инерции поворотов элемента трубки.

Введем в рассмотрение *макроскопические* (классические) мембранные усилия  $T_{n,i}^{(m)}, S_{n,i}^{(m)}$  и моменты  $H_{n,i}^{(m)}, M_{n,i}^{(m)}$ , аналогичные тем, что фигурируют в (3). В соответствии с нелокальной континуальной теорией Эрингена [16], адаптированной для цилиндрической оболочки [3], *микроскопические* и *макроскопические* напряжения связаны соотношениями:

$$\mathcal{L}_n (T_{n,i}, S_{n,i}, H_{n,i}, M_{n,i}) = (T_{n,i}^{(m)}, S_{n,i}^{(m)}, H_{n,i}^{(m)}, M_{n,i}^{(m)}), \quad (4)$$

где  $\mathcal{L}_n$ - дифференциальный оператор, действующий по формуле:

$$\mathcal{L}_n = 1 - (e_0 a)^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta_n^2} \right). \quad (5)$$

Здесь  $a=0,142\text{нм}$  - ранее введенный внутренний характерный размер решетки нанотрубки, а  $e_0$  - материальная константа нелокальности. В теории Эрингена  $e_0 = 0,39$ , однако Л. Судак [2] показал, что данный параметр должен быть значительно больше. Попутно отметим, что вопрос об его определении до сих пор остается открытым.

*Замечание 1.* Оператор (5) не учитывает размеры (наличие краев) нанотрубки, а позволяет принять во внимание лишь деформации в окрестности точки, в которой находятся напряжения.

Уравнения физического *локального* состояния (с позиций макроскопической континуальной теории) для ортотропной оболочки примем в виде [17]:

$$\begin{aligned} T_{n,1}^{(m)} &= C_{n,11} \varepsilon_{n,1} + C_{n,12} \varepsilon_{n,2}, \quad T_{n,2}^{(m)} = C_{n,22} \varepsilon_{n,2} + C_{n,12} \varepsilon_{n,1}, \\ S_{n,1}^{(m)} &= C_{n,66} \omega_n + R_n^{-1} D_{n,66} \tau_n, \quad S_{n,2}^{(m)} = C_{n,66} \omega_n, \quad H_{n,1}^{(m)} = H_{n,2}^{(m)} = D_{n,66} \tau_n \\ M_{n,1}^{(m)} &= D_{n,11} \kappa_{n,1} + D_{n,12} \kappa_{n,2}, \quad M_{n,2}^{(m)} = D_{n,22} \kappa_{n,2} + D_{n,12} \kappa_{n,1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $C_{n,ik}, D_{n,ik}$  выражаются через упругие постоянные ортотропного материала [17] по формулам

$$C_{n,ik} = h_n B_{n,ik}, \quad D_{n,ik} = \frac{h_n^3}{12} B_{n,ik},$$

$$B_{n,11} = \frac{E_{n,1}}{1 - \nu_{n,1}\nu_{n,2}}, \quad B_{n,22} = \frac{E_{n,2}}{1 - \nu_{n,1}\nu_{n,2}}, \quad B_{n,66} = G_n, \quad (7)$$

$$B_{n,12} = \frac{\nu_{n,2}E_{n,1}}{1 - \nu_{n,1}\nu_{n,2}} = \frac{\nu_{n,1}E_{n,2}}{1 - \nu_{n,1}\nu_{n,2}},$$

а деформации  $\varepsilon_{n,j}, \omega_n, \tau_n, \kappa_{n,j}$  ( $j=1,2$ ) - через перемещения  $u_{n,i}$  [15]:

$$\varepsilon_{n,1} = \frac{\partial u_{n,1}}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_{n,2} = \frac{\partial u_{n,2}}{\partial \beta_n} - \frac{w_n}{R_n},$$

$$\omega_{n,1} = \frac{\partial u_{n,2}}{\partial \alpha}, \quad \omega_{n,2} = \frac{\partial u_{n,1}}{\partial \beta_n}, \quad \omega_n = \omega_{n,1} + \omega_{n,2},$$

