

МОДЕЛИ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МЯГКОГО МИКРОРОБОТА АМЕБОПОДОБНОГО ТИПА В ЖИДКОСТИ

Циммерманн К.¹⁾, Чигарев А.В.²⁾, Чигарев В.А.²⁾

Наблюдения за перемещением амёб показывают, что геометрия их внешней оболочки может изменяться существенным образом от почти эллипсоидальной до появления выростов, сопоставимых с характерным размером. Выросты напоминают по форме течения, по форме близкие к «жидким пальцам», характерным для структур появляющихся при вытеснении нефти водой [1]. При этом во внутренней жидкой среде наблюдаются хорошо выраженные течения, механизм которых до конца не выяснен. Характерно, что измененная форма фиксируется и сохраняется достаточно длительное время, что может свидетельствовать о том, что возникает некоторая внутренняя устойчивая структура трансформированного из начального эллипсоида. Большие деформации внешней оболочки наблюдаются также при поглощении других объектов.

Рассмотрим модель деформируемого тела с изменяемой геометрией, а также переменной массой и составом [2, 3]. Поступательное перемещение центра масс за счет внутренних течений можно создать, если изменяется масса. Обозначим \bar{V}_C скорость центра масс, тогда

$$M \frac{d\bar{V}_C}{dt} = (\bar{u} - \bar{V}_C) \frac{dM}{dt}, \quad (1.1)$$

где u – абсолютная средняя скорость переменной части системы, которая удовлетворяет уравнению

$$\bar{u} \Delta M = M^+ \bar{V}^+ - M^- \bar{V}^-, \quad (1.2)$$

где M^+ – масса, \bar{V}^+ – скорость центра масс притекающих в систему материальных точек, M^- – масса, \bar{V}^- – скорость центра масс точек вытекающих из системы.

Дополнительная сила, возникающая за счет изменения центра масс равна

$$\bar{F}^+ = \bar{u} \frac{dM}{dt}. \quad (1.3)$$

Таким образом, из уравнений (1), (2), (3) следует, что дополнительная сила может возникать только в случаях $\bar{u} \neq \bar{V}_C$, $\frac{dM}{dt} \neq 0$. Под действием силы F^+ тело может начать двигаться из состояния покоя.

В случае, если $\bar{u} - \bar{V}_C = \text{const} = \bar{V}$ направлена противоположно скорости движения центра масс, то

$$V_C = \ln \frac{M_0}{M} + V_{OC}, \quad (1.4)$$

где M_0 – начальное значение массы, V_{OC} – начальное значение модуля скорости центра масс.

Из (1.4) следует, что конечная скорость перемещения центра масс модели не зависит от режима изменения массы.

1. Модель тела с перфорированными псевдоподиями (псевдоножками). Искусственная амёба перемещается в поле тяжести Земли в жидкости, оказывающей сопротивление перемещению, что в уравнении (1.1) должно учитываться с помощью дополнительных членов

$$M \frac{d\bar{V}_c}{dt} = \bar{F} + (\bar{u} - \bar{V}_c) \frac{dM}{dt}, \quad (1.5)$$

$$\bar{F} = \bar{F}_g + \bar{F}_t,$$

где $F_g = ma$ – сила тяжести, $F_t = -\alpha \bar{V}_c$ – сила сопротивления среды.

Если движение происходит по поверхности, то необходимо учесть силу трения и наложить условия связи.

Рассмотрим механизм локальных изменений геометрии оболочки под воздействием внутренних течений. Наблюдения показывают, что поток внутренней жидкости направляется на мембрану, которая под его действием начинает деформироваться образуя вырост в виде трубки. Оценим усилие локального воздействия на стенку оболочки. Масса, заполняющая оболочку, остается постоянной, но состав меняется. Выделим локальную трубку тока жидкости в виде прямого угла. Идет отток жидкости из нижней псевдоподии и частично в объем тела. Псевдоподии армированы пружинами с переменной жидкостью.

