

МОДЕЛЬ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ СТЕРЖНЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Холодарь Б.Г.

A model is proposed to describe the development of the damage of material. The model considers the origin of the defects in the process of cyclic action. The role of the utilized parameters is analyzed. The model is applied to the construction of generalized longevity curves for the symmetrical and asymmetrical load cycles and dependences of "the medium stress of a cycle - amplitude of vibrostress" for the assigned levels of longevity (Haigh's diagram). Also considered under the model is the question about the probability distribution of destruction depending on amplitude and load duration. Conclusion is drawn about the adequacy of the model to the experimental data.

Вибрационные нагрузки в значительной степени определяют сроки эксплуатации элементов машин, а потому прогнозирование поведения материалов при таких нагрузках является достаточно актуальным. В виду сложности и многообразия связанных с этим задач используются различные подходы к их решению. Ниже рассматривается модель, базирующаяся на известных представлениях о кинетической природе развития поврежденности материала при действии приложенных нагрузок [1].

Все материалы являются локально-неоднородными, содержащими различные несовершенства и дефекты структуры. Часть из них образовалась при "рождении" материала и, постоянно присутствуя в его структуре, может претерпевать определенные изменения при его эксплуатации, а часть может появляться дополнительно при вновь приложенных нагрузках и также развиваться во времени. Стадия зарождения дефектов выделяется, в частности, при описании эффектов, сопутствующих циклическому нагружению [1,2,3]. Несмотря на разнообразие и различие механизмов, контролирующих течение структурных процессов, их особенностью является невозможность полного восстановления равновесной структуры материала, локально нарушаемой во время актов ее перестройки при внешних силовых воздействиях на тело. Скорость разрушения и восстановления связей экспоненциально зависит от энергии активации соответствующих процессов.

Для случая, когда рассматривается развитие исходных дефектов, уравнение для скорости возрастания поврежденности материала при одноосном растяжении можно записать в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = \nu(1 - \omega) \cdot \frac{\sigma}{\sigma_B} \exp\left(\frac{\alpha\sigma}{1 - \omega}\right), \quad (1)$$

где $0 \leq \omega \leq 1$ и σ – поврежденность и растягивающее напряжение в сечении стержня, t – время. Сомножитель σ/σ_B учитывает влияние искажения структуры материала при действии напряжений заданного уровня, сомножитель $\exp(x)$ учитывает активационный характер процессов, сомножитель $(1 - \omega)$ исключает из рассмотрения разрушенную зону сечения, σ_B – характеристика прочности материала (предел прочности, предел текучести), ν и α – структурные параметры материала, связанные соответственно с частотой появления актов нарушения структуры и с влиянием напряженного состояния (уровня упругого искажения решетки) на энергию активации этих процессов. Для описания процессов, идущих с переменной знака напряжений, в $\alpha\sigma$ необходимо выделить гидростатическую и девиаторную составляющие. Соответствующим образом могут быть записаны и уравнения для пространственного случая нагружения с учетом гидростатической и девиаторной компонент поврежденности [4]. В этом случае поврежденность является мерой деструкции материала в конкретной точке тела.

Как известно, виброразогрев, естественным образом сопровождающий циклическое приложение нагрузки, оказывает заметное влияние на долговечность материала. В соответствии с кинетическими представлениями рост температуры θ ведет к изменению структурных параметров α и ν , причем не вполне "параллельно", так как происходящие фазовые превращения в большей степени влияют на локальное искажение структуры, чем на величину исходной энергии активации материала [1]. У полимеров виброразогрев сказывается более существенно, чем у металлов, в связи с происходящим более высоким изменением уровня гомологической температуры. Чтобы не вносить дополнительных переменных в анализ модели, принимаем, что виброразогрев исключен.

При $x = \alpha\sigma = \text{const}$ уравнения приводят к зависимости для долговечности $\tau_p = \nu t_p \approx \exp(-x)/x$, которая дает значения, мало отличающиеся от известной формулы Журкова $\tau_p = \exp(-x)$.

