УДК 621.79 (075.8)

Белорусский национальный технический университет, Минск

К ВОПРОСУ О ТОЕРЕТИЧЕСКОМ ИССЛЕДОВАНИИ ДВУХМАССОВОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Босаков С.В., Луговой И.В.

The paper presents a calculation of two-mass vibrating system, which has a resilient element in an energy storage device. Given the graphical results of the calculations in the form of sampling analogue-frequency characteristics

Ультразвуковые устройства технологического назначения, предназначенные для обработки отверстий, представляют собой колебательные системы, состоящие из преобразователя электрических колебаний и трансформатора колебаний, к которому присоединяют рабочий инструмент. Подобная колебательная система представляет собой одномассовую систему, в которой поступательное движение массы описывается линейным дифференциальным уравнением, которое дает различное решение в зависимости от начальных условий [1]. Теоретический анализ динамических процессов подобной колебательной системы позволяет определить оптимальные условия работы рабочего инструмента с целью повышения производительности обработки. Анализ данной колебательной системы показывает, что одним из путей совершенствования подобных устройств является использование упругих элементов в качестве накопителей энергии. В качестве последних могут быть использованы такие упругие элементы как пружина, кольцо, мембрана, сильфон и т.п. Упругий элемент, который служит аккумулятором энергии, вводится в колебательную систему перед рабочим инструментом. Рассмотрим частный случай такой двухмассовой системы, в которой упругим элементом является кольцо диаметром $r1$ и массой $M1$, которое жестко соединено с рабочим инструментом (иглой) длиной $r2$ и массой $M2$ (рисунок 1). Смещения масс обозначим $y1$ и $y2$. Исходным условием является жесткий контакт рабочего торца инструмента.

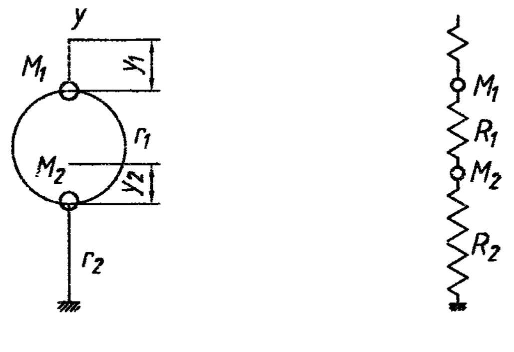


Рисунок 1 – Двухмассовая колебательная система с упругим элементом и ее математическая модель

Двухмассовая динамическая система представленной схемы описывается системой уравнений

$$\begin{cases} M_1\ddot{y}_1 + r_1(y_1 - y_2) = Q\sin\theta t + M_1 g \\ M_2\ddot{y}_2 + r_2 y_2 - r_1(y_1 - y_2) = M_2 g. \end{cases} \quad (1)$$

Которая после преобразований принимает вид

$$\begin{cases} \ddot{y}_1+\gamma(y_1-y_2)=q\sin\theta t+M_1 g/M_1 \\ \ddot{y}_2+\gamma y_2-\beta y_1=M_2 g/M_2. \end{cases} \tag{2}$$

Решением данного однородного уравнения может быть :

$$\begin{cases} M_1\ddot{y}_1+r_1(y_1-y_2)=0 \\ M_2\ddot{y}_2+y_2(r_1+r_2)-r_1 y_1=0. \end{cases} \tag{3}$$

или

$$\begin{cases} -C_1\omega^2\sin(\omega t+v)+r_1[C_1\sin(\omega t+v)-C_2\sin(\omega t+v)]=0 \\ -C_2\omega^2\sin(\omega t+v)+\alpha C_2\sin(\omega t+v)-\beta C_1\sin(\omega t+v)=0 \end{cases}$$

где

$$\frac{r_1}{M_1}=\gamma;\quad \frac{r_1+r_2}{M_1}=\alpha;\quad \frac{r_1}{M_2}=\beta;\qquad y_i=\alpha_i\sin\omega_i t+b_i\cos\omega_i t=C_i\sin(\omega_i t+v)$$

$$C_i=\sqrt{\alpha_i^2+b_i^2}\qquad \begin{cases} C_1(-\omega^2+r_1)-C_2\gamma=0 \\ -C_1\beta+C_2(\alpha-\omega^2)=0 \end{cases} \begin{vmatrix} -\omega^2+\gamma & -\gamma \\ -\beta & \alpha-\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

$$(\gamma-\omega^2)(\alpha-\omega^2)-\beta\gamma=0$$

$$\omega^4-\omega^2(\gamma+\alpha)+\alpha\gamma-\beta\gamma=0$$

$$\omega_1^2=\frac{\alpha+\gamma}{2}-\sqrt{\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2-\gamma(\alpha-\beta)}=\frac{\alpha+\gamma}{2}-\sqrt{\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)^2+\gamma\beta}$$

$$\omega_2^2=\frac{\alpha+\gamma}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2-\gamma(\alpha-\beta)}=\frac{\alpha+\gamma}{2}-\sqrt{\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)^4+\gamma\beta}$$

