Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРХНЕЙ И НИЖНЕЙ ГРАНИЦ ЭФФЕКТИВНЫХ ЖЕСТКОСТЕЙ ОДНОНАПРАВЛЕННО АРМИРОВАННОГО ГИБРИДНОГО КОМПОЗИТА В РАМКАХ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Янковский А.П.

В рамках несимметричной теории упругости предложены два подхода построения определяющих уравнений однонаправленно армированного гибридного композита, все фазы которого являются изотропными материалами. В качестве критериев эквивалентности волокнистой композиции эквивалентному однородному монотропному фиктивному материалу использованы равенства в них удельной свободной энергии и удельной термодинамической энергии Гиббса, что позволило определить верхнюю и нижнюю границы эффективных жесткостей волокнистого материала. В предельном случае, соответствующем симметричной теории упругости, эти границы совпали, а расчетные значения эффективных жесткостей хорошо согласуются с экспериментом.

Введение. В настоящее время особое внимание уделяется изучению микро- и нанонеоднородных сред. Механическое поведение таких твердых сред может быть описано на основе несимметричной (моментной, микрополярной) теории упругости типа Коссера, поэтому во всем мире значительно активизировались соответствующие исследования [1–5 и др.]. Микронеоднородными являются и волокнистые композиционные материалы, находящие все более широкое применение в инженерной практике.

При изучении напряженно-деформированного состояния (НДС) ориентированно армированных материалов чаще всего их рассматривают как макроскопически однородную среду, состоящую из множества волокон малого диаметра, имеющих равномерное распределение. Поэтому возникает необходимость установления соотношения всех независимых термоупругих характеристик армированных композитов в зависимости от аналогичных характеристик составляющих материалов и от их объемного содержания, обычно выражаемого через плотность (относительное объемное содержание) армирования ψ.

В силу актуальности проблемы определения эффективных термомеханических характеристик волокнистых композитов за последние полвека было предложено множество структурных моделей однонаправленно армированных материалов [6–13 и др.]. Основная особенность всех этих теорий заключается в том, что они базируются на соотношениях и уравнениях симметричной теории упругости. Однако в силу присущей таким материалам микронеоднородности целесообразно развивать соответствующие структурные теории на основе несимметричной теории упругости [14], что и было проделано автором в [15].

В теории гетерогенных сред, помимо всего прочего, важной является проблема определения верхней и нижней границ их эффективных характеристик – «вилки Винера» [16]. В механике композитов «вилка Винера» известна как «вилка Фойгта – Рейса», являющаяся достаточно широкой, поэтому неоднократно предпринимались попытки сузить ее границы – «вилка Хашина – Штрикмана» [17] и др. Подобные «вилки» в рамках несимметричной теории упругости механики композитов до настоящего времени были получены лишь для слоистых композиций [18].

Настоящее исследование посвящено определению верхней и нижней границ эффективных жесткостей однонаправленно армированного гибридного композита в рамках несимметричной теории упругости.

Определение верхней границы эффективных жесткостей волокнистой композиции. Рассмотрим гибридный композит, армированный N семействами изотропных волокон в направлении x_1 прямоугольной декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 с плотностями ψ_k $(1 \le k \le N)$. Относительное объемное содержание изотропного связующего обозначим через ψ_0, тогда имеет место условие нормировки

$$\sum \psi_k = 1 \quad (\psi_k \ge 0, \;\; k = 0, 1, 2, ..., N). \tag{1}$$

Здесь и далее суммирование осуществляется по индексу k от 0 до N, если не указаны пределы.

Для изотропного материала k-й фазы композиции имеем следующие определяющие уравнения для термоупругой среды Коссера [14]

$$\begin{gathered}\sigma_{ii}^{(k)} = 2\mu^{(k)}\gamma_{ii}^{(k)} + \lambda^{(k)}\sum_{l=1}^{3}\gamma_{ll}^{(k)} - \nu^{(k)}T_k, \qquad \sigma_{ij}^{(k)} = \mu_+^{(k)}\gamma_{ij}^{(k)} + \mu_-^{(k)}\gamma_{ji}^{(k)},\\ \mu_{ii}^{(k)} = 2\gamma^{(k)}\kappa_{ii}^{(k)} + \beta^{(k)}\sum_{l=1}^{3}\kappa_{ll}^{(k)}, \qquad \mu_{ij}^{(k)} = \gamma_+^{(k)}\kappa_{ij}^{(k)} + \gamma_-^{(k)}\kappa_{ji}^{(k)}, \qquad i, j = 1, 2, 3, \qquad j \ne i,\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$\begin{gathered}\gamma_{ii}^{(k)} = u_{i,i}^{(k)}, \;\; \kappa_{ji}^{(k)} = \omega_{i,j}^{(k)} \;\; (i, j = 1, 2, 3), \;\; \gamma_{12}^{(k)} = u_{2,1}^{(k)} - \omega_3^{(k)}, \;\; \gamma_{21}^{(k)} = u_{1,2}^{(k)} + \omega_3^{(k)},\\ \gamma_{13}^{(k)} = u_{3,1}^{(k)} + \omega_2^{(k)}, \;\; \gamma_{31}^{(k)} = u_{1,3}^{(k)} - \omega_2^{(k)}, \;\; \gamma_{23}^{(k)} = u_{3,2}^{(k)} - \omega_1^{(k)}, \;\; \gamma_{32}^{(k)} = u_{2,3}^{(k)} + \omega_1^{(k)},\\ \mu_+^{(k)} = \mu^{(k)} + \alpha^{(k)}, \;\; \mu_-^{(k)} = \mu^{(k)} - \alpha^{(k)}, \;\; \gamma_+^{(k)} = \gamma^{(k)} + \varepsilon^{(k)}, \;\; \gamma_-^{(k)} = \gamma^{(k)} - \varepsilon^{(k)},\end{gathered} \tag{3}$$

$\sigma_{ij}^{(k)}$ – компоненты несимметричного ($\sigma_{ij}^{(k)} \ne \sigma_{ji}^{(k)}$) тензора напряжений в материале k-й фазы композиции; $\mu_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензора моментных напряжений в этом же материале; $\gamma_{ij}^{(k)}$ – компоненты несимметричного тензора деформаций; $\kappa_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензора изгиба-кручения; $u_i^{(k)}$, $\omega_i^{(k)}$ – компоненты векторов перемещений и вращений, соответственно, по направлениям x_i; $\mu^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$, $\nu^{(k)}$ – постоянные Ламе и коэффициент температурной жесткости материала k-й фазы; $\alpha^{(k)}$, $\beta^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$, $\gamma^{(k)}$ – дополнительные упругие постоянные материала k-й фазы, соответствующие среде Коссера; T_k – отклонение температуры k-й фазы композиции от температуры естественного состояния (при $k = 0$ – в связующем, при $1 \le k \le N$ – в арматуре k-го семейства); нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по переменной x_i.

Так как установить фактическое распределение НДС в композитной среде, где основной материал (связующее) имеет многочисленные более жесткие включения, весьма затруднительно [19], то при нахождении практически пригодных зависимостей для определения всех независимых термоупругих постоянных однонаправленно армированного материала необходимо сделать некоторые допущения в виде исходных предпосылок.

1. Волокна всех семейств строго параллельны и пересекают ортогональные им плоскости достаточно хаотично (что, как правило, и имеет место на практике), поэтому однонаправленно армированный материал представляет собой сплошное макроскопически квазиоднородное монотропное (трансверсально-изотропное) тело, плоскость изотропии которого (x_2, x_3) ортогональна направлению армирования x_1. (При достаточно густом равномерном насыщении связующего арматурными стержнями или волокнами это предположение вполне допустимо. К этому выводу прихо-

дят все исследователи, изучающие механические свойства дисперсно-армированных сред [19].)