$$\gamma_{n,1} = -\frac{\partial w_n}{\partial \alpha}, \quad \gamma_{n,2} = -\frac{\partial w_n}{\partial \beta_n} - \frac{u_{n,2}}{R_n}, \quad (8)$$

$$\kappa_{n,1} = -\frac{\partial \gamma_{n,1}}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 w_n}{\partial \alpha^2}, \quad \kappa_{n,2} = -\frac{\partial \gamma_{n,2}}{\partial \beta_n} = \frac{\partial^2 w_n}{\partial \beta_n^2} + \frac{1}{R_n} \frac{\partial u_{n,2}}{\partial \beta_n},$$

$$\tau_n = -\frac{\partial \gamma_{n,1}}{\partial \beta_n} + \frac{\omega_{n,1}}{R_n} = \frac{\partial^2 w_n}{\partial \alpha \partial \beta_n} + \frac{1}{R_n} \frac{\partial u_{n,2}}{\partial \alpha}.$$

Подействуем на уравнения (3) оператором (5). Тогда, с учетом (6)-(8), получим систему  $3N$  уравнений, описывающих движение многостенной нанотрубки:

$$\sum_{j=1}^3 \left( \mu^4 \zeta_n M_{n,ij} u_{n,j} + L_{n,ij} u_{n,j} \right) - \delta_n (1 - \varepsilon^2 \Delta_n) \frac{\partial^2 u_{n,i}}{\partial \hat{t}^2} -$$

$$- (1 - \varepsilon^2 \Delta_n) \left[ \hat{c}_{n+1,i} (u_{n+1,i} - u_{n,i}) - \hat{c}_{n,i} (u_{n,i} - u_{n-1,i}) + \hat{q}_{n,i} \right] = 0, \quad i = 1, 2, 3; n = 1, \dots, N.$$

Здесь  $\hat{t} = t\omega_0$  - безразмерное время,  $\omega_0 = \omega_N$  - характеристическая частота колебаний,

$$\omega_n^2 = \frac{E_n^*}{\rho_n R^2}, \quad E_n^* = \frac{2E_{n,1}\nu_{n,2}}{\nu_{n,1} + \nu_{n,2}}, \quad \zeta_n = \left( \frac{h_n}{h_N} \right)^2, \quad \mu^4 = \frac{h_N^2}{12R^2}, \quad \delta_n = \left( \frac{\omega_N}{\omega_n} \right)^2, \quad \varepsilon = \frac{e_0 a}{R},$$

$$\hat{c}_{n,i}(x) = \frac{R^2 c_{n,i}}{h_n E_n^*}, \quad \hat{q}_{n,i}(x, \varphi, \hat{t}) = \frac{R^2 q_{n,i}}{h_n E_n^*}, \quad \Delta_n = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{r_n^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), \quad n = 1, \dots, N, \quad (10)$$

а  $L_{n,ij}, M_{n,ij}$  - матричные дифференциальные операторы размерности  $3 \times 3$  с элементами  $L_{n,ij}$  и  $M_{n,ij}$  соответственно, определяемые соотношениями:

$$L_{n,11} = \hat{C}_{n,11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hat{C}_{n,66}}{r_n^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad L_{n,12} = \frac{(\hat{C}_{n,12} + \hat{C}_{n,66})}{r_n} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi}, \quad L_{n,13} = -\frac{\hat{C}_{n,12}}{r_n} \frac{\partial}{\partial x},$$

$$L_{n,21} = -L_{n,12}, \quad L_{n,22} = \hat{C}_{n,66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hat{C}_{n,22}}{r_n^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad L_{n,23} = -\frac{\hat{C}_{n,22}}{r_n^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad L_{n,31} = -L_{n,13},$$

$$L_{n,32} = -L_{n,23}, \quad L_{n,33} = -r_n^{-2} \hat{C}_{n,22}, \quad M_{n,11} = M_{n,12} = M_{n,13} = M_{n,21} = M_{n,31} = 0,$$