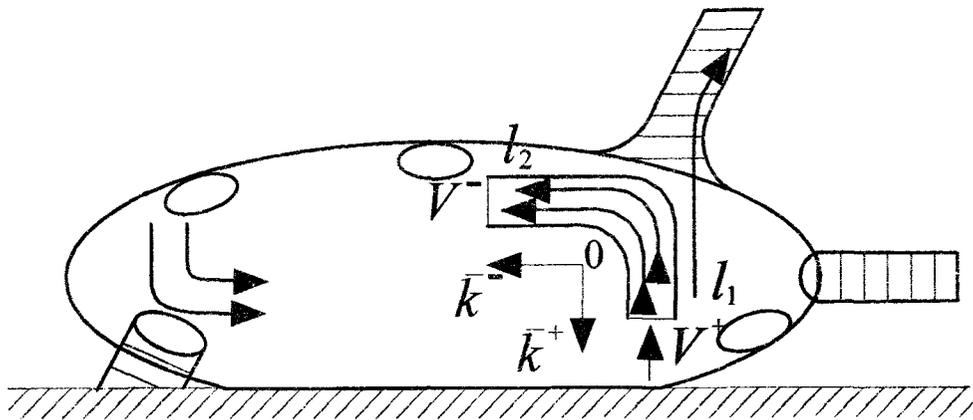


Рисунок 1 – Схема перетекания жидкости из нижней псевдоподии в верхнюю

Обозначим \bar{k}^+ – направляющий вектор трубки тока, направленной к стенке, \bar{k}^- – направляющий вектор линий тока трубки жидкости оттока.

Обозначим через $\rho_{(i)}$ – плотность внутренней жидкости. Тогда имеем

$$\frac{dM^+}{dt} = \frac{dM^-}{dt} = S\rho_{(i)}\bar{u}. \quad (1.6)$$

$$\bar{V}^+ = -u\bar{k}^+ + V_c\bar{k}^-, \quad \bar{V}^- = u\bar{k}^- + V_c\bar{k}^-. \quad (1.7)$$

Здесь \bar{V}_c скорость смещения трубки тока вследствие деформируемости стенки, S – эффективное сечение трубки тока. Считаем, что стенка не оказывает сопротивление.

Сила действия потока жидкости на оболочку без учета сопротивления будет равна

$$\bar{F}_m = -S\rho_{(i)}u^2(\bar{k}^+ + \bar{k}^-). \quad (1.8)$$

Положим, что движение вдоль \bar{k}^+ не происходит вследствие силы тяжести, тогда смещение оболочки имеет место только вдоль \bar{k}^- , а уравнение движения центра масс трубки тока описывается уравнением

$$M_{mp} \frac{dV_c}{dt} = -S\rho_{(i)}u^2, \quad M_{mp} = \rho_{(i)}S \cdot 2l, \quad (1.9)$$

где $l = l_1 + l_2$ длина трубки тока.

Из (1.9) следует, что перемещение центра масс имеет равноускоренный характер. Если учитывать сопротивление стенки и внешней жидкости, в уравнение (1.9) добавляем члены силы сопротивления внешней среды

$$M_{mp} \frac{dV_c}{dt} = -S\rho u^2 + F_{сопр}. \quad (1.10)$$

Таким образом, если внутренняя масса остается практически неизменной, то поступательное перемещение центра масс возможно осуществить за счет изменения геометрии масс. Изменение геометрии масс для фигуры в целом можно осуществить за счет региональных перемещений центров масс, которые приведут к глобальному смещению центра масс системы. Если в некоторой части внутреннего объема создать локальное течение в направлении оболочки такое, что кинетический момент остается неизменным, тогда полагая в уравнении для кинематического момента \bar{K}

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \frac{d\tilde{K}}{dt} + \bar{M}_{(i)}, \quad (1.11)$$

где \tilde{K} – кинетический момент в подвижной системе координат объема постоянного состава.

$$\bar{M}_{(i)} = \bar{M}^+ - \bar{M}^-, \quad \bar{M}^+ = \frac{dK^+}{dt}, \quad \bar{M}^- = \frac{dK^-}{dt}. \quad (1.12)$$

Полагая $d\bar{K}/dt = 0$ (движение без переползания), получим

$$\bar{M}_{об} = \bar{M}_{об} + \bar{M}_{(i)}, \quad (1.13)$$

где $\bar{M}_{об}$ – главный вектор гидродинамических сил действующих на оболочку, $\bar{M}_{об}$ – момент массовых сил, $\bar{M}_{(i)}$ – момент сил за счет изменения состава и массы.