2. На границах между связующим и арматурой реализуется идеальный термомеханический контакт (непрерывность полей температур, перемещений и векторов вращений, нормальных и касательных составляющих напряжений и моментных напряжений).

3. В пределах представительного элемента, выделенного из композита на миниуровне, компоненты тензоров деформации, изгиба-кручения, напряжений, моментных напряжений и температуры во всех фазах и в композиции кусочно-постоянны. Эффектами высших порядков, связанными с изменением полей деформаций, напряжений, температур и т. п. на микроуровне в малых окрестностях границ контакта связующего и волокон, пренебрегаем.

4. Осредненные поля деформаций, тензора изгиба-кручения и температуры в композиции определяются по правилу простой смеси – пропорционально относительному объемному содержанию ψ_k каждого составляющего.

5. Все фазовые материалы линейно-упруги, изотропны и однородны; определяющие соотношения для них задаются равенствами (2), (3).

6. В качестве условия эквивалентности выступает равенство удельной свободной энергии эквивалентного однородного монотропного фиктивного материала удельной свободной энергии волокнистого композита.

В силу допущений 1, 5 справедливыми являются матричные соотношения

$$\sigma = A(\gamma - \alpha T) = \partial F / \partial\gamma, \quad \mu = B\kappa = \partial F / \partial\kappa, \quad s = -\partial F / \partial T; \tag{4}$$

$$\sigma_k = A_k(\gamma_k - \alpha_k T_k) = \partial F_k / \partial\gamma_k, \quad \mu_k = B_k\kappa_k = \partial F_k / \partial\kappa_k, \quad s_k = -\partial F_k / \partial T_k, \quad 0 \le k \le N, \tag{5}$$

где T – отклонение средней температуры композиции от температуры естественного состояния; F, F_k – удельные свободные энергии композиции и ее k-й фазы (инварианты), имеющие выражения [14]

$$\begin{aligned} &F = \gamma^* A\gamma / 2 - \gamma^* A\alpha T + \kappa^* B\kappa / 2 - mT^2 / 2, \\ &F_k = \gamma_k^* A_k \gamma_k / 2 - \gamma_k^* A_k \alpha_k T_k + \kappa_k^* B_k \kappa_k / 2 - m_k T_k^2 / 2, \quad 0 \le k \le N; \end{aligned} \tag{6}$$

$\sigma, \mu, \gamma, \kappa, \alpha$ – девятикомпонентные векторы-столбцы напряжений и моментных напряжений, деформаций, изгиба-кручения и коэффициентов линейного теплового расширения композиции, имеющие компоненты

$$\begin{aligned} &\sigma^* = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, \sigma_{31}, \sigma_{13}\}, \\ &\mu^* = \{\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{23}, \mu_{32}, \mu_{31}, \mu_{13}\}, \\ &\gamma^* = \{\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{23}, \gamma_{32}, \gamma_{31}, \gamma_{13}\}, \\ &\kappa^* = \{\kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{33}, \kappa_{12}, \kappa_{21}, \kappa_{23}, \kappa_{32}, \kappa_{31}, \kappa_{13}\}, \\ &\alpha^* = \{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{23}, \alpha_{32}, \alpha_{31}, \alpha_{13}\}; \end{aligned} \tag{7}$$

A, B – 9×9 симметричные матрица жесткости и моментной жесткости, компоненты A_{ij}, B_{ij} которых подлежат определению; s, m – удельная энтропия композиции и коэффициент, ее характеризующий (подлежит определению); $\sigma_k, \mu_k, \gamma_k, \kappa_k, \alpha_k, A_k, B_k, s_k, m_k$ – то же для материала k-й фазы композиции; звездочка означает операцию транспонирования. Векторы-столбцы $\sigma_k, \mu_k, \gamma_k, \kappa_k, \alpha_k$ имеют структуру, аналогичную (7) с учетом обозначений, принятых в (2), (3); компоненты $A_{ij}^{(k)}$, $B_{ij}^{(k)}$ $(i, j = \overline{1, 9})$ симметричных матриц A_k, B_k и девятикомпонентных векторов-столбцов α_k известны и определяются равенствами (2); постоянные m_k также предполагаются известными.

Согласно допущениям 3, 6, имеем

$$F = \sum \psi_k F_k. \tag{8}$$

В силу допущений 2, 3 и условий сопряжения полей напряжений, моментных напряжений, перемещений, вращений и температур на границах контакта волокон со связующим получим

$$T_0 = T_k, \quad 1 \le k \le N; \tag{9}$$

$$\gamma_{1i}^{(k)} = \gamma_{1i}^{(0)}, \ \kappa_{1i}^{(k)} = \kappa_{1i}^{(0)} \ \text{(так как } u_i^{(k)} = u_i^{(0)}, \ \omega_i^{(k)} = \omega_i^{(0)}\text{)}, \ i = 1, 2, 3; \tag{10}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{ii}^{(k)} = \sigma_{ii}^{(0)}, \ \sigma_{i1}^{(k)} = \sigma_{i1}^{(0)}, \ \mu_{ii}^{(k)} = \mu_{ii}^{(0)}, \ \mu_{i1}^{(k)} = \mu_{i1}^{(0)} \quad (i = 2, 3), \\ \sigma_{32}^{(k)} = \sigma_{32}^{(0)}, \ \sigma_{23}^{(k)} = \sigma_{23}^{(0)}, \ \mu_{32}^{(k)} = \mu_{32}^{(0)}, \ \mu_{23}^{(k)} = \mu_{23}^{(0)}, \quad 1 \le k \le N. \end{gathered} \tag{11}$$

Согласно допущению 4, осредненные поля тензоров деформаций, изгиба-кручения и температуры в композиции определяются так:

$$\gamma_{ij} = \sum \psi_k \gamma_{ij}^{(k)}, \quad \kappa_{ij} = \sum \psi_k \kappa_{ij}^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, 3; \tag{12}$$

$$T = \sum \psi_k T_k. \tag{13}$$

Из равенства (13) с учетом (9), (1) следует

$$T = T_k, \quad 0 \le k \le N, \tag{14}$$

т.е. средняя температура композиции в пределах представительного элемента равна температуре каждого фазового материала. Из равенств (12) с учетом (10), (1) вытекает

$$\gamma_{1i} = \gamma_{1i}^{(k)}, \quad \kappa_{1i} = \kappa_{1i}^{(k)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad 0 \le k \le N. \tag{15}$$

Из соотношения (8) с учетом (6), (14) имеем

$$\begin{gathered} \gamma^* A\gamma / 2 - \gamma^* A\alpha T + \kappa^* B\kappa / 2 - mT^2 / 2 = \\ = \sum \psi_k \left(\gamma_k^* A_k \gamma_k / 2 - \gamma_k^* A_k \alpha_k T + \kappa_k^* B_k \kappa_k / 2 - m_k T^2 / 2 \right). \end{gathered} \tag{16}$$