$$M_{n,22} = r_n^{-2} \left( 2\hat{C}_{n,66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hat{C}_{n,22}}{r_n^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right), M_{n,23} = r_n^{-2} (2\hat{C}_{n,66} + \hat{C}_{n,12}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{\hat{C}_{n,22}}{r_n^4} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3}, M_{n,32} = -M_{n,23}, M_{n,33} = -\hat{C}_{n,11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{2(\hat{C}_{n,12} + \hat{C}_{n,66})}{r_n^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \varphi^2} - \frac{\hat{C}_{n,22}}{r_n^4} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4}, \hat{C}_{n,ii} = \frac{E_{n,i}}{E_n^* (1 - \nu_{n,1} \nu_{n,2})}, \hat{C}_{n,12} = \nu_{n,2} \hat{C}_{n,11}, \hat{C}_{n,66} = \frac{G_n}{E_n^*}, i = 1, 2. \quad (11)$$

*Замечание 2.* Действие оператора (5) на уравнения (3) не приводит к повышению порядка системы дифференциальных уравнений движения оболочки в перемещениях по сравнению с классической макроскопической теорией оболочек [15], но порождает дополнительные интегралы при определении микроскопических напряжений в соответствии с (4). Однако данные интегралы легко устраняются, если ввести условия ограниченности микроскопических напряжений при  $|x| \rightarrow \infty$ . Введение данных условий оправдывается тем, что закон физического состояния Эрингена в форме (4) носит локальный характер и не учитывает реальных размеров УНТ (см. *Замечание 1*).

Уравнения (9) моделируют движение многостенной УНТ, лежащей в упругой среде, под действием произвольно распределенных поверхностных сил  $\hat{q}_{n,i}(x, \varphi, \hat{t})$ . При  $\hat{q}_{n,i} = 0$  получаем систему уравнений, описывающую свободные колебания нанотрубки.

*Замечание 3.* Погрешность принятой здесь модели ортотропных оболочек имеет порядок [15, 16]  $\sim h_N/R$ , а погрешность континуальной модели УНТ составляет порядок [7]  $\sim (e_0 a/R)^2$ . Таким образом, погрешность выведенных уравнений (9) имеет порядок  $\sim \max\{h_N/R, (e_0 a/R)^2\}$ . Отсюда следует, что эффект упругой нелокальности, определяемый оператором  $\Delta_n$ , целесообразно учитывать, если выполняется неравенство  $e_0 > \sqrt{h_N R}/a$ , что хорошо согласуется с предположением, сделанным Л. Судак [2]. Далее полагаем  $\varepsilon^2 = \delta_\varepsilon \mu$ ,  $\delta_\varepsilon \sim 1$ , тогда введенное условие для параметра  $e_0$  выполняется, если  $\delta_\varepsilon > \sqrt{12} \mu$ .

Влияние реакции окружающей упругой среды может быть учтено в рамках модели упругого винклеровского основания, в соответствии с которой в соотношении (2)

$$q_{N,N+1,i} = -c_{N+1,i} u_{N,i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (12)$$

Здесь  $c_{N+1,i}$  – коэффициенты постели упругого основания в осевом ( $i=1$ ), окружном ( $i=2$ ) и нормальном ( $i=3$ ) направлениях перемещения точки внешней стенки нанотрубки. Обычно коэффициент постели винклеровского основания рассматривается как величина, зависящая только от упругих свойств основания [2]. Подробный анализ реакции упругого основания содержится в работах [18, 19]. Этот анализ показал, что коэффициент постели зависит от характера волнообразования на поверхности оболочки. Пусть, например, нормальный прогиб оболочки, моделирующей внешнюю стенку УНТ, является двояко-периодической функцией координат:

$$u_{N,3} = A_N \sin m_1 x \sin m_2 \varphi. \quad (13)$$

Тогда в предположении, что между основанием и внешним слоем трубки имеется жесткий контакт, имеем [15]

$$c_{N+1,3} = \frac{2E_a(1-\nu_a)m}{(1+\nu_a)(3-4\nu_a)R_N}, \quad m = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}, \quad (14)$$

где  $E_a, \nu_a$  - модуль Юнга и коэффициент Пуассона внешней упругой изотропной среды.

