Воронежский государственный университет, Воронеж

О МЕХАНИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЭЛЕМЕНТОВ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ

Ковалев А.В., Яковлев А.Ю.

In the work by the method [3] there is considered a definition of tension in a compound the elastic-plastic construction, which consists of a thick plate weakened by an elliptic aperture where an elliptic inclusion is tightly pressed. Plate and inclusion materials are described by equations of the Ishlinsky – Pragera model [2, 4].

На сегодняшний момент на рынке программного обеспечения представлено множество программных пакетов для прочностных расчетов. Несмотря на широкое распространение сегодня множества программных пакетов для прочностных расчетов, аналитические и численно-аналитические решения классических задач пластичности не утратили своей актуальности. В частности, вопросу определения напряженного и деформированного состояния в составных упругих и упругопластических конструкциях посвящены работы многих авторов, например [5-8].

Целью настоящей работы является определение напряженного состояния в толстой плите с эллиптическим отверстием, в которую с натягом запрессовано несколько большее по размеру эллиптическое цилиндрическое включение. Схема нагружения следующая: на бесконечности плита растягивается взаимно перпендикулярными усилиями P_1 и P_2, по контуру внутреннего отверстия во включении приложено давление P_0.

При решении задачи принимались следующие предположения. Под влиянием внешних нагрузок включение находится полностью в пластическом состоянии, а пластическая зона в плите целиком охватывает контур эллиптического отверстия.

Для описания поведения материала плиты и включения в пластическом состоянии применялась модель Ишлинского – Прагера [2, 4] с поверхностями нагружения

$$F_n = \left(S_{ij_n} - c_n e^p_{ij_n}\right)\cdot\left(S_{ij_n} - c_n e^p_{ij_n}\right) - 2k_n^2 = 0, \tag{1}$$

где S_{ij_n} – компоненты девиатора тензора напряжений, c_n – коэффициент упрочнения, $e^p_{ij_n}$ – компоненты тензора пластических деформаций, k_n – предел текучести материала на сдвиг, индекс n при значении 1 описывает материал плиты, 2 – включения.

В качестве метода решения выбирался приближенно-аналитический метод – метод малого параметра [3]. Решение ограничивалось двумя приближениями (нулевым и первым) и строилось в цилиндрической системе координат ρ, θ, z для случая плоской деформации. Ось $0z$ направлена вдоль центральной оси отверстия в плите. За нулевое приближение выбиралось осесимметричное состояние толстой плиты с круговым отверстием радиуса α, содержащим с натягом круглый цилиндр с внешним радиусом α_1 и внутренним β. На бесконечности конструкция растягивается взаимно перпендикулярными усилиями интенсивностями $P = \dfrac{P_1 + P_2}{2k_1}$. Внутренний контур включения нагружен усилиями интенсивностью P_0. Материал плиты и включения в пластической зоне описывается условием пластичности Мизеса для идеально упругопластического материала ($c_n = 0$).

В плоскости, перпендикулярной оси $0Z$, согласно [6, 8] запишем уравнение контура, ограничивающего включение до деформации

$$\rho = \alpha_1(1+\delta d_1 \cos 2\theta - ...), \tag{2}$$

уравнение контура, ограничивающего отверстие в плите до деформации

$$\rho = \alpha(1+\delta d_1 \cos 2\theta - ...), \tag{3}$$

уравнение контура, ограничивающего внутреннее отверстие во включении до деформации

$$\rho = \beta(1+\delta d_2 \cos 2\theta - ...), \tag{4}$$

где $\alpha_1 > \alpha$, введем $\varepsilon = \alpha_1 - \alpha$ – малое по сравнению с единицей, α, α_1, β – радиусы круговых контуров в нулевом приближении соответственно: отверстия в плите, внешнего очертания включения, внутреннего отверстия во включении, δ – малый параметр, характеризующий отклонение контура от окружности, возмущение статических граничных условий $\left(\delta d_3 = \dfrac{P_1 - P_2}{2k_1}\right)$, а также отклонение функции нагружения от идеально пластического условия Мизеса, d_1, d_2, d_3 – безразмерные константы.