При циклическом нагружении реальных материалов всегда имеет место определенное рассеяние энергии, которое при соответствующем числе циклов может оказаться достаточным, чтобы вызвать нарушение структуры. Чтобы не учитывать по отдельности развитие каждого такого дефекта, примем, что за один цикл нагрузки заданной формы возникает одинаковое предельное искажение решетки независимо от номера цикла. В этом случае уравнение (1) получит трансформацию только через частотный параметр и примет вид

$$\frac{d\omega}{dt} = \nu(1 - \omega)(1 + \kappa_\sigma N) \cdot |\sigma_{MAX} / \sigma_B| \cdot \exp\left(\frac{\alpha\sigma(t)}{1 - \omega}\right).$$

Отношение σ_{MAX}/σ_B берем по модулю, считая, что уровень искажения решетки материала в момент потери устойчивости пропорционален максимальному напряжению цикла. Коэффициент $k_\sigma = F(\sigma/\sigma_B, \epsilon)$ зависит от достигнутого уровня напряженно-деформированного состояния материала. Соответствующая функция F устанавливается для каждого материала или группы материалов и является некоторой осредняющей зависимостью, которая должна обеспечить наиболее полное соответствие экспериментальных и расчетных данных. Вопрос о физическом обосновании зависимости $k_\sigma = F(\sigma/\sigma_B, \epsilon)$ в настоящей работе не ставится, хотя некоторые априорные факты могут быть использованы при ее записи. В частности, если материал обладает выраженным пределом усталости σ_S , то $k_\sigma = 0$ при $\sigma < \sigma_S$. Для полимеров путем прямых измерений установлено, что число зарождающихся дефектов дается функцией с уменьшающейся со временем производной [1]. Это относится и к металлам, где тоже имеет место слияние дефектов в более крупные [2,3].

Сдвиговые деформации в большей степени искажают решетку, чем гидростатические, поэтому девиаторное напряженно-деформированное состояние играет ведущую роль, что в уравнении (2) учитывается путем введения под экспоненту абсолютной величины напряжений. Чтобы учесть наряду с вибрационными σ_a также и средние напряжения цикла σ_m , представим σ в виде суммы $\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin pt = \sigma_a(s + \sin pt)$, где s может иметь разный знак ($\sigma_a > 0$). При этом уравнение примет вид

$$\frac{d\omega}{dt} = \nu \cdot (1 - \omega) \cdot (1 + \kappa_\sigma \cdot N) \cdot (|s| + 1) \frac{\sigma_a}{\sigma_B} \cdot \exp\left(\frac{\alpha\sigma_a |s + \sin pt|}{1 - \omega}\right). \quad (2)$$

Рассматривая многоцикловую усталость, протекающую на фоне упругих деформаций материала, примем, что функция F зависит только от напряжений. Это соответствует модели реономного упруго-пластического тела с переменной вязкостью $\eta = \eta(\sigma)$, которая позволяет описать материал с диаграммой растяжения, близкой к диаграмме Прандтля. В данной работе такое представление вязкости выбрано с целью сокращения числа параметров, влияющих на анализ результатов применения

предлагаемой модели. Зависимость вязкости от деформаций может быть учтена [5], что в свою очередь позволит расширить применение модели в направлении учета эффектов малоциклового усталости.

Непосредственное численное интегрирование уравнения (2) при большом числе циклов неудобно, поэтому был применен метод "промежуточного интегрирования", в соответствии с которым определяется интеграл за цикл при каждом уровне аргумента $\alpha\sigma/(1-\omega)$ и полученное среднее значение вводится в уравнение, к которому далее можно применить метод разделения переменных. Интеграл по ω в результате сводится к интегральной показательной функции. Возможность применения использованного приема равносильна предположению о малом изменении поврежденности за цикл, что выполняется в рассматриваемой задаче. В результате поврежденность и время нагружения $\tau = vt$ для $\sigma_s \leq \sigma \leq \sigma_B$ оказываются связанными выражением вида

$$R(\sigma_a, s, \omega_0, \omega) = \tau + k_\sigma \tau^2 / 2vT,$$

где $T = 2\pi/p$ – период синусоидальной нагрузки.