*Замечание 4.* Область применимости формул (12), (14) ограничена рядом условий [15, 18]: 1) она применима вдали от краев трубки; 2) основание  $H$  (толщина окружающей упругой среды) должно быть достаточно глубоким, так что  $H > R, L$ ; 3) волновое число  $m$  является достаточно большим, так что характерная длина волны  $L_c$  на внешней стенке трубки удовлетворяет сильному неравенству  $L_c \ll R, L$ ; 4) параметры  $m_1$  и  $m_2$  меньше числа атомов в осевом и окружном направлениях, соответственно, на внешней стенке УНТ.

*Пример.* В качестве примера рассмотрим свободные осесимметричные колебания  $N$ -слойной УНТ. Здесь  $\partial/\partial\varphi = 0$ ,  $u_{n,2} = 0$ ,  $u_{0,3} = u_{N+1,3} = 0$ ,  $\hat{c}_{1,3} = 0$ . Изучим интегралы релеевского типа, для которых [15]  $u_{n,3} \gg u_{n,1}, u_{n,2}$ . Тогда силами инерции тангенциальных перемещений можно пренебречь. Считаем также, что тангенциальные составляющие vdW-сил пренебрежимо малы, так что  $\hat{c}_{n,1} = \hat{c}_{n,2} = 0$ , а  $\hat{c}_{n,3}$  постоянны для любого  $n = 1, \dots, N$ . На краях, для простоты, рассмотрим условия шарнирного опирания. Тогда решения уравнений (9) можно записать в виде

$$u_{n,1} = B_n \cos(p_m x) e^{i\hat{\Omega}t}, \quad u_{n,3} = A_n \sin(p_m x) e^{i\hat{\Omega}t}, \quad p_m = \pi m_1 l^{-1}, \quad m_1 = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

где  $\hat{\Omega}$  - искомая безразмерная частота колебаний. Подставляя (15) в (9), приходим к системе  $2N$  однородных алгебраических уравнений

$$\hat{C}_{n,12} A_n + p_m r_n \hat{C}_{n,11} B_n = 0, \quad (1 + \mu \delta_\varepsilon p_m^2) (\hat{c}_{n,3} A_{n-1} - \hat{c}_{n+1,3} A_{n+1}) + \left[ r_n^{-2} \hat{C}_{n,22} + \mu^4 \zeta_n p_m^4 \hat{C}_{n,11} + (1 + \mu \delta_\varepsilon p_m^2) (\hat{c}_{n+1,3} - \hat{c}_{n,3} - \Omega^2 \delta_n) - r_n^{-2} \hat{C}_{n,11}^{-1} \hat{C}_{n,12}^2 \right] A_n = 0 \quad (16)$$

относительно  $A_n, B_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ). Из условия существования нетривиального решения данной системы находится безразмерная частота  $\hat{\Omega}$ . В частности, для одностенной УНТ получаем ( $N=1$ )

$$\hat{\Omega}^2 = \hat{c}_{2,3} + \frac{\hat{C}_{1,22} \hat{C}_{1,11} - \hat{C}_{1,12}^2 + \mu^4 p_m^4 \hat{C}_{1,11}^2}{(1 + \mu \delta_\varepsilon p_m^2) \hat{C}_{1,11}}. \quad (17)$$

Из соотношения (17) видно, что эффект упругой нелокальности становится существенным для форм колебаний, сопровождающихся образованием большого числа волн вдоль оси (при  $m_1 \sim \frac{L}{\pi R} \sqrt{\frac{R}{h}}$ , где  $L$  - длина трубки).

Были выполнены расчеты частоты  $\Omega = \hat{\Omega} \omega_0$  при [3,4]  $E = 1.058 \times 10^{12} \text{ Н/м}^2$ ,  $\nu = 0.27$ ,  $\rho = 1.341 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $h = 0.34 \times 10^{-9} \text{ м}$ ,  $R = 1 \times 10^{-9} \text{ м}$ ,  $a = 0.142 \times 10^{-9} \text{ м}$  как функции длины трубки  $L$ , номера  $m_1$  (числа полувольт в осевом направлении) при различных значениях коэффициента постели  $c_{2,3}$  и параметра упругой нелокальности  $e_0$ . Здесь  $\hat{C}_{1,11} = 1.07863$ ,  $\hat{C}_{1,22} = 1.07863$ ,  $\hat{C}_{1,12} = 0.291231$ . В таблицах 1-3 приведены частоты при  $e_0 = 0$ ,  $e_0 = 0.39$  и  $e_0 = 3.9$ , соответственно, и различных параметрах  $c_{2,3} = 0$ ,  $c_{2,3} = 0,1c^*$ ,  $c_{2,3} = c^*$ , где [3]  $c^* = 619.917 \times 10^{17} \text{ н/м}^3$ . Как видно, увеличение коэффициента постели окружающей упругой среды приводит к увеличению частоты для фиксированной моды.