Следовательно, уравнения для смещения принимают следующий вид:

$$y_1(t)=C_1^1\sin(\omega_1 t+v_1)+C_1^2\sin(\omega_2 t+v_2)$$

$$y_2(t)=C_2^1\sin(\omega_1 t+v_1)+C_2^2\sin(\omega_2 t+v_2)$$

Учитывая, что $(\gamma-\omega_i^2)C_2^i=\gamma C_2^i$ и $C_2^i=\dfrac{\gamma-\omega^2}{\gamma}C_1^i$

уравнения смещения масс можно представить в виде системы уравнений

$$\begin{cases} y_1(t)=C_1\sin(\omega_1 t+v_1)+C_2\sin(\omega_2 t+v_2) \\ y_2(t)=\dfrac{\gamma-\omega_1^2}{\gamma}C_1\sin(\omega_1 t+v_1)+\dfrac{\gamma-\omega_2^2}{\gamma}C_2\sin(\omega_2 t+v_2) \end{cases} \tag{4}$$

В этом уравнении есть неизвестные: C_1, C_2, v_1, v_2.

Для решения уравнений необходимо определить начальные условия y_{10}, v_{10}, y_{20}, v_{20} в момент времени $t=0$

$$\begin{cases} y_{10}=C_1\sin v_1+C_2\sin v_2 \\ v_{10}=\omega_1\cos v_1 C_1+\omega_2 C_2\cos v_2 \end{cases}\qquad \begin{cases} y_{20}=\dfrac{\gamma-\omega_1^2}{\gamma}C_1\sin v_1+\dfrac{\gamma-\omega_2^2}{\gamma}C_2\sin v_2 \\ v_{20}=\dfrac{\gamma-\omega_1^2}{\gamma}C_1\omega_1\cos v_1+\dfrac{\gamma-\omega_2^2}{\gamma}C_2\omega_2\cos v_2 \end{cases}$$

Частные решения, соответствующие условию действия возбуждающей силы на систему $Q\sin\Theta t$ можно записать как

$$\begin{cases} M_1\ddot{y}_1+r_1(y_1-y_2)=Q\sin\theta t \\ M_2\ddot{y}_2+(r_1+r_2)y_2-r_1 y_1=0 \end{cases}$$

где $$y_i = a_i \sin\theta t\,; \qquad \frac{Q}{M_1} = q$$

$$\begin{cases} -a_1\theta^2 + \gamma(a_1 - a_2) = q \\ -a_2\theta^2 + \alpha a_2 - \beta a_1 = 0 \end{cases} \qquad a_1(\gamma - \theta^2) - \gamma \frac{\beta}{\alpha - \theta^2} a_1 = q\,;$$

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{\beta}{\alpha - \theta^2} a_1 \\ a_1 = \dfrac{q}{\gamma - \theta^2 - \gamma \dfrac{\beta}{\alpha - \theta^2}} = \dfrac{q(\alpha - \theta^2)}{(\gamma - \theta^2)(\alpha - \theta^2) - \gamma\beta} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_2 = \dfrac{q\beta}{(\gamma - \theta^2)(\alpha - \theta^2) - \gamma\beta} \\ a_1 = \dfrac{q(\alpha - \theta^2)}{(\gamma - \theta^2)(\alpha - \theta^2) - \gamma\beta} \end{cases}$$

Частное решение, соответствующее M_1q , M_2q примет следующий вид

$$M_1\ddot{y}_1 + r(y_1 - y_i) = M_1 q$$
$$M_2\ddot{y}_2 + (r_1 + r_2)y_2 - r_1 y_1 = M_2 q$$

откуда

$$y_2 = \frac{M_1 q + M_2 q}{r_2}$$
$$y_1 = \frac{M_1 q}{r_1} + \frac{M_1 q + M_2 q}{r_2}.$$

Следовательно, окончательно уравнения (4) для определения смещений масс примут следующий вид

$$y_1(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + v_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + v_2) + \frac{q(\alpha - \theta^2)\sin\theta t}{(\gamma - \theta^2)(\alpha - \theta^2) - \gamma\beta} + \frac{M_1 q}{r_1} + \frac{M_1 q + M_2 q}{r_2}$$

$$y_2(t) = \frac{\gamma - \omega_1^2}{\gamma} C_1 \sin(\omega_1 t + v_1) + \frac{\gamma - \omega_2^2}{\gamma} C_2 \sin(\omega_2 t + v_2) + \frac{q\beta \sin\theta t}{(\gamma - \theta^2)(\alpha - \theta^2) - \gamma\beta} + \frac{M_1 q + M_2 q}{r_2}. \qquad (5)$$