Выразим в (16) деформации γ_k и κ_k через γ и κ соответственно. Связи между некоторыми компонентами векторов-столбцов γ_k, κ_k и γ, κ уже известны из (15), дополнительные соотношения получим из (11) с учетом (2), (14):

$$\left(2\mu^{(k)} + \lambda^{(k)}\right)\gamma_{ii}^{(k)} + \lambda^{(k)}\left(\gamma_{11}^{(k)} + \gamma_{jj}^{(k)}\right) - \nu^{(k)}T = \left(2\mu^{(0)} + \lambda^{(0)}\right)\gamma_{ii}^{(0)} + \lambda^{(0)}\left(\gamma_{11}^{(0)} + \gamma_{jj}^{(0)}\right) - \nu^{(0)}T,$$

$$\mu_+^{(k)}\gamma_{i1}^{(k)} + \mu_-^{(k)}\gamma_{1i}^{(k)} = \mu_+^{(0)}\gamma_{i1}^{(0)} + \mu_-^{(0)}\gamma_{1i}^{(0)}, \qquad \mu_+^{(k)}\gamma_{ij}^{(k)} + \mu_-^{(k)}\gamma_{ji}^{(k)} = \mu_+^{(0)}\gamma_{ij}^{(0)} + \mu_-^{(0)}\gamma_{ji}^{(0)},$$

$$\gamma_+^{(k)}\kappa_{ij}^{(k)} + \gamma_-^{(k)}\kappa_{ji}^{(k)} = \gamma_+^{(0)}\kappa_{ij}^{(0)} + \gamma_-^{(0)}\kappa_{ji}^{(0)}, \qquad \gamma_+^{(k)}\kappa_{i1}^{(k)} + \gamma_-^{(k)}\kappa_{1i}^{(k)} = \gamma_+^{(0)}\kappa_{i1}^{(0)} + \gamma_-^{(0)}\kappa_{1i}^{(0)},$$

$$\left(2\gamma^{(k)} + \beta^{(k)}\right)\kappa_{ii}^{(k)} + \beta^{(k)}\left(\kappa_{11}^{(k)} + \kappa_{jj}^{(k)}\right) = \left(2\gamma^{(0)} + \beta^{(0)}\right)\kappa_{ii}^{(0)} + \beta^{(0)}\left(\kappa_{11}^{(0)} + \kappa_{jj}^{(0)}\right), \quad j = 5 - i,$$

$$i = 2, 3, \quad 0 \le k \le N,$$

отсюда с учетом (10) следует

$$\gamma_{22}^{(k)}+\gamma_{33}^{(k)}=\frac{\mu^{(0)}+\lambda^{(0)}}{\mu^{(k)}+\lambda^{(k)}}\left(\gamma_{22}^{(0)}+\gamma_{33}^{(0)}\right)+\frac{\lambda^{(0)}-\lambda^{(k)}}{\mu^{(k)}+\lambda^{(k)}}\gamma_{11}^{(0)}-\frac{\nu^{(0)}-\nu^{(k)}}{\mu^{(k)}+\lambda^{(k)}}T,\quad \gamma_{22}^{(k)}-\gamma_{33}^{(k)}=\frac{\mu^{(0)}}{\mu^{(k)}}\times$$

$$\times\left(\gamma_{22}^{(0)}-\gamma_{33}^{(0)}\right),\quad \kappa_{22}^{(k)}-\kappa_{33}^{(k)}=\frac{\gamma^{(0)}}{\gamma^{(k)}}\left(\kappa_{22}^{(0)}-\kappa_{33}^{(0)}\right),\quad \kappa_{22}^{(k)}+\kappa_{33}^{(k)}=\frac{\gamma^{(0)}+\beta^{(0)}}{\gamma^{(k)}+\beta^{(k)}}\left(\kappa_{22}^{(0)}+\kappa_{33}^{(0)}\right)+$$

$$+\frac{\beta^{(0)}-\beta^{(k)}}{\gamma^{(k)}+\beta^{(k)}}\kappa_{11}^{(0)},\qquad \gamma_{ij}^{(k)}=\frac{1}{\Delta_{\mu}^{(k)}}\left[\mu_{+}^{(k)}\left(\mu_{+}^{(0)}\gamma_{ij}^{(0)}+\mu_{-}^{(0)}\gamma_{ji}^{(0)}\right)-\mu_{-}^{(k)}\left(\mu_{+}^{(0)}\gamma_{ji}^{(0)}+\mu_{-}^{(0)}\gamma_{ij}^{(0)}\right)\right],\qquad (17)$$

$$\gamma_{i1}^{(k)}=\frac{1}{\mu_{+}^{(k)}}\left[\mu_{+}^{(0)}\gamma_{i1}^{(0)}+\left(\mu_{-}^{(0)}-\mu_{-}^{(k)}\right)\gamma_{1i}^{(0)}\right],\qquad \kappa_{i1}^{(k)}=\frac{1}{\gamma_{+}^{(k)}}\left[\gamma_{+}^{(0)}\kappa_{i1}^{(0)}+\left(\gamma_{-}^{(0)}-\gamma_{-}^{(k)}\right)\kappa_{1i}^{(0)}\right],$$

$$\kappa_{ij}^{(k)}=\frac{1}{\Delta_{\gamma}^{(k)}}\left[\gamma_{+}^{(k)}\left(\gamma_{+}^{(0)}\kappa_{ij}^{(0)}+\gamma_{-}^{(0)}\kappa_{ji}^{(0)}\right)-\gamma_{-}^{(k)}\left(\gamma_{+}^{(0)}\kappa_{ji}^{(0)}+\gamma_{-}^{(0)}\kappa_{ij}^{(0)}\right)\right],$$

$$\Delta_{\mu}^{(k)}=\mu_{+}^{(k)}\mu_{+}^{(k)}-\mu_{-}^{(k)}\mu_{-}^{(k)},\quad \Delta_{\gamma}^{(k)}=\gamma_{+}^{(k)}\gamma_{+}^{(k)}-\gamma_{-}^{(k)}\gamma_{-}^{(k)},\quad j=5-i,\quad i=2,3,\quad 0\le k\le N.$$

Согласно допущению 4 (см. (12)), с учетом (17) получим

$$\gamma_{22}+\gamma_{33}=\sum\psi_k\frac{\mu^{(0)}+\lambda^{(0)}}{\mu^{(k)}+\lambda^{(k)}}\left(\gamma_{22}^{(0)}+\gamma_{33}^{(0)}\right)+\sum\psi_k\frac{\lambda^{(0)}-\lambda^{(k)}}{\mu^{(k)}+\lambda^{(k)}}\gamma_{11}^{(0)}-\sum\psi_k\frac{\nu^{(0)}-\nu^{(k)}}{\mu^{(k)}+\lambda^{(k)}}T,$$

$$\gamma_{22}-\gamma_{33}=\sum\psi_k\frac{\mu^{(0)}}{\mu^{(k)}}\left(\gamma_{22}^{(0)}-\gamma_{33}^{(0)}\right),\quad \kappa_{22}-\kappa_{33}=\sum\psi_k\frac{\gamma^{(0)}}{\gamma^{(k)}}\left(\kappa_{22}^{(0)}-\kappa_{33}^{(0)}\right),\quad \kappa_{22}+\kappa_{33}=$$

$$=\sum\psi_k\frac{\gamma^{(0)}+\beta^{(0)}}{\gamma^{(k)}+\beta^{(k)}}\left(\kappa_{22}^{(0)}+\kappa_{33}^{(0)}\right)+\sum\psi_k\frac{\beta^{(0)}-\beta^{(k)}}{\gamma^{(k)}+\beta^{(k)}}\kappa_{11}^{(0)},\qquad \gamma_{ij}=\sum\psi_k\frac{\mu_{+}^{(k)}}{\Delta_{\mu}^{(k)}}\times$$

$$\times\left(\mu_{+}^{(0)}\gamma_{ij}^{(0)}+\mu_{-}^{(0)}\gamma_{ji}^{(0)}\right)-\sum\psi_k\frac{\mu_{-}^{(k)}}{\Delta_{\mu}^{(k)}}\left(\mu_{+}^{(0)}\gamma_{ji}^{(0)}+\mu_{-}^{(0)}\gamma_{ij}^{(0)}\right),\quad \gamma_{i1}=\sum\psi_k\frac{\mu_{+}^{(0)}}{\mu_{+}^{(k)}}\gamma_{i1}^{(0)}+$$