При $\omega(\tau=0) = \omega_0 = 0$ имеем решение для исходно-бездефектного материала. Принимая в качестве верхнего предела значение $\omega = 1$, определяем долговечность

$$\text{материала как } \tau = vT/k_\sigma \cdot \left(\sqrt{1 + 2R \frac{k_\sigma}{vT}} - 1 \right).$$

Кривые долговечности для случая, когда $k_\sigma = 0$, а снижение энергии активации происходит за счет действия только девиаторного напряженного состояния, что формально соответствует и случаю растяжения стержня, показаны на рисунке 1. Используемый при расчетах параметр $v = 2.7 \cdot 10^{20}$ назначен из условия достижения поврежденностью значения $\omega = 1$ за время, равное четверти периода синусоидальной нагрузки $\sigma = \sigma_a \sin pt$ при $x_B = \alpha\sigma_a = 50$, а амплитуда напряжений $\sigma_a = x_B/\alpha$ при этом рассматривается как предел прочности материала σ_B , соответствующий частоте нагружения $p = 2\pi f$ (в расчетах принято $f = 100$ Гц). При значениях аргумента $x > 50$ разрушение наступит за более короткое время.

Из рисунка 1 видно, что расчеты с применением промежуточного интегрирования совпадают с расчетами по методу Рунге-Кутты (показаны точками). Кривая для режима $\sigma = \sigma_a |\sin pt|$ при $k_\sigma = 0$ проходит выше, чем кривая статической долговечности при том же уровне напряжений $\sigma_0 = \sigma_a$, что соответствует содержанию задачи. Роль частоты f цикла весьма слабо отражается на форме расчетных кривых.

Основываясь на совпадении расчетных кривых, полученных разными методами, применим использованный прием к режимам, в которых присутствует статическая добавка и учитывается зарождение дефектов при циклировании ($k_\sigma \neq 0$).

При анализе особенностей поведения материала, отражаемых моделью, использованы функции F , вид которых показан на рисунке 1а. Соответствующие им кривые долговечности показаны на рисунке 1б.

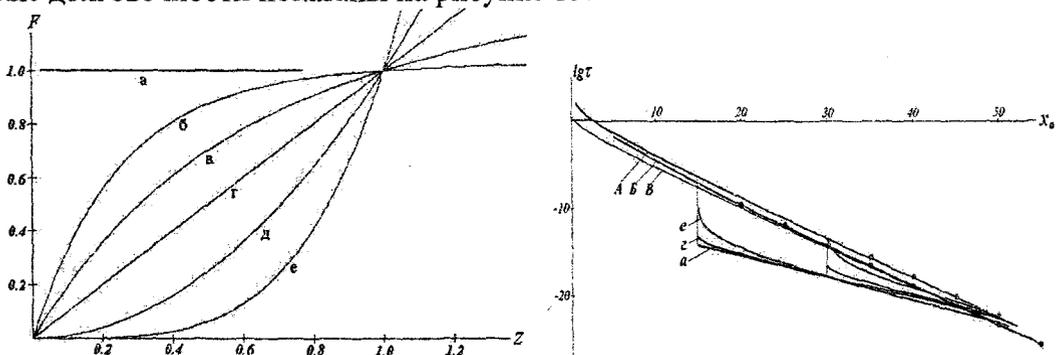


Рисунок 1 – а)- функции $F(\sigma)$; б)- зависимость $\lg\tau(x_a)$ для функций F типа "а", "з", "е" при $r=0$, $x_s=15$, $x_3=30$, $x_B=50$. А, Б – кривые циклической и статической долговечности, В – функция $\lg(Ei(-x))$