Аппроксимируем жидкое тело, заключенное в оболочку системой материальных точек A_i (рисунок 2).

Рассмотрим плоское движение в плоскости Oxy , в которой перемещается центр масс C .

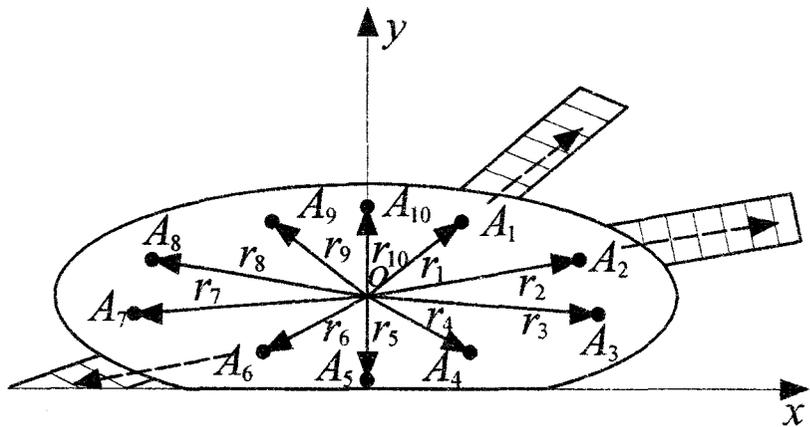


Рисунок 2

В начальный момент времени в точках A_i находятся массы m_i^0 , которые равны между собой. Движение, при котором кинетический момент не изменяется

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i r_i^2 m_i \right) = 0 \quad (1.14)$$

можно реализовать, если считать r_i и m_i функциями времени, тогда из (1.14) следует

$$\frac{dm_i}{dt} = -2m_i \bar{r}_i \frac{d\bar{r}_i}{dt}. \quad (1.15)$$

Введем линию тока жидкости, вдоль которой перемещаются материальные точки, вместо параметра времени t будем использовать s -расстояние вдоль линии тока, тогда (1.15) можно записать в виде

$$\frac{dm_i}{ds} = -2m_i \bar{r}_i \frac{d\bar{r}_i}{ds}. \quad (1.16)$$

Пусть линия тока направлена вдоль \bar{r}_i и точка A_i перемещается вдоль луча. Так как $d\bar{r}_i/ds = \bar{\tau}_i$ – касательный вектор к i -той линии тока, то $\bar{r}_i \cdot \bar{\tau}_i = |r_i| \cos \alpha_i$, где α_i – угол между векторами \bar{r}_i и $\bar{\tau}_i$.

Таким образом, рост длины луча скелета, связанных в точке A_i ведет к уменьшению массы (плотности) в этом направлении за счет распределения ее в выросте. Этим можно объяснить сходство выростов при движении амебы в среде с течением типа жидких пальцев.

Практическая реализация предложенной модели может быть осуществлена с помощью мягкой оболочки с выростами, имеющими вид гофрированных шлангов, которые под действием жидкодинамических сил и гибкого скелета могут вытягиваться и заполняться внутренней жидкостью (рисунок 2).

Другой тип движения можно осуществить за счет малых вибраций оболочки.