Теперь необходимо выполнить начальные условия при $t = 0$

$$\begin{cases} Y1_0 = C_1 \sin v_1 + C_2 \sin v_2 + \dfrac{M_1 q}{r_1} + \dfrac{M_1 q + M_2 q}{r_2} \\ Y2_0 = \dfrac{\gamma - \omega_1^2}{\gamma} C_1 \omega_1 \cos v_1 + \dfrac{\gamma - \omega_2^2}{\gamma} C_2 \sin v_2 + \dfrac{M_1 q + M_2 q}{r_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v1_0 = \omega_1 C_1 \cos v_1 + C_2 \omega_2 \cos v_2 + \dfrac{\theta q(\alpha - \theta^2)}{(\gamma - \theta^2)(\alpha - \theta^2) - \gamma\beta} \\ v2_0 = \dfrac{\gamma - \omega_1^2}{\gamma} C_1 \omega_1 \cos v_1 + \dfrac{\gamma - \omega_2^2}{\gamma} C_2 \omega_2 \cos v_2 + \dfrac{\theta q\beta}{(\gamma - \theta^2)(\alpha - \theta^2) - \gamma\beta} \end{cases}$$

Найдем неизвестные C_1, C_2, v_1, v_2 из условия

$$\frac{C_1 \sin v_1 = F_{11}}{C_1 \omega_1 \cos v_1 = F_{21}} \qquad C_2 \sin v_2 = F_{12} \qquad C_2 \omega_2 \cos v_2 = F_{22}$$

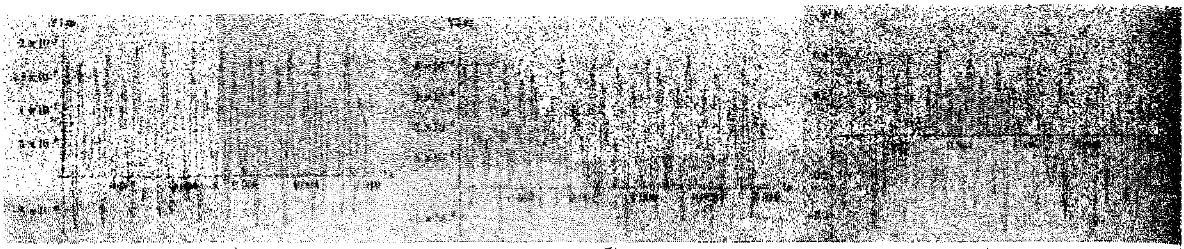
$$tg v_1 = \omega_1 \frac{F_{11}}{F_{21}} \quad \text{и} \quad tg v_2 = \omega_2 \frac{F_{12}}{F_{22}}$$

Таким образом

$$C_1 = \frac{F_{11}}{\sin v_1} = \frac{F_{21}}{\omega_1 \cos v_1} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{F_{12}}{\sin v_2} = \frac{F_{22}}{\omega_2 \cos v_2}$$

Аналитическое решение представленных уравнений было выполнено на ЭВМ для частного случая, когда на массу M_1 воздействуют вынужденные колебаний частотой 20кГц. В качестве упругого элемента массой M_1 был принято кольцо из стали, диаметром 20, шириной 10 и толщиной 1мм. Рабочим инструментом служила игла диаметром 2 мм длиной 50 мм. Собственные частоты колебаний кольца и иглы были рассчитаны по [2].

Полученные результаты представлены в виде осциллограмм, которые характеризуют амплитудно-частотные характеристики для массы M_1 и M_2 (рисунок 2*а* и *б*), а также изменение силы в точке прижатия иглы к опоре (рисунок 2*в*).

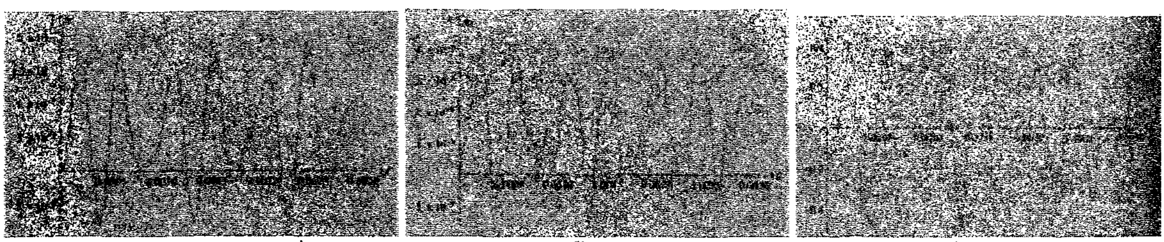


а) *б)* *в)*

Рисунок 2 – Амплитудно-частотные характеристики двухмассовой системы

Характер кривых *Y*1 и *Y*2 на рисунках свидетельствуют о том, рассматриваемый частный случай представляет собой сложение двух несинхронных коллинеарных гармонических колебаний с различными частотами колебаний. В результате сложения этих колебаний образуются биения, при которых размах суммарных колебаний колеблется между минимальным и максимальным значениями. Подобный характер несинхронного изменения силы наблюдается на кривой для силы между массой M_2 и опорой.

Также были рассмотрены переходные процессы колебательной системы. Представленные кривые (рисунок 3) показывают, что система выходит в стабильный режим работы сразу после первого периода колебаний, что свидетельствует о близких значениях собственных колебаний масс.



а) *б)* *в)*

Рисунок 3 – Переходные процессы колебательной системы

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин, М.М. Теория колебаний: учеб. для вузов / М.М. Ильин, К.С. Колесников, Ю.С. Саратов; под общ. ред. К.С. Колесникова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 272 с.
2. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. –М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1959. – 437 с.

Поступила 13.10.11