$$+\sum\psi_k\frac{\mu_{-}^{(0)}-\mu_{-}^{(k)}}{\mu_{+}^{(k)}}\gamma_{1i}^{(0)},\quad \kappa_{i1}=\sum\psi_k\frac{\gamma_{+}^{(0)}}{\gamma_{+}^{(k)}}\kappa_{i1}^{(0)}+\sum\psi_k\frac{\gamma_{-}^{(0)}-\gamma_{-}^{(k)}}{\gamma_{+}^{(k)}}\kappa_{1i}^{(0)},\quad \kappa_{ij}=\sum\psi_k\frac{\gamma_{+}^{(k)}}{\Delta_{\gamma}^{(k)}}\times$$

$$\times\left(\gamma_{+}^{(0)}\kappa_{ij}^{(0)}+\gamma_{-}^{(0)}\kappa_{ji}^{(0)}\right)-\sum\psi_k\frac{\gamma_{-}^{(k)}}{\Delta_{\gamma}^{(k)}}\left(\gamma_{+}^{(0)}\kappa_{ji}^{(0)}+\gamma_{-}^{(0)}\kappa_{ij}^{(0)}\right),\quad j=5-i,\quad i=2,3.$$

$$(18)$$

Равенства (10), (17) и (15), (18) можно записать в виде следующих матричных соотношений

$$H\gamma_k=H_k\gamma_0-\mathbf{Z}_kT,\quad H\kappa_k=P_k\kappa_0,\quad 0\le k\le N\quad (H_0=P_0=H,\quad \mathbf{Z}_0=\mathbf{0});\qquad (19)$$

$$H\gamma=Q_0\gamma_0-\mathbf{W}_0T,\quad H\kappa=Y_0\kappa_0,\qquad (20)$$

где

$$Q_0=\sum\psi_kH_k,\quad Y_0=\sum\psi_kP_k,\quad \mathbf{W}_0=\sum\psi_k\mathbf{Z}_k;\qquad (21)$$

H – 9×9 матрица, компоненты которой определяются коэффициентами в левых частях равенств (10), (17) (или (15), (18), что приводит к тому же результату); H_k, P_k – 9×9 матрицы, компоненты которых определяются коэффициентами в правых частях соотношений (10), (17); Q_0, Y_0 – 9×9 матрицы, компоненты которых определяются коэффициентами в правых частях равенств (15) (при $k=0$), (18); $\mathbf{Z}_k$, $\mathbf{W}_0$ – девятикомпонентные векторы-столбцы, элементы которых определяются коэффициентами при T в правых частях соотношений (10), (17) и (15), (18) соответственно.

В силу соотношений (10), (17), (15), (18), (21) $\det H \neq 0$, $\det Q_0 \neq 0$, $\det Y_0 \neq 0$, поэтому из (19), (20) можно однозначно определить

$$\gamma_k = H^{-1}H_k\gamma_0 - H^{-1}\mathbf{Z}_kT, \quad \boldsymbol{\kappa}_k = H^{-1}P_k\boldsymbol{\kappa}_0 \quad (1 \leq k \leq N); \tag{22}$$

$$\gamma_0 = Q_0^{-1}H\gamma + Q_0^{-1}\mathbf{W}_0T, \quad \boldsymbol{\kappa}_0 = Y_0^{-1}H\boldsymbol{\kappa}, \tag{23}$$

где H^{-1}, Q_0^{-1}, Y_0^{-1} – 9×9 матрицы, обратные матрицам H, Q_0, Y_0.

Подставим (23) в равенства (22), тогда получающийся результат и соотношения (23) можно записать в единообразной форме:

$$\gamma_k = C_k\gamma + \mathbf{D}_kT, \quad \boldsymbol{\kappa}_k = E_k\boldsymbol{\kappa}, \quad 0 \leq k \leq N, \tag{24}$$

где, согласно (22), (23):

$$\begin{gathered} C_0 \equiv Q_0^{-1}H, \;\; C_k \equiv H^{-1}H_kQ_0^{-1}H, \;\; E_0 \equiv Y_0^{-1}H, \;\; E_k \equiv H^{-1}P_kY_0^{-1}H, \\ \mathbf{D}_0 \equiv Q_0^{-1}\mathbf{W}_0, \;\; \mathbf{D}_k \equiv H^{-1}H_kQ_0^{-1}\mathbf{W}_0 - H^{-1}\mathbf{Z}_k \quad (1 \leq k \leq N); \end{gathered} \tag{25}$$

C_0, C_k, E_0, E_k – 9×9 известные матрицы, $\mathbf{D}_0$, $\mathbf{D}_k$ – известные девятикомпонентные векторы-столбцы, компоненты которых зависят от механических характеристик фазовых материалов и плотностей армирования.

Подставим (24) в уравнение (16) и приведем подобные слагаемые, тогда окончательно получим

$$\gamma^*A\gamma/2 - \gamma^*A\alpha T + \boldsymbol{\kappa}^*B\boldsymbol{\kappa}/2 - mT^2/2 = \gamma^*\left(\sum\psi_kC_k^*A_kC_k\right)\gamma/2 -$$

$$-\gamma^*\left[\sum\psi_kC_k^*A_k\left(\alpha_k - \mathbf{D}_k\right)\right]T + \boldsymbol{\kappa}^*\left(\sum\psi_kE_k^*B_kE_k\right)\boldsymbol{\kappa}/2 - \sum\psi_k\left[m_k + \mathbf{D}_k^*A_k\left(2\alpha_k - \mathbf{D}_k\right)\right]T^2/2.$$

Так как это равенство должно выполняться при любых γ, $\boldsymbol{\kappa}$, T, то из него вытекают матричные соотношения

$$\begin{gathered} A = \sum\psi_kC_k^*A_kC_k, \quad B = \sum\psi_kE_k^*B_kE_k, \quad A\alpha = \sum\psi_kC_k^*A_k\left(\alpha_k - \mathbf{D}_k\right), \\ m = \sum\psi_k\left[m_k + \mathbf{D}_k^*A_k\left(2\alpha_k - \mathbf{D}_k\right)\right], \end{gathered} \tag{26}$$

где нужно учесть выражения для матриц C_k, E_k и векторов $\mathbf{D}_k$ (см. (24)). Из третьего равенства (26) следует

$$\alpha = A^{-1}\sum\psi_kC_k^*A_k\left(\alpha_k - \mathbf{D}_k\right). \tag{27}$$

Таким образом, соотношения (26), (27) определяют в матричной форме все эффективные термомеханические характеристики волокнистого композита в рамках несимметричной теории упругости.

Выше эффективные характеристики волокнистого композита были определены на основе использования кинематических равенств (12) (см. допущение 4), связывающих между собой компоненты осредненных тензоров деформации и изгиба-кручения композиции с компонентами аналогичных тензоров в фазовых материалах. При этом никаких допущений о связи средних напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и моментных напряжений $\boldsymbol{\mu}$ в композите с напряжениями σ_k и μ_k в фазовых материалах не делалось. Известно, что такой подход с применением энергетического критерия эквивалентности (допущение 6) дает верхнюю оценку расчетных значений эффективных жесткостей композита [17].

Определение нижней границы эффективных жесткостей волокнистой композиции. Вычислить эффективные характеристики волокнистого композита можно иначе, а именно, введя соответствующую гипотезу, позволяющую связать $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\mu}$ с σ_k, μ_k соответственно, и не делая никаких допущений о связи γ, $\boldsymbol{\kappa}$ с γ_k, $\boldsymbol{\kappa}_k$ ($0 \leq k \leq N$). Такой подход с применением энергетического критерия эквивалентности дает нижнюю оценку расчетных значений эффективных жесткостей композиции

[17]. Знание же верхней и нижней оценок позволяет оценить точность определения расчетных характеристик композиции.