Таблица 1

Собственные частоты одностенной УНТ, лежащей в упругой среде,  
при  $e_0 = 0$  ( $\delta_\varepsilon = 0$ )

	$m_1$ $L/(2R)$	$\Omega$ ( $\times 10^{13}$ Гц)				
		1	5	10	15	20
$c_{2,3} = 0$	5	2.8089	2.8900	3.9106	6.7356	11.2400
	10	2.8088	2.8139	2.8900	3.1987	3.9106
	20	2.8088	2.8091	2.8139	2.8347	2.890
$c_{2,3} = 0,1c^*$	5	2.8330	2.9134	3.9279	6.7457	11.2460
	10	2.8329	2.838	2.9134	3.2199	3.9279
	20	2.8329	2.8332	2.8380	2.8586	2.9134
$c_{2,3} = c^*$	5	3.0413	3.1164	4.0807	6.8358	11.300
	10	3.0412	3.0460	3.1164	3.4046	4.0807
	20	3.0412	3.0415	3.0460	3.0652	3.1164

Данные в таблице 1 соответствуют макроскопической модели, для которой влияние упругой нелокальности во внимание не принимается ( $e_0 = 0$ ). В данном случае зависимости частот от параметров  $L/R$ ,  $c_{2,3}$  и числа полувольт в осевом направлении  $m_1$  идентичны аналогичным зависимостям для тонких оболочек [15]. Заметим лишь, что слабая зависимость частоты от длины трубки объясняется осесимметричным характером исследуемых форм колебаний.

Таблица 2

Собственные частоты одностенной УНТ, лежащей в упругой среде, при  
 $e_0 = 0,39$  ( $\delta_\varepsilon = 0.0312$ )

	$m_1$ $L/(2R)$	$\Omega$ ( $\times 10^{13}$ Гц)				
		1	5	10	15	20
$c_{2,3} = 0$	5	2.8076	2.8557	3.7343	6.1047	9.5460
	10	2.8085	2.8055	2.8557	3.1152	3.7343
	20	2.8087	2.8070	2.8055	2.8157	2.8557
$c_{2,3} = 0,1c^*$	5	2.8317	2.8794	3.7525	6.1158	9.5531
	10	2.8326	2.8296	2.8794	3.1369	3.7525
	20	2.8328	2.8311	2.8296	2.8397	2.8794
$c_{2,3} = c^*$	5	3.0401	3.0846	3.9122	6.2151	9.6169
	10	3.0409	3.0382	3.0846	3.3263	3.9122
	20	3.0411	3.0396	3.0382	3.0476	3.0846

Таблица 3

Собственные частоты одностенной УНТ, лежащей в упругой среде,  
при  $e_0 = 3.9$  ( $\delta_\varepsilon = 3.1247$ )

	$m_1$ $L/(2R)$	$\Omega$ ( $\times 10^{13}$ Гц)				
		1	5	10	15	20
$c_{2,3} = 0$	5	2.6823	1.5637	1.1976	1.4125	1.7851
	10	2.7755	2.2219	1.5637	1.261	1.1976
	20	2.8004	2.6184	2.2219	1.8458	1.5637
$c_{2,3} = 0,1c^*$	5	2.7076	1.6066	1.2531	1.4598	1.8228
	10	2.7999	2.2523	1.6066	1.3138	1.2531
	20	2.8245	2.6443	2.2523	1.8822	1.6066
$c_{2,3} = c^*$	5	2.9248	1.9506	1.6715	1.8316	2.1322
	10	3.0105	2.5093	1.9506	1.7174	1.6715
	20	3.0334	2.8663	2.5093	2.1832	1.9506

Сравнивая данные, приведенные в таблицах 1-3 при фиксированных значениях  $L/R, c_{2,3}, m_1$ , заключаем, что учет параметра  $e_0$  в законе физического состояния Эрингена приводит к заметному снижению собственной частоты колебаний УНТ. При этом данный эффект усиливается с ростом числа полуволн  $m_1$ . Отметим также нелинейную зависимость частоты от номера  $m_1$ , имеющую место при  $e_0 = 3.9$  (см. таблицу 3).