2. Вибрационное поступательное перемещение мягкой замкнутой мембраны. Рассмотрим возможность плоского движение оболочки (мембраны), заполненной жидкостью, в однородной среде. Плоскость, в которой происходит движение, обозначим OXY рисунок 3. С центром масс O_1 свяжем систему координат $O_1X_1Y_1$, которая перемещается так, что оси подвижной и неподвижной систем координат параллельны в процессе движения (кенигова система). В локальной системе координат $O_1X_1Y_1$ введем локальные полярные координаты r, θ , с помощью которых изменение формы контура описывается уравнениями

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t). \quad (2.1)$$

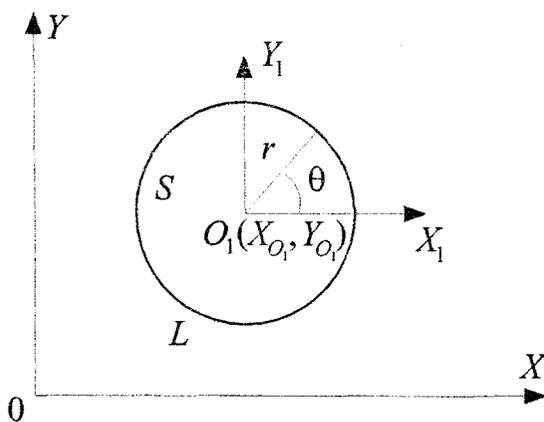


Рисунок 3 – Схема плоского перемещения мягкой оболочки, заполненной жидкостью

Выражая в (2.1) r через θ запишем уравнения границы L в виде

$$r = r_1(\theta, t). \quad (2.2)$$

Зависимость от θ и t позволяет учитывать деформирование контура при фиксированном θ , что позволяет в принципе описать выросты оболочки типа псевдоподии. Считаем, что контур L деформируется без изменения площади S , что записывается в виде

$$2S = R_*^2 \int_0^{2\pi} r_1^2(\theta, t) d\theta = const. \quad (2.3)$$

Здесь R_* – эффективный радиус сечения, который определяется соотношением

$$S = \pi R_*^2. \quad (2.4)$$

Перейдем к безразмерным полярным координатам

$$\rho_{(\theta,t)} = r_{(\theta,t)} r_1^{-1}, \quad \theta = \theta, \quad (2.5)$$

тогда уравнение невозмущенной границы записывается в виде

$$\rho = 1. \quad (2.6)$$

Пусть в начальный момент времени тело и жидкость находятся в покое, течение является потенциальным, потенциал скорости $\Phi(\rho)$ вводится соотношением [3-5]

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma} g(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) ds. \quad (2.7)$$

Здесь Q точка на L , а точка P не принадлежит L , обозначим $r = |PQ|$ – расстояние между точками P и Q . Деформирование поверхности L индуцирует вихревой поток в во внешней среде. Интеграл (2.7) представляет собой потенциал двойного слоя с плотностью $g(Q)$.

В рассматриваемом случае в криволинейных координатах потенциал скорости имеет вид

$$\Phi(\rho, \theta, t) = -\frac{1}{4\pi} \left[\int_0^{2\pi} A(\theta_1, t) \frac{\partial}{\partial \rho_1} \ln R d\theta_1 + \int_0^{2\pi} B(\theta_1, t) \ln R d\theta_1 \right]_{\rho_1=1}, \quad (2.8)$$

$$A(\theta_1, t) = g(\theta_1, t)(c_1^2 + 1), \quad B(\theta_1, t) = \frac{\partial}{\partial \theta_1} [g(\theta_1, t)c_1],$$

$$c_1 = \frac{1}{r_1(\theta_1, t)} \frac{\partial}{\partial \theta_1} r_1(\theta_1, t).$$

$$R(\rho_1) = \rho_1^2 r_1^2(\theta_1, t) + \rho^2 r_1^2(\theta, t) - 2\rho\rho_1 r_1(\theta, t) r_1(\theta_1, t) \cos(\theta_1 - \theta).$$

Здесь R – квадрат расстояния между точками $Q(\rho, \theta)$ и $Q_1(\rho_1, \theta)$.