Согласно сказанному выше, решение задачи ищется в виде

$$\sigma_{\rho_n} = \sigma_{\rho_n}^{(0)} + \delta\sigma_{\rho_n}^{(1)}, \quad \sigma_{\theta n} = \sigma_{\theta_n}^{(0)} + \delta\sigma_{\theta_n}^{(1)},$$

$$\tau_{\rho\theta_n} = \tau_{\rho\theta_n}^{(0)} + \delta\tau_{\rho\theta_n}^{(1)}, \quad \sigma_{zn} = \frac{1}{2}(\sigma_{\rho_n} + \sigma_{\theta_n}), \tag{5}$$

$$\rho_{koo} = R_0 + \delta R_1, r_s = 1 + \delta r_s^{(1)}, c_n = c_n^{(0)} + \delta c_n^{(1)},$$

где верхний индекс указывает на номер приближения, индекс $n = 1$ (плита), 2 (включение), δ – малый параметр, $\sigma_{\rho_n}, \sigma_{\theta n}, \sigma_{zn}, \tau_{\rho\theta_n}$ – компоненты тензора напряжений, r_s – радиус упругопластической границы в плите, $\rho_{кон}$ – линия контакта включения и плиты.

Ввиду малости величины ε, примем за линию контакта плиты и включения внешнюю границу включения [6,8], которая при разложении представляется в форме

$$\rho_{кон} = R^{(0)} + \delta R^{(1)}, \tag{6}$$

где $R^{(0)} = \alpha_1, \qquad R^{(1)} = \alpha_1 d_1 \cos 2\theta$.

Все соотношения записаны в безразмерном виде. Величины, имеющие размерность напряжений, отнесены к k_1 – пределу текучести на сдвиг материала плиты. Перемещения отнесены к радиусу упругопластической границы в плите r_{s0}. Для обозначения безразмерных величин используем прежние обозначения.

Следуя [3], для пластины в упругой области имеем

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)} = P - \frac{\chi_1}{\rho^2}, \sigma_{\theta_1}^{(0)} = P + \frac{\chi_1}{\rho^2}, u_{\rho_1}{}^{(0)} = \frac{\chi_1}{2G\rho}, \tag{7}$$

$$e_{\rho_1}^{e(0)} = e_{\rho_1}{}^{(0)} = -\frac{\chi_1}{2G\rho}, e_{\theta_1}{}^{(0)} = \frac{\chi_1}{2G\rho},$$

где $\chi_1 = sign(P+q), q = \sigma_{\rho_1}^{(0)}\Big|_{\rho=\alpha_1}$.

В пластической зоне пластины имеем

$$\sigma_{\rho_1}^{(0)} = 2\chi_1 \ln\frac{\rho}{\alpha_1} + 2k\chi_2 \ln\frac{\alpha_1}{\beta} - P_0, \sigma_{\theta_1}^{(0)} = 2\chi_1\left(1 + \ln\frac{\rho}{\alpha_1}\right) + 2k\chi_2 \ln\frac{\alpha_1}{\beta} - P_0, \tag{8}$$

$$u_{\rho_1}{}^{(0)} = \frac{\chi_1}{2G_1\rho}, e_{\theta_1}^{p\,(0)} = \frac{\chi_1}{2G_1}\left(\frac{1}{\rho^2} - 1\right), e_{\rho_1}^{p\,(0)} = -\frac{\chi_1}{2G_1}\left(\frac{1}{\rho^2} - 1\right),$$

где G_1 – модуль сдвига материала плиты, $\chi_2 = \pm 1$, $k = \dfrac{k_2}{k_1}$.

Во включении распределение поля напряжений и перемещений имеет вид

$$\sigma_{\rho_2}^{(0)} = 2k\chi_2 \ln\frac{\rho}{\beta} - P_0,\ \sigma_{\theta_2}^{(0)} = 2k\chi_2\left(1 + \ln\frac{\rho}{\beta}\right) - P_0,$$

$$e_{\theta_2}^{p(0)} = \left(\frac{\chi_1}{2G_1} - (\alpha_1 - \alpha)\alpha_1\right)\frac{1}{\rho^2} - \frac{k\chi_2}{2G_2}, \tag{9}$$

где G_2 – модуль сдвига материала включения.

Из условий сопряжения на упругопластической границе в плите определяем радиус упругопластической границы в плите

$$r_{s0} = \frac{1}{2\chi_1}\exp\left(2\chi_1 \ln\alpha_1 - 2k\chi_2 \ln\left(\frac{\alpha_1}{\beta}\right) + P_0 + P - \chi_1\right). \tag{10}$$

Рассмотрим первое приближение.

Граничные условия на бесконечности имеют вид

$$\sigma_{\rho_1}^{\infty} = P - \delta d_3 \cos 2\theta; \qquad \tau_{\rho\theta_1}^{\infty} = \delta d_3 \sin 2\theta, \tag{11}$$

где $P = \dfrac{P_1 + P_2}{2k}$, $\delta d_3 = \dfrac{P_1 - P_2}{2k}$, d_3 – безразмерная постоянная.