В связи с этим далее настоящее исследование посвятим вычислению расчетных значений эффективных термомеханических характеристик однонаправленно армированного гибридного композита, соответствующих их нижней оценке. При этом допущения 1–3 и 5 остаются без изменений, а вместо гипотез 4, 6 соответственно примем следующие.

4'. Осредненные поля напряжений, моментных напряжений и температуры в композиции определяются по правилу простой смеси – пропорционально объемному содержанию ψ_k каждого составляющего.

6'. В качестве условия эквивалентности выступает равенство удельной термодинамической энергии Гиббса эквивалентного однородного монотропного фиктивного материала удельной термодинамической энергии Гиббса волокнистого композита.

В силу допущений 1, 5 для эквивалентной композитной среды и фаз композиции имеем матричные соотношения [14]

$$\gamma = A^{-1}\sigma + \alpha T = -\partial G/\partial\sigma, \quad \kappa = B^{-1}\mu = -\partial G/\partial\mu, \quad s = -\partial G/\partial T; \tag{28}$$

$$\gamma_k = A_k^{-1}\sigma_k + \alpha_k T_k = -\partial G_k/\partial\sigma_k,\ \kappa_k = B_k^{-1}\mu_k = -\partial G_k/\partial\mu_k,\ s_k = -\partial G_k/\partial T_k,\ 0 \le k \le N, \tag{29}$$

где A^{-1}, B^{-1}, A_k^{-1}, B_k^{-1} – 9×9 матрицы, обратные A, B, A_k, B_k (см. (4), (5)); G, G_k – удельные термодинамические энергии Гиббса эквивалентного материала и k-й фазы композиции (инварианты), имеющие выражения [14]

$$G = F - \sigma^*\gamma - \mu^*\kappa, \quad G_k = F_k - \sigma_k^*\gamma_k - \mu_k^*\kappa_k \quad (0 \le k \le N); \tag{30}$$

остальные функции и величины имеют прежний смысл.

Согласно допущений 3, 6', имеем

$$G = \sum \psi_k G_k. \tag{31}$$

В силу допущений 2, 3 остаются справедливыми соотношения (9)–(11). Используя гипотезу 4', получим равенства (13), (14), а также соотношения

$$\sigma_{ij} = \sum \psi_k \sigma_{ij}^{(k)}, \quad \mu_{ij} = \sum \psi_k \mu_{ij}^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{32}$$

Из равенств (32) с учетом (1), (11) следует

$$\begin{aligned} &\sigma_{ii}^{(k)} = \sigma_{ii},\ \sigma_{i1}^{(k)} = \sigma_{i1},\ \mu_{ii}^{(k)} = \mu_{ii},\ \mu_{i1}^{(k)} = \mu_{i1} \quad (i = 2, 3),\\ &\sigma_{32}^{(k)} = \sigma_{32},\ \sigma_{23}^{(k)} = \sigma_{23},\ \mu_{32}^{(k)} = \mu_{32},\ \mu_{23}^{(k)} = \mu_{23}, \quad 0 \le k \le N. \end{aligned} \tag{33}$$

Из соотношения (31) с учетом (30), (6), (14) получим

$$\begin{aligned} &\gamma^* A\gamma/2 - \gamma^* A\alpha T + \kappa^* B\kappa/2 - mT^2/2 - \sigma^*\gamma - \mu^*\kappa = \\ &= \sum \psi_k \left(\gamma_k^* A_k\gamma_k/2 - \gamma_k^* A_k\alpha_k T + \kappa_k^* B_k\kappa_k/2 - m_k T^2/2 - \sigma_k^*\gamma_k - \mu_k^*\kappa_k\right). \end{aligned} \tag{34}$$

Подставим в (34) выражения для γ, κ, γ_k, κ_k из (28), (29) и учтем симметрию матриц A^{-1}, A_k^{-1}, B^{-1}, B_k^{-1}, тогда после элементарных матричных преобразований получим

$$\begin{aligned} &\sigma^* A^{-1}\sigma/2 + \sigma^*\alpha T + \mu^* B^{-1}\mu/2 + \left(\alpha^* A\alpha + m\right)T^2/2 = \\ &= \sum \psi_k \left[\sigma_k^* A_k^{-1}\sigma_k/2 + \sigma_k^*\alpha_k T + \mu_k^* B_k^{-1}\mu_k/2 + \left(\alpha_k^* A_k\alpha_k + m_k\right)T^2/2\right]. \end{aligned} \tag{35}$$

Выразим в (35) напряжения σ_k, μ_k через σ, μ соответственно. Связи между некоторыми компонентами векторов-столбцов σ_k, μ_k и σ, μ уже известны из (33), дополнительные равенства получим из (10) с учетом соотношений, обратных (2):

$$\gamma_{ii}^{(k)}=2\bar{\mu}^{(k)}\sigma_{ii}^{(k)}+\bar{\lambda}^{(k)}\sum_{l=1}^{3}\sigma_{ll}^{(k)}+\bar{\alpha}^{(k)}T_k,\qquad \gamma_{ij}^{(k)}=\bar{\mu}_{+}^{(k)}\sigma_{ij}^{(k)}+\bar{\mu}_{-}^{(k)}\sigma_{ji}^{(k)},$$

$$\kappa_{ii}^{(k)}=2\bar{\gamma}^{(k)}\mu_{ii}^{(k)}+\bar{\beta}^{(k)}\sum_{l=1}^{3}\mu_{ll}^{(k)},\qquad \kappa_{ij}^{(k)}=\bar{\gamma}_{+}^{(k)}\mu_{ij}^{(k)}+\bar{\gamma}_{-}^{(k)}\mu_{ji}^{(k)},\qquad j\neq i,\qquad i,\,j=1,\,2,\,3, \tag{36}$$

где $\bar{\mu}^{(k)}$, $\bar{\lambda}^{(k)}$, $\bar{\gamma}^{(k)}$, $\bar{\beta}^{(k)}$, $\bar{\mu}_{\pm}^{(k)}$, $\bar{\gamma}_{\pm}^{(k)}$, $\bar{\alpha}^{(k)}$ – известные характеристики материала k-й фазы композиции, определяющие компоненты матриц A_k^{-1}, B_k^{-1} и вектора-столбца α_k ($\bar{\alpha}^{(k)}$ – коэффициенты линейного теплового расширения изотропного материала k-й фазы композиции).