Как видно из графиков, влияние зарождения дефектов проявляется в зоне аргумента $x_S < x < x_B$. Функции типа "д" и "е" ($F = z^n$, $z = (x - x_S)/x_B$, $n = \text{const} > 1$) позволяют описать более "мягкий" выход на предел усталости, — с ростом показателя степени переход становится менее резким. Использование в расчетах функций вида $F = F_0 (z \pm k \cdot z^n)$ показывает, что в этом случае нелинейная часть не играет существенной роли. В целом можно сказать, что функциям с более высокой производной на начальном участке кривой $F(\sigma)$ соответствует и более высокий скачок долговечности возле $x \approx x_S$. Физически это объясняется тем, что основную долю общего времени до разрушения занимает начальный период развития поврежденности, на котором она не превышает уровня нескольких тысячных $[(\omega < 0.01)]$. Для напряжений, превосходящих σ_S , это обозначает, что при циклическом нагружении материала напряжениями одинакового уровня на кривых $F(\sigma)$ с более высокой производной зарождается и начинает оказывать влияние на общий рост поврежденности гораздо большее число дефектов структуры, чем на кривых с низкими производными. Увеличение напряжений, сопутствующее росту поврежденности $\sigma = \sigma_a / (1 - \omega)$, не успевает в данном случае оказать существенного влияния. Ступенчатая функция F типа "а" является предельной для функций $F(\sigma)$. Ей соответствует появление разрыва на кривой $\lg t \sim x$ при $x = x_S$ и квазилинейный участок графика для $x_S < x < x_B$. Величина этого разрыва и длина связанного с ним квазилинейного участка $x_B - x_S$ пропорциональны логарифму числа $k_\sigma \cdot f$, что позволяет в определенных пределах манипулировать формой кривой долговечности, приближая ее к построенной по данным испытаний.

Используя вместо фиксированной точки $x = x_S$ некоторый переходной участок небольшой длины и соответствующим образом подбирая функцию $F(x)$, получаем возможность описать долговечность материала, не имеющего резко выраженного предела усталости.

Влияние уровня статической компоненты на участке $x_S < x < x_B$ зависит от реализуемых отношений σ_m/σ_a и σ_S/σ_B — с их ростом роль вибродогрузки снижается и при некотором уровне σ_m становится незаметной (рисунок 2).

Показанные на рис.2а кривые относятся фактически к случаю кручения (девиаторное нагружение), так как функции $|s + \sin pt|$ и $|-s + \sin pt|$ отличаются между собой только сдвигом фазы, что несущественно при рассмотрении многоциклового усталости. Для знакопеременных нормальных напряжений необходим отдельный учет гидростатической и девиаторной составляющих.

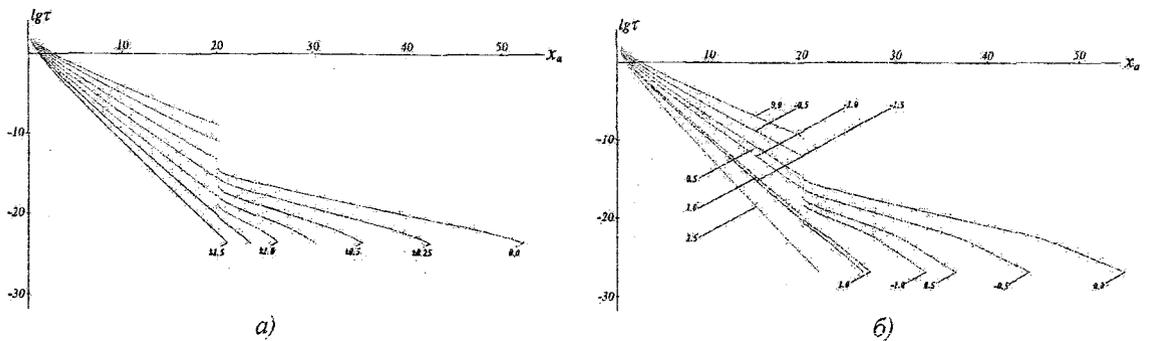


Рисунок 2 — Влияние величины средних напряжений на циклическую долговечность при $-1.5 \leq \gamma \leq 1.5$ и $\gamma = 0$ (а), $\gamma = 0.1$ (б); функция $F = z$ (тип "а")