Выполненный численный анализ указывает на необходимость обязательного учета эффекта упругой нелокальности при исследовании высокочастотных колебаний углеродной нанотрубки.

Данная работа выполнена в рамках задания 2.2.02 ГПНИ «Функциональные и машиностроительные материалы и технологии, наноматериалы и нанотехнологии в современной технике».

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Елецкий, А.В. Механические свойства углеродных наноструктур и материалов на их основе / А.В. Елецкий // Усп. физ. Наук. - 2007. - Т. 177, №3. - С. 233-274.
2. Sudak, L.J. Column buckling of multiwalled carbon nanotubes using nonlocal continuum mechanics / L.J. Sudak // J. Appl. Phys. - 2003, Vol. 94 (11). - P. 7281-7287.
3. Usuki, T. Beam equations for multi-walled carbon nanotubes derived from Flügge shell theory / T. Usuki, K. Yogo // Proc. R. Soc. A. - 2009. - Vol. 465. - P. 1199-1226.
4. Yoon, J. Noncoaxial resonance of an isolated multiwall carbon nanotube / J. Yoon, C.Q. Ru, A. Mioduchowski // Phys. Rev. - B 66. - 2002. - P. 233402.
5. Pantano, A. Nonlinear structural mechanics based modeling of carbon nanotube deformation / A. Pantano, D.M. Parks, M.C. Boyce // Phys. Rev. Lett. - 2004. - Vol. 91. - P. 145504.
6. Михасев, Г.И. Уравнения движения многостенной углеродной нанотрубки, основанные на нелокальной теории ортотропных оболочек / Г.И. Михасев // Доклады НАНБ. - 2011. - Т. 55, № 6. - С. 119-123.
7. Hernandez, E. Elastic properties of C and BxCyNz composite nanotubes / E. Hernandez, C. Goze, P. Bernier, A. Rubio // Phys. Rev. Lett. - 1998. - Vol. 80. - P. 4502-4505.
8. Popov, V.N. Elastic properties of single-walled carbon nanotubes/ V.N. Popov, V.E. Van Doren, M. Balkanski // Phys. Rev. - B61. - 2000. - P. 3078-3084.
9. Zhang, Y.Y. Effect of chirality on buckling behavior of single-walled carbon nanotubes / Y.Y. Zhang, V.B.C. Tan, C.M. Wang // J. Appl. Phys. - 2006. - Vol. 100. - P. 074304.
10. Chang, T. Torsional behavior of chiral single-walled carbon nanotubes is loading direction dependent / T. Chang // Appl. Phys. Lett. - 2007. - Vol. 90. - P. 201910.
11. Chang, T. A molecular based anisotropic shell model for single-walled carbon nanotubes / T. Chang // J. Mech. Phys. Solids. - 2010. - Vol. 58. - P. 1422-1433.
12. Can a single-wall carbon nanotube be modeled as a thin shell? / J. Peng [et al.] // J. Mech. Phys. Solids. - 2008. - Vol. 56. - P. 2213-2224.
13. Continuum modeling of van der Waals interactions between carbon nanotubes / W.B. Lu [et al.] // Appl. Phys. Lett. A. - 2009. - Vol. 94. - P. 101917-1-3.
14. Continuum modeling of van der Waals interactions between carbon onion layers / M. Todt [et al.] // Carbon. - 2011. - Vol. 49. - P. 1620-1627.
15. Михасев, Г.И. Локализованные колебания и волны в тонких оболочках / Г.И. Михасев, П.Е. Товстик // Асимптотические методы. - М.: ФИЗМАТЛИТ. - 2009. - 292 с.