Подставим (36) в равенства (10), тогда с учетом (33), (14) получим

$$\left(2\bar{\mu}^{(k)}+\bar{\lambda}^{(k)}\right)\sigma_{11}^{(k)}+\bar{\lambda}^{(k)}\left(\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)+\bar{\alpha}^{(k)}T=\left(2\bar{\mu}^{(0)}+\bar{\lambda}^{(0)}\right)\sigma_{11}^{(0)}+\bar{\lambda}^{(0)}\left(\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)+\bar{\alpha}^{(0)}T,$$

$$\left(2\bar{\gamma}^{(k)}+\bar{\beta}^{(k)}\right)\mu_{11}^{(k)}+\bar{\beta}^{(k)}\left(\mu_{22}+\mu_{33}\right)=\left(2\bar{\gamma}^{(0)}+\bar{\beta}^{(0)}\right)\mu_{11}^{(0)}+\bar{\beta}^{(0)}\left(\mu_{22}+\mu_{33}\right),$$

$$\bar{\mu}_{+}^{(k)}\sigma_{1i}^{(k)}+\bar{\mu}_{-}^{(k)}\sigma_{i1}=\bar{\mu}_{+}^{(0)}\sigma_{1i}^{(0)}+\bar{\mu}_{-}^{(0)}\sigma_{i1},\qquad \bar{\gamma}_{+}^{(k)}\mu_{1i}^{(k)}+\bar{\gamma}_{-}^{(k)}\mu_{i1}=\bar{\gamma}_{+}^{(0)}\mu_{1i}^{(0)}+\bar{\gamma}_{-}^{(0)}\mu_{i1},\qquad i=2,\,3,$$

отсюда

$$\sigma_{11}^{(k)}=\left(2\bar{\mu}^{(k)}+\bar{\lambda}^{(k)}\right)^{-1}\left[\left(2\bar{\mu}^{(0)}+\bar{\lambda}^{(0)}\right)\sigma_{11}^{(0)}+\left(\bar{\lambda}^{(0)}-\bar{\lambda}^{(k)}\right)\left(\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)+\left(\bar{\alpha}^{(0)}-\bar{\alpha}^{(k)}\right)T\right],$$

$$\sigma_{1i}^{(k)}=\frac{1}{\bar{\mu}_{+}^{(k)}}\left[\bar{\mu}_{+}^{(0)}\sigma_{1i}^{(0)}+\left(\bar{\mu}_{-}^{(0)}-\bar{\mu}_{-}^{(k)}\right)\sigma_{i1}\right],\qquad \mu_{1i}^{(k)}=\frac{1}{\bar{\gamma}_{+}^{(k)}}\left[\bar{\gamma}_{+}^{(0)}\mu_{1i}^{(0)}+\left(\bar{\gamma}_{-}^{(0)}-\bar{\gamma}_{-}^{(k)}\right)\mu_{i1}\right], \tag{37}$$

$$\mu_{11}^{(k)}=\left(2\bar{\gamma}^{(k)}+\bar{\beta}^{(k)}\right)^{-1}\left[\left(2\bar{\gamma}^{(0)}+\bar{\beta}^{(0)}\right)\mu_{11}^{(0)}+\left(\bar{\beta}^{(0)}-\bar{\beta}^{(k)}\right)\left(\mu_{22}+\mu_{33}\right)\right],\ i=2,\,3,\ 0\le k\le N.$$

Из равенств (32) с учетом (37) следует

$$\sigma_{11}=\sum\psi_k\frac{2\bar{\mu}^{(0)}+\bar{\lambda}^{(0)}}{2\bar{\mu}^{(k)}+\bar{\lambda}^{(k)}}\sigma_{11}^{(0)}+\sum\psi_k\frac{\bar{\lambda}^{(0)}-\bar{\lambda}^{(k)}}{2\bar{\mu}^{(k)}+\bar{\lambda}^{(k)}}\left(\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)+\sum\psi_k\frac{\bar{\alpha}^{(0)}-\bar{\alpha}^{(k)}}{2\bar{\mu}^{(k)}+\bar{\lambda}^{(k)}}T,$$

$$\sigma_{1i}=\sum\psi_k\frac{\bar{\mu}_{+}^{(0)}}{\bar{\mu}_{+}^{(k)}}\sigma_{1i}^{(0)}+\sum\psi_k\frac{\bar{\mu}_{-}^{(0)}-\bar{\mu}_{-}^{(k)}}{\bar{\mu}_{+}^{(k)}}\sigma_{i1},\qquad \mu_{11}=\sum\psi_k\frac{2\bar{\gamma}^{(0)}+\bar{\beta}^{(0)}}{2\bar{\gamma}^{(k)}+\bar{\beta}^{(k)}}\mu_{11}^{(0)}+$$

$$+\sum\psi_k\frac{\bar{\beta}^{(0)}-\bar{\beta}^{(k)}}{2\bar{\gamma}^{(k)}+\bar{\beta}^{(k)}}\left(\mu_{22}+\mu_{33}\right),\qquad \mu_{1i}=\sum\psi_k\frac{\bar{\gamma}_{+}^{(0)}}{\bar{\gamma}_{+}^{(k)}}\mu_{1i}^{(0)}+\sum\psi_k\frac{\bar{\gamma}_{-}^{(0)}-\bar{\gamma}_{-}^{(k)}}{\bar{\gamma}_{+}^{(k)}}\mu_{i1},\qquad i=2,\,3,$$

отсюда

$$\sigma_{11}^{(0)}=\left(\sum\psi_k\frac{2\bar{\mu}^{(0)}+\bar{\lambda}^{(0)}}{2\bar{\mu}^{(k)}+\bar{\lambda}^{(k)}}\right)^{-1}\left[\sigma_{11}-\sum\psi_k\frac{\bar{\lambda}^{(0)}-\bar{\lambda}^{(k)}}{2\bar{\mu}^{(k)}+\bar{\lambda}^{(k)}}\left(\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)-\right.$$

$$\left.-\sum\psi_k\frac{\bar{\alpha}^{(0)}-\bar{\alpha}^{(k)}}{2\bar{\mu}^{(k)}+\bar{\lambda}^{(k)}}T\right],\qquad \sigma_{1i}^{(0)}=\left(\sum\psi_k\frac{\bar{\mu}_{+}^{(0)}}{\bar{\mu}_{+}^{(k)}}\right)^{-1}\left[\sigma_{1i}-\sum\psi_k\frac{\bar{\mu}_{-}^{(0)}-\bar{\mu}_{-}^{(k)}}{\bar{\mu}_{+}^{(k)}}\sigma_{i1}\right], \tag{38}$$

$$\mu_{11}^{(0)}=\left(\sum\psi_k\frac{2\bar{\gamma}^{(0)}+\bar{\beta}^{(0)}}{2\bar{\gamma}^{(k)}+\bar{\beta}^{(k)}}\right)^{-1}\left[\mu_{11}-\sum\psi_k\frac{\bar{\beta}^{(0)}-\bar{\beta}^{(k)}}{2\bar{\gamma}^{(k)}+\bar{\beta}^{(k)}}\left(\mu_{22}+\mu_{33}\right)\right],$$

$$\mu_{1i}^{(0)}=\left(\sum\psi_k\frac{\bar{\gamma}_{+}^{(0)}}{\bar{\gamma}_{+}^{(k)}}\right)^{-1}\left[\mu_{1i}-\sum\psi_k\frac{\bar{\gamma}_{-}^{(0)}-\bar{\gamma}_{-}^{(k)}}{\bar{\gamma}_{+}^{(k)}}\mu_{i1}\right],\qquad i=2,\,3.$$

После подстановки соотношений (38) в (37) с учетом (33) получим искомые линейные зависимости $\boldsymbol{\sigma}_k$, $\boldsymbol{\mu}_k$ от $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\mu}$, которые можно записать в матричной форме

$$\sigma_k = S_k\sigma + \mathbf{R}_k T, \quad \mu_k = M_k\mu, \quad 0 \le k \le N, \tag{39}$$

где S_k, M_k – известные 9×9 матрицы, $\mathbf{R}_k$ – известные девятикомпонентные векторы-столбцы, компоненты которых определяются коэффициентами в правых частях равенств (33), (37), (38).