Выделение в функции, описывающей снижение энергии активации $\Delta U(\sigma) = a\sigma$, гидростатической и девиаторной компонент

$$\Delta U = \alpha_T \sigma_T + \alpha_D \sigma_D \quad (3)$$

где α_T и α_D — положительные константы, $\sigma_T = \sigma/3$, $\sigma_D = |2/3\sigma|$, приводит, соответственно, к увеличению долговечности при $\sigma < 0$ и к ее уменьшению при $\sigma > 0$ сравнительно с рассмотренным выше случаем чисто девиаторной активации процесса. Кон-

кретный результат зависит от отношения $\gamma = \alpha_r/\alpha_d$, с ростом которого роль вибро-догрузки падает. Максимальная долговечность имеет место в случае $s = -\gamma$.

Влияние средних напряжений σ_m на циклическую прочность $\sigma_a(\sigma_m)$ графически представляют в виде объединенных кривых долговечности (ОКД), из которых каждая строится для своего числа циклов N [3,6]. Во многих случаях ОКД проводятся через общую точку σ_m^{\max} ($\sigma_a = 0$) на оси абсцисс. Такое построение является достаточно условным, так как не учитывает, что величина σ_m^{\max} зависит от длительности приложения нагрузки и меняется от $\sigma_m^{\max} = \sigma_B$ при $N = 1/4$ до более низких значений, соответствующих времени статического нагружения $T_m = N/f$. Поскольку при многоциклового усталости рассматриваемый промежуток времени составляет 6–7 порядков, то различие в уровнях $\sigma_m^{\max}(N)$ может быть значительным, а потому ОКД должны представлять собой кривые, не имеющие общей точки.

Рисунок 3 иллюстрирует построение ОКД по данным испытаний [6], а на рисунке 4 показано несколько серий кривых, полученных расчетом по уравнению (2).

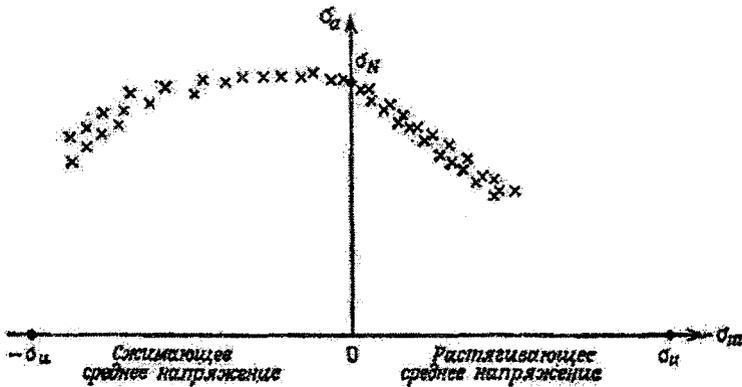


Рисунок 3 – Условное представление данных по ОКД $\sigma_a(\sigma_m)$ при многоциклового усталости