На границе L задано условие: нормальная составляющая скоростей точки поверхности и соприкасающейся частицы жидкости равны между собой

$$\frac{1+c^2}{r_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{c}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\partial r_1}{\partial t} + \dot{Y}_{O_1}(t)[c \cos \theta - \sin \theta] + \dot{X}_{O_1}(t)[c \sin \theta + \cos \theta], \quad (2.9)$$

$$c = \frac{1}{r_1(\theta, t)} \frac{\partial}{\partial \theta} r_1(\theta, t).$$

Условия неподвижности жидкости вдали от тела записываются в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} 0. \quad (2.10)$$

Поступательное движение O_1 центра масс определяется уравнениями Ньютона

$$\begin{aligned} M\ddot{X}_{O_1} &= F_x, \quad M\ddot{Y}_{O_1} = F_y \\ F_x &= \int_0^{2\pi} P(\theta, t) \left[r_1 \sin \theta - \frac{\partial r_1}{\partial \theta} \cos \theta \right] d\theta \\ F_y &= \int_0^{2\pi} P(\theta, t) \left[r_1 \cos \theta + \frac{\partial r_1}{\partial \theta} \sin \theta \right] d\theta. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь F_x, F_y – составляющие равнодействующей сил давления на поверхность L , P – давление, связанное с потенциалом скорости Φ соотношением Коши-Лагранжа

$$\begin{aligned}
& P + \frac{1}{2r_1^2} (c^2 + 1) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right)^2 - \frac{c}{\rho r_1^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{2\rho^2 r_1^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right)^2 + \\
& + \frac{1}{\rho r_1} (\dot{X}_{O_1} \cos \theta + \dot{Y}_{O_1} \sin \theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \\
& - \frac{1}{r_1} \left[\rho \frac{\partial r_1}{\partial t} + \dot{X}(c \cos \theta - \sin \theta) + \dot{Y}(c \sin \theta + \cos \theta) \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = K(t).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Начальные условия для уравнений (8) – (12) имеют вид

$$g(\theta, 0) = 0, \quad X_{O_1} = Y_{O_1} = 0, \quad \dot{X}_{O_1} = \dot{Y}_{O_1} = 0. \tag{2.13}$$

Система уравнений (2.8) – (2.13) позволяет однозначно определить $g(\theta, t)$, $X_{O_1}(t)$, $Y_{O_1}(t)$.

Нелинейную систему уравнений (2.8) – (2.13) решаем методом малого параметра.

Представим $r_1(\theta, t)$, в виде разложения по степеням малого параметра ε

$$r_1(\theta, t) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j r_{(j)}(\theta, t), \tag{2.14}$$

а $r_{(j)}(\theta, t)$ в виде разложений по периодическим функциям

$$r_{(j)}(\theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}(t) \cos(k\theta) + a_{jk}(t) \sin(k\theta). \tag{2.15}$$

Подставляя (2.14) в (2.3), получим

$$2\pi = \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \varepsilon^j r_{(j)}) d\theta. \tag{2.16}$$

Соответственно разложено (2.16) потенциал скорости и давление также представим в виде разложений

$$\begin{aligned}
\Phi(\rho, \theta, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} \Phi_{1k+1}(\rho, \theta, t), \\
P(\rho, \theta, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Phi_k(\rho, \theta, t).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Подставляя разложения (2.16), (2.17) в уравнения (2.8) – (2.13), получим рекуррентную систему для последовательных приближений.

Первое приближение.