Подставим (39) в уравнение (35) и приведем подобные слагаемые, тогда окончательно получим

$$\sigma^* A^{-1}\sigma/2 + \sigma^*\alpha T + \mu^* B^{-1}\mu/2 + \left(\alpha^* A\alpha + m\right)T^2/2 =$$
$$= \sigma^*\left(\sum \psi_k S_k^* A_k^{-1} S_k\right)\sigma/2 + \sigma^*\left[\sum \psi_k S_k^*\left(A_k^{-1}\mathbf{R}_k + \alpha_k\right)\right]T + \mu^*\left(\sum \psi_k M_k^* B_k^{-1} M_k\right)\mu/2 + \tag{40}$$
$$+\sum \psi_k\left[\mathbf{R}_k^*\left(A_k^{-1}\mathbf{R}_k + 2\alpha_k\right) + \alpha_k^* A_k \alpha_k + m_k\right]T^2/2.$$

Так как равенство (40) должно выполняться при любых σ, μ, T, то из него вытекают матричные соотношения

$$A^{-1} = \sum \psi_k S_k^* A_k^{-1} S_k, \qquad B^{-1} = \sum \psi_k M_k^* B_k^{-1} M_k, \qquad \alpha = \sum \psi_k S_k^*\left(A_k^{-1}\mathbf{R}_k + \alpha_k\right),$$
$$\alpha^* A\alpha + m = \sum \psi_k\left[\mathbf{R}_k^*\left(A_k^{-1}\mathbf{R}_k + 2\alpha_k\right) + \alpha_k^* A_k \alpha_k + m_k\right]. \tag{41}$$

Таким образом, соотношения (41) определяют в матричной форме все эффективные термомеханические характеристики волокнистого композита в рамках несимметричной теории упругости при использовании допущений 1–3, 4’, 5, 6’. После обращения 9×9 матриц податливости A^{-1}, B^{-1} из (41) получим нижние оценки расчетных значений эффективных жесткостей композиции, определяемых матрицами A, B.

Важной особенностью предложенных моделей термоупругого поведения однонаправленно армированного композита является возможность определения (в рамках каждой из них) напряжений во всех фазах по осредненным компонентам тензоров напряжений, деформаций, моментных напряжений, изгиба-кручения и осредненного поля температур. Действительно, пусть из решения соответствующих краевых задач для монотропной среды волокнистого строения известны поля осредненных векторов перемещений, вращений и температура, тогда из соотношений, аналогичных (3), определяем компоненты осредненных тензоров γ_{ij}, κ_{ij}, а из (4) при уже известных A, B, $\boldsymbol{\alpha}$ – σ_{ij}, μ_{ij}. При использовании первой модели (см. предыдущий раздел) на основании (24) с учетом соответствий типа (7) можем определить $\gamma_{ij}^{(k)}$, $\kappa_{ij}^{(k)}$, а затем из (2) с учетом (14) – и напряжения $\sigma_{ij}^{(k)}$, $\mu_{ij}^{(k)}$ во всех фазах композиции. При использовании второй модели (см. настоящий раздел) непосредственно из (39) получаем напряжения $\sigma_{ij}^{(k)}$, $\mu_{ij}^{(k)}$ ($0 \le k \le N$) по средним напряжениям в композиции σ_{ij}, μ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$). Возможность определения напряженного состояния во всех фазовых материалах через осредненные характеристики НДС композиции имеет принципиальное значение при использовании в дальнейшем структурных теорий прочности. (В качестве отправных для построения таких теорий могут служить структурные теории прочности, предложенные в рамках симметричной теории упругости, например в [20 и др.].)

Сравнительный анализ структурных моделей и сопоставление с экспериментом. Автору не известны экспериментальные данные по определению эффективных термомеханических характеристик однонаправленно армированных композитов в рамках несимметричной теории упругости, поэтому проведем косвенное сравнение с экспериментом. С этой целью рассмотрим предельный случай (см. (2), (3))

$$\alpha^{(k)} \to 0, \quad \beta^{(k)} \to 0, \quad \varepsilon^{(k)} \to 0, \quad \gamma^{(k)} \to 0, \quad 0 \le k \le N, \tag{42}$$

т.е. случай, соответствующий классической симметричной теории упругости. При этом равенства (2) вырождаются в обычные соотношения Дюамеля – Неймана [19].

Для сравнения расчетных значений эффективных характеристик с экспериментальными данными рассмотрим однонаправленно армированную бороалюминиевую композицию ($N=1$). Технические постоянные компонентов композиции приведены в таблице 1.

Таблица 1

Значения термоупругих характеристик компонентов композиции [21]

Материал	$E^{(k)}$, ГПа	$\bar{\nu}^{(k)}$	$\bar{\alpha}^{(k)} \cdot 10^6$, К$^{-1}$
Алюминиевый сплав АД	71	0,31–0,33	23,5
Волокна бора	385–448	0,2–0,25	2,4

Параметры Ламе $\lambda^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ и коэффициент температурной жесткости $\nu^{(k)}$ в (2) связаны с модулем Юнга $E^{(k)}$, коэффициентом Пуассона $\bar{\nu}^{(k)}$ и коэффициентом линейного теплового расширения $\bar{\alpha}^{(k)}$ k-го фазового материала следующими соотношениями [19]:

$$\mu^{(k)} = \frac{1}{2}\frac{E^{(k)}}{1+\bar{\nu}^{(k)}}, \quad \lambda^{(k)} = \frac{2\bar{\nu}^{(k)}\mu^{(k)}}{1-2\bar{\nu}^{(k)}}, \quad \nu^{(k)} = \bar{\alpha}^{(k)}\left(2\mu^{(k)} + 3\lambda^{(k)}\right), \quad 0 \le k \le N. \tag{43}$$

Технические постоянные монотропной армированной среды определяются по формулам [19]:

$$\begin{gathered} E_{ii} = 1/a_{ii}, \quad \bar{\nu}_{ij} = a_{ij}/a_{jj} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad G_{12} = A_{44} = A_{45} = A_{54} = A_{55}, \\ G_{23} = A_{66} = A_{67} = A_{76} = A_{77}, \quad G_{31} = A_{88} = A_{89} = A_{98} = A_{99}, \end{gathered} \tag{44}$$

где E_{ii}, G_{ij}, $\bar{\nu}_{ij}$ – модули упругости первого и второго рода и коэффициенты Пуассона армированного материала соответственно; a_{ij}, A_{ij} – компоненты матриц A^{-1} и A (см. (41) и (26) соответственно).

При ориентации волокон в плоскости (x_1, x_2) под углом φ_1 к оси x_1 эффективный модуль упругости в направлении этой оси (обозначим его E_φ) определяется по формуле [19]

$$\frac{1}{E_\varphi} = \frac{\cos^4\varphi_1}{E_{11}} + \frac{\sin^4\varphi_1}{E_{22}} - \frac{\bar{\nu}_{12}\sin^2 2\varphi_1}{2E_{11}} + \frac{\sin^2 2\varphi_1}{4G_{12}}. \tag{45}$$

В таблице 2 приведены расчетные значения эффективных термоупругих характеристик рассматриваемого бороалюминия, полученные по формулам (44), (41), (26), (27) с учетом (43), (42) при плотности армирования $\psi_1 = 0,3$ и угле $\varphi_1 = 0$, а также расчетные значения этих же величин, вычисленные по структурным формулам, полученным в [15]. В расчетах использовались средние значения упругих констант материалов компонентов композиции из таблицы 1.

Из таблицы 2 следует, что все три рассматриваемые структурные модели термомеханического поведения однонаправленно армированного композита дают одни и те же результаты, т.е. оценки снизу и сверху полностью совпадают, а значит, «вилку Винера» удалось максимально сузить.