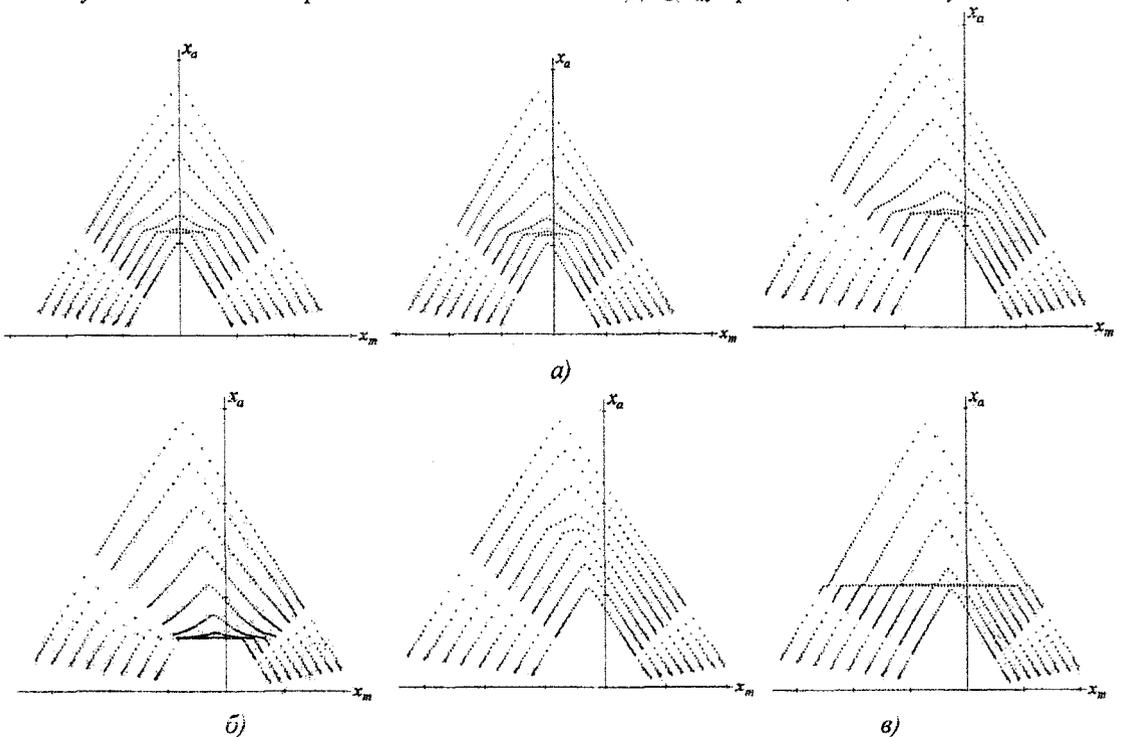


Рисунок 4 – ОКД при $-22 \leq \lg t \leq -8$ (шаг 2), $-10 \leq \gamma \leq +9$. Функция $F=z^4$: а) $\gamma=0, 0.1, 0.25, x_s=20$; б) $\gamma=0.25, x_s=10, 30$; функция $F=\text{const}$: в) $\gamma=0.25, x_s=20$. Меткам на осях соответствует промежуток $\Delta=18$

Вид расчетных кривых зависит от реализованных соотношений между σ_S и σ_B , формы функций $F(\sigma)$ и задаваемых уровней долговечности. Для чисто девиаторного напряженного состояния кривые получаются симметричными. Присутствие в энергии активации гидростатического слагаемого в соответствии с (4) приводит к несимметричному формоизменению ОКД, — смещению и вытягиванию их в сторону отрицательной части оси абсцисс при одновременном увеличении максимума виброкомпоненты σ_a с ростом коэффициента γ . Точки максимума лежат на луче с коэффициентом угла наклона $s = -\gamma$, что может быть использовано при подборе значений структурных параметров материала. Более плавным кривым $\lg t \sim x$ при $x > x_S$ соответствуют и более плавные ОКД. С уменьшением отношения σ_S/σ_B кривые проходят ниже и деформируются с появлением плоских участков. Последние имеют место для значений s , при которых выбранные для построения ОКД уровни $\lg t$ попадают в зону скачка долговечности в точке $x \approx x_S$. Для предельной кривой F типа "а" ОКД приобретают кусочно-линейные очертания. В целом форма построенных кривых не противоречит экспериментальным данным [3,6].

Уточнение формы функций F может быть проведено по результатам испытаний на циклическую долговечность вблизи предела усталости, например, непосредственно по переходному участку кривой Веллера. Здесь используем экспериментальные данные по определению вероятности разрушения в зависимости от напряжений и длительности нагружения (рисунок 5 по данным [7]).