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\rho, \theta, t) &= - \frac{\partial}{\partial \rho_1} E(g_1) \Big|_{\rho_1=1}, \\
T(g_1(\theta)) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\theta_1) \ln(\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\theta_1 - \theta)) d\theta, \\
P_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} &= 0, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} - \frac{\partial r_1}{\partial t} + \dot{X}_{O_1}^{(1)} \sin \theta - \dot{Y}_{O_1}^{(1)} \cos \theta = 0, \\
M\ddot{X}_{O_1}^{(1)} &= F_x^{(1)}, \quad M\ddot{Y}_{O_1}^{(1)} = F_y^{(1)}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

где $g_1(\theta, t)$ задается в виде разложения по периодическим функциям

$$g_1(\theta, t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) \cos(k\theta) + s_k(t) \sin(k\theta). \tag{2.19}$$

Соответственно (2.19), получим

$$\Phi_1(\rho, \theta, t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^k} [c_k(t) \cos(k\theta) + s_k(t) \sin(k\theta)] \tag{2.20}$$

Второе приближение.

$$\Phi_2(\rho, \theta, t) = -\frac{\partial}{\partial \rho_1} E(g_2) \Big|_{\rho_1=1} - v_1, \quad (2.21)$$

$$M\ddot{X}_{O_1}^{(2)} = F_x^{(2)}, \quad M\ddot{Y}_{O_1}^{(2)} = F_y^{(2)}.$$

Получаем

$$g_2(\theta, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^k} d_k(t) \cos(k\theta) + l_k(t) \sin(k\theta). \quad (2.22)$$

Рассмотрим условия, при которых возможно движение центра масс оболочки заполненной жидкостью за счет малых периодических изменений геометрии оболочки. Пусть оболочка подвергается периодическим колебаниям, описываемым соотношением

$$r_1(\theta, t) = 1 + \varepsilon a_0(t, \varepsilon) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \cos(k\theta) + b_k(t) \sin(k\theta). \quad (2.23)$$

Во втором приближении

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{O_1} &\equiv 0, \quad \ddot{Y}_{O_1} = \dot{b}_n b_{n+1} - b_n \dot{b}_{n+1} \\ b_n(t) &= \rho_1 \cos(\omega t) + \rho_2 \sin(\omega t) + \rho_3 \cos(\omega t) + \rho_4 \sin(\omega t) \\ b_{n+1}(t) &= q_1 \cos(\omega t) + q_2 \sin(\omega t) + q_3 \cos(\omega t) + q_4 \sin(\omega t) \\ \rho_2 &= -k\rho_4, \quad q_2 = -kq_4. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Вычислим среднее значение составляющей скорости $\dot{Y}_{O_1}^{(2)}$ за период $T = 2\pi / \omega$, тогда получим

$$\langle \dot{Y}_{O_1}^{(2)} \rangle = \omega(\rho_2 q_1 - \rho_1 q_2 + q_2 \rho_3 - \rho_2 q_3). \quad (2.25)$$

Выражение (2.25) не равно нулю в случае, если векторы $\vec{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$, $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$, $\vec{e}(1, 0, 1)$ линейно независимы. Таким образом, за счет периодического деформирования оболочки получается ее поступательное перемещение в направлении Y . Подобный тип движения по классификации Лайтхилла [3-5] называется амебоподобным, а задача нахождения деформирования формы для создания поступательного движения – внешней задачей биогидродинамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нитман, Н. Когда вязкие «пальцы» имеют фрактальную размерность? / И. Нитман, Ж. Даккор, Х. Стенли // Фракталы в физике: Международный семинар по фракталам в физике (МЦТФ, Италия. 9-12. 07.1985). – М.: Мир, 1988. – С. 266–281.
2. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц. – М.: Лань, 1988. – 728 с.
3. Лайтхилл, Дж. Гидромеханика движения водных животных / Дж. Лайтхилл // Сб. Механика. Новое в зарубежной науке. – 1972. – №1 (131). – С. 80–109.
4. Миндлит, И.М. Интегродифференциальные уравнения в динамике тяжелой слоистой жидкости / И.М. Миндлит. – М.: Наука, 1996. – 298 с.
5. Ву, Т. О масштабном эффекте для передвигания водных животных / Т. Ву // Сб. Механика. Новое в зарубежной науке. – Т. 23: Биогидродинамика плавания и полета. – М.: Мир, 1980. – С. 79–112.
6. Лайтхилл, Д. Волны в жидкостях / Д. Лайтхилл. – М.: Мир, 1981. – 598 с.

Поступила 21.12.11