Таблица 2

Расчетные значения эффективных термоупругих характеристик бороалюминия при $\psi_1 = 0,3$

Характеристика материала	Структурная модель		
	Соотношения (41), (44) (нижняя граница)	Структурные соотношения из работы [15]	Соотношения (26), (27), (44) (верхняя граница)
E_{11}, ГПа	174,65	174,65	174,65
$E_{22} = E_{33}$, ГПа	99,8	99,8	99,8
$G_{31} = G_{12}$, ГПа	35,98	35,98	35,98
G_{23}, ГПа	35,98	35,98	35,98
$\bar{\nu}_{21} = \bar{\nu}_{31}$	0,2915	0,2915	0,2915
$\bar{\nu}_{12} = \bar{\nu}_{13}$	0,1666	0,1666	0,1666
$\bar{\nu}_{23} = \bar{\nu}_{32}$	0,3869	0,3869	0,3869
$\alpha_{11}, 10^{-6}$ К$^{-1}$	8,4044	8,4044	8,4044
$\alpha_{22} = \alpha_{33}, 10^{-6}$ К$^{-1}$	20,1461	20,1461	20,1461
α_{ij}, К$^{-1}$ $(i \neq j)$	0,0	0,0	0,0

Отметим, что модель, предложенная в [15], не базировалась на энергетическом условии эквивалентности (8) или (31), в ней вместо допущений 4, 6 или 4', 6' использовалась одна гипотеза, объединяющая 4, 4':

4". Осредненные поля напряжений, моментных напряжений, деформаций, тензора изгиба-кручения и температуры в композиции определяются по правилу простой смеси – пропорционально относительному объемному содержанию ψ_k каждого составляющего.

В силу того, что все три модели приводят к одним и тем же результатам, целесообразно использовать структурные формулы из [15], так как там, в отличие от (26), (27) и (41), выражения для эффективных констант армированного материала получены не в матричной, а в явной форме, более удобной для вычислений и последующего анализа.

Замечание. Сравнение расчетных эффективных термоупругих характеристик для слоистых композитов регулярной структуры в рамках несимметричной теории упругости показано, что для них оценки снизу и сверху, определенные по моделям из [18], также полностью совпадают. Кроме того, эти расчетные значения совпадают с эффективными термоупругими константами слоистого композита, вычисленными по структурным формулам модели из [22], не использующей условия энергетической эквивалентности, а базирующейся на допущении 4".

Сопоставим расчетные значения эффективных характеристик бороалюминиевой композиции с экспериментальными данными. В таблице 3 приведены расчетные значения E_φ, полученные по формулам (45) при использовании данных из табл. 2, и экспериментальные значения из [23]. Данные табл. 3 позволяют сделать вывод о том, что расчетные значения E_φ хорошо согласуются с экспериментом, причем они полностью совпадают с расчетными значениями, полученными по моделям из [8, 13] с учетом равенства (45).

Таблица 3

Значения E_φ однонаправленно армированного бороалюминия при $\psi_1 = 0,3$

Угол разориентации φ_1, град	E_φ, ГПа		Отклонение от эксперимента, %
	Эксперимент [23]	Расчет	
0	185	174,65	5,6
5	180	171,7	4,6
10	180	163,67	9,07
30	120	118,59	1,18
45	100	99,5	0,5
65	100	94,96	5,04
90	100	99,8	0,2

Заключение. Хорошее согласование с экспериментом расчетных значений эффективных термоупругих констант однонаправленно армированного композита в предельном случае (42) позволяет доверительно относиться к моделям, предложенным в [15] и в настоящем исследовании.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-90402-Укр_а) и Президиума СО РАН (Постановление № 10 от 15.01.09, номер проекта 72).

ЛИТЕРАТУРА

1. Атоян, А.А. Задача динамики тонкой пластинки на основе несимметричной теории упругости / А.А. Атоян, С.О. Саркисян // Изв. НАН Армении. Механика. – 2004. – Т. 57, № 4. – С. 287–294.
2. Еремеев, В.А. Общая нелинейная теории упругих микрополярных оболочек / В.А. Еремеев, Л.М. Зубов // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. – 2003. – Спецвып. Нелинейные пробл. механики сплошных сред. – С. 124–169.
3. Е.А. Иванова [и др.] Учет моментного взаимодействия при расчете изгибной жесткости наноструктур / Е.А. Иванова [и др.] // Докл. РАН. – 2003. – Т. 391, № 6. – С. 764–768.
4. Birsan, M. On a Thermodynamical theory of porous Cosserat elastic shells / M. Birsan // J. Therm. Stresses. – 2006. – Vol. 291. – P. 879–901.
5. Rubin, M.B. A Cosserat shell model for interphases in elastic media / M.B. Rubin, Y. Benveniste // J. Mech. and Phys. – 2004. – Vol. 52. – P. 1023–1052.
6. Hill, R. Theory of mechanical properties of fiber-strength thened materials. 1. Elastic behavior / R. Hill // J. of the Mech. and Phys. of Solids. – 1964. – Vol. 12, No 4. – P. 199–212.
7. Hashin, Z. The elastic module of fiber-reinforced materials / Z. Hashin, B.W. Rosen // ASME J. of Appl. Mech. – 1964. – Vol. 31. – P. 223–232.
8. Болотин, В.В. Основные уравнения теории армированных сред / В.В. Болотин // Механика полимеров. – 1965. – № 2. – С. 27–37.
9. Савин, Г.Н. К вопросу об упругих постоянных стохастически армированных материалов / Г.Н. Савин, Л.П. Хорошун // Механика слоистой среды и родственные проблемы анализа. – М.: Наука, 1972. – С. 435–444.
10. Немировский, Ю.В. К теории термоупругого изгиба армированных оболочек и пластин / Ю.В. Немировский // Механика полимеров. – 1972. – № 5. – С. 65–73.
11. Скудра, А.М. Структурная теория армированных пластиков / А.М. Скудра, Ф.Я. Булавс. – Рига: Зинатне, 1978. – 192 с.

12. Ванин, Г.А. Микромеханика композитных материалов / Г.А. Ванин. – Киев: Наук. думка, 1985. – 304 с.
13. Немировский, Ю.В. Эффективные физико-механические характеристики композитов, однонаправленно армированных монотропными волокнами. Сообщение 1. Модель армированной среды / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Изв. вузов. Строительство. – 2006. – № 5. – С. 16–24.
14. Nowacki, W. Theory of asymmetrical elasticity / W. Nowacki. – Oxford. ect: Pergamon-Press, 1986. – 383 p.
15. Немировский, Ю.В. Определение эффективных термомеханических характеристик однонаправленно армированного гибридного композита в рамках несимметричной теории упругости / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т. 15, № 3. – С. 383–394.
16. Жиков, В.М. Усреднение дифференциальных операторов / В.М. Жиков, С.М. Козлов, О.А. Олейник. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1993. – 464 с.
17. Кристенсен, Р. Введение в механику композитов / Р. Кристенсен. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
18. Немировский, Ю.В. Построение определяющих уравнений слоистого композита регулярной структуры в рамках моментной теории упругости на основе энергетических критериев эквивалентности / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Механика композитных материалов. – 2009. – Т. 45, № 1. – С. 3–16.
19. Малмейстер, А.К. Сопротивление полимерных и композитных материалов / А.К. Малмейстер, В.П. Тамуж, Г.А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
20. Хорошун, Л.П. Мезомеханика деформирования и кратковременной повреждаемости линейно-упругих однородных и композитных материалов / Л.П. Хорошун, Е.Н. Шикула // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 6. – С. 3–42.
21. Композиционные материалы. Справочник / под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
22. Немировский, Ю.В. Определение эффективных термомеханических характеристик слоистого композита регулярной структуры в рамках несимметричной теории упругости / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Прикладная механика. – 2009. – Т. 45, № 11. – С. 71–79.
23. Колпашников, А.И. Деформирование композиционных материалов / А.И. Колпашников, Б.А. Арефьев, В.Ф. Мануйлов. – М.: Металлургия, 1982. – 248 с.

Поступила 04.11.11