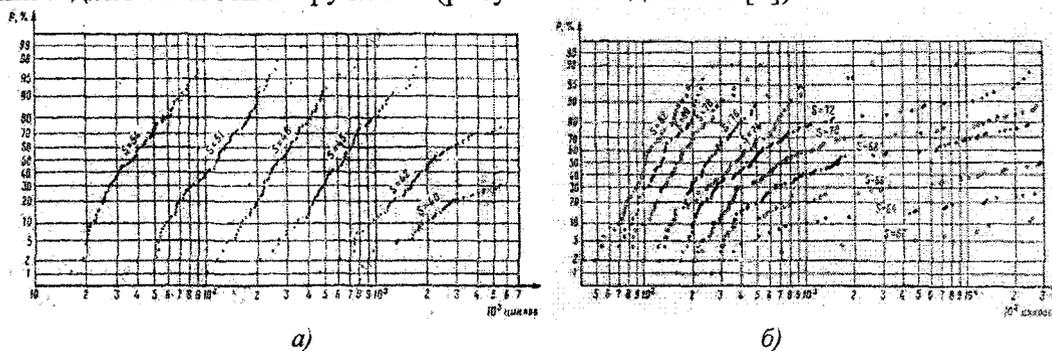


Рисунок 5 — Вероятностные распределения долговечности для стали 35CD4 с термообработками а) ($\sigma = 54-40 \text{ кГ/мм}^2$) и б) ($\sigma = 82-52 \text{ кГ/мм}^2$)

Для термообработки (а) пределы текучести, прочности и усталости равны $\sigma_T = 57.6$, $\sigma_B = 80.2$, $\sigma_S = 40.9 \text{ кГ/мм}^2$, для термообработки (б) — $\sigma_T = 131.7$, $\sigma_B = 152.6$, $\sigma_S = 66.1 \text{ кГ/мм}^2$. Испытания были проведены при частоте нагружения $f = 100 \text{ гц}$ при изгибе с вращением. Так как в настоящей работе не ставится целью описание свойств указанной стали и все построения носят иллюстративный характер, используем данные опытов применительно к однородному напряженному состоянию растяжения-сжатия при $\gamma = 0$. Считая, что уровень вероятности $P = 100\%$ достигается на идеальном исходно-неповрежденном материале ($\omega_0 = 0$), точка с этим уровнем для $\sigma = 54 \text{ кГ/мм}^2$ была перенесена непосредственно на кривую $x \sim \lg t$ (рисунок 6а), где остальные точки построены соответственно их положению на рис.5. Все они имеют некоторые уровни начальной поврежденности $\omega_0(x)$, которые можно приближенно определить, перенося точку с координаты x вправо до пересечения с кривой $x \sim \lg t$ в точке x_ω и учитывая соотношение $x_\omega = x/(1 - \omega_0)$. Вероятности $P = 1\%$, например, будет при этом соответствовать поврежденность $\omega_0 \approx 0.10 \div 0.17$ (для $\sigma = 54 \div 40$). При использовании всех экспериментальных точек рисунка 5 можно построить плотности распределения $\lg t(\omega_0)$ и $P(\omega_0)$ аналогично тому, как это было сделано в [8] для случая постоянной нагрузки. Если принять, что кривой $x \sim \lg t$ соответствуют данные с уровнем вероятности $P = 50\%$ (уровень, по которому устанавливается предел усталости) и провести сдвиг точек, то нетрудно увидеть, что нелинейный ход

зависимостей кривых $\lg N(P)$ в рамках предлагаемой модели объясняется принадлежностью экспериментальных точек разным участкам общей кривой долговечности. Сказанное иллюстрируется рис.6б, где использованы данные для стали типа (б) (непосредственному переносу на кривую подвергнута точка с $\sigma = 82 \text{ кг/мм}^2$). Скачек долговечности при $x = x_S$ на рисунке составляет около четырех порядков, а в эксперименте зона перехода занимает примерно два порядка. Как отмечалось выше, варьированием используемых параметров материала можно уменьшить скачек долговечности в точке разрыва, так что формально результаты опытов и их обработку не трудно сблизить, — для данного случая, например, при уменьшении k_σ на 7–8 порядков (для $\sigma_B \approx 152$) или при уменьшении k_σ на 3–4 порядка и использовании в качестве σ_B значения ~ 110 . В целом же видно, что семейство функций распределения $\lg N(P)$ на вероятностной бумаге может содержать участки с разным наклоном в соответствии с ходом кривой $x \sim \lg t$ (рисунок 1б), в том числе и для материалов с неявно выраженным пределом усталости.

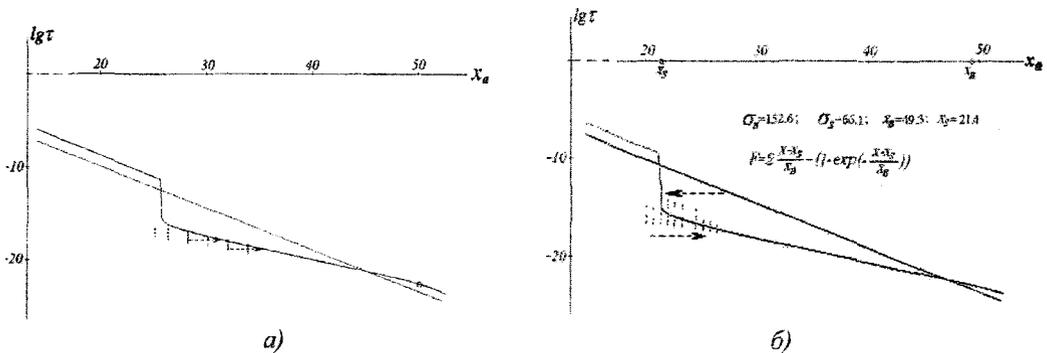


Рисунок б — Приведение экспериментальных данных к расчетной кривой

Таким образом, используя те же структурные параметры, что и в случае $\sigma = \text{const}$, модель позволяет установить связь долговечности материала при статических и циклических воздействиях. Проведя промежуточное интегрирование при заданной форме циклической нагрузки (несинусоидальной, блоковой и т.п.), можно строго для этой формы проводить прогнозирование долговечности материала и рассматривать вопрос о применимости различных критериев суммирования поврежденности. В частности, для блоковых нагрузок вопрос о долговечности материала решается как для случая действия последовательности постоянных напряжений разного уровня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Регель В.Р. Кинетическая природа прочности твердых тел / В.Р. Регель, А.И. Слуцкер, Э.Е. Томашевский. — М.: Наука, 1974. — 560 с.
2. Иванова, В.С. Природа усталости металлов / В.С. Иванова, В.Ф. Терентьев. — М.: Металлургия, 1975. — 455 с.
3. Сопротивление материалов деформированию и разрушению: справочное пособие / В.Т. Трощенко [и др.]. — Ч. 2. — Киев, Наукова думка, 1994. — 702 с.
4. Холодарь, Б.Г. Использование кинетического подхода для описания процессов деформирования и разрушения материала / Б.Г. Холодарь // Теоретическая и прикладная механика. Международный научно-технический журнал. — Вып.24. — Минск: 2009. — С. 211–223.
5. Холодарь, Б.Г. Поведение реономного упруго-пластического материала в режимах нагружения с постоянной скоростью / Б.Г. Холодарь // Деформация и разрушение материалов. — 2009. — № 8. — С.14–22.
6. Коллинз, Дж.А. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение: пер. с англ. / Дж.А. Коллинз. — М.: Мир, 1984. — 624 с.
7. Бастенэр, Ф. Статистический анализ результатов новых усталостных испытаний. Усталость и выносливость металлов / Ф. Бастенэр, М. Бастьен, Ж. Помэ // Сб. науч. ст. — М.: ИЛ, 1963. — С. 390–406 (Bastenaire F., Bastien M., Pomey G. Acta Technica Hungarica, 35-36, 7-26, 1961).
8. Холодарь, Б.Г. Связь долговечности материала с уровнем его исходной поврежденности // Вестник БрГТУ. Сер. Строительство и архитектура. — 2006. — № 1(37). — С. 40–45.