Линеаризованные условия сопряжения на упругопластической границе в плите и граничные условия на внутреннем контуре включения для первого приближения записываем согласно [3]

$$\left.\left(\sigma_{\rho_2}^{(1)} + \frac{d\sigma_{\rho_2}^{(0)}}{d\rho}\beta d_2 \cos 2\theta\right)\right|_{\rho=\beta} = 0;$$

$$\left.\left(\tau_{\rho\theta_2}^{(1)} + 2\left(\sigma_{\theta_2}^{(0)} - \sigma_{\rho_2}^{(0)}\right)d_2 \sin 2\theta\right)\right|_{\rho=\beta} = 0. \tag{12}$$

$$\left.\left[\sigma_{ij_1}^{(1)} + \frac{\partial\sigma_{ij_1}^{(0)}}{\partial\rho} r_s^{(1)}\right]\right|_{\rho=1} = 0, \tag{13}$$

где $\sigma_{ij_1}^{(0)}, \sigma_{ij_1}^{(1)}$ – компоненты тензора напряжений для нулевого и первого приближения.

Вдоль линии контакта плиты и включения, имеем

$$\sigma_{\rho_1}^{(1)} + \frac{d\sigma_{\rho_1}^{(0)}}{d\rho}R^{(1)} = \sigma_{\rho_2}^{(1)} + \frac{d\sigma_{\rho_2}^{(0)}}{d\rho}R^{(1)},$$

$$\tau_{\rho\theta_2}^{(1)} - (\sigma_{\theta_2}^{(0)} - \sigma_{\rho_2}^{(0)})\dot{s}_1 = \tau_{\rho\theta_1}^{(1)} - (\sigma_{\theta_1}^{(0)} - \sigma_{\rho_1}^{(0)})\dot{s}_1 = 0, \quad \text{при } \rho = R^{(0)}, \tag{14}$$

где $s_1 = R^{(1)} / R^{(0)}$.

Рассматривался случай малого упрочнения [1] $c_n = \delta c_n^{(1)}$, $n = 1,2$.

Согласно алгоритму Ивлева-Ершова при учете граничных условий (11), имеем в упругой области плиты для $\infty > \rho > 1$

$$\sigma_{\rho_1}^{(1)} = \frac{A_{пл}}{\rho^2} - \left(d_3 + 6a_{21}\rho^{-4} + 4a_{22}\rho^{-2}\right)\cos 2\theta,$$

$$\sigma_{\theta_1}^{(1)} = -\frac{A_{пл}}{\rho^2} + \left(d_3 + 6a_{21}\rho^{-4}\right)\cos 2\theta, \tag{15}$$

$$\tau_{\rho\theta_1}^{(1)} = \left(d_3 - 6a_{21}\rho^{-4} - 2a_{22}\rho^{-2}\right)\sin 2\theta,$$

где $A_{пл}, a_{21}, a_{22}$ – константы, определяемые из условий сопряжения (14) на границе контакта плиты и включения.

В пластической области плиты, согласно [1, 3, 8] имеем уравнение

$$\sigma_{\theta_1}^{(1)} - \sigma_{\rho_1}^{(1)} = 2c_1^{(1)} e_{\theta 1}^{p(0)},$$

откуда получаем соотношения для напряжений

$$\sigma_{\rho_1}^{(1)} = A_{пл} - m_{1пл}\left(\ln\rho + \frac{1}{2\rho^2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{\rho}\left(d_3\cos\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) - 2\sqrt{3}a_{21}\sin\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) + 2a_{22}\cos\gamma\right)\cos 2\theta,$$

$$\sigma_{\theta_1}^{(1)} = A_{пл} - m_{1пл}\left(\ln\rho - \frac{1}{2\rho^2} + \frac{5}{4}\right) - \frac{2}{\rho}\left(d_3\cos\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) - 2\sqrt{3}a_{21}\sin\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right) + 2a_{22}\cos\gamma\right)\cos 2\theta,$$

$$\tau_{\rho\theta_1}^{(1)} = -\frac{2}{\rho}\left(-d_3\cos\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sqrt{3}a_{21}\sin\left(\gamma + \frac{\pi}{3}\right) + 2a_{22}\cos\left(\gamma - \frac{\pi}{3}\right)\right)\sin 2\theta, \tag{16}$$

где $\gamma = \sqrt{3}\ln\rho$, $m_{1пл} = \dfrac{2c_1^{(1)}k}{2G_1 + c_1}$.

Аналогично, для пластического включения имеем

$$\sigma_{\rho_2}^{(1)} = \frac{d_2 k x_2 \beta}{\rho}\left(\left(-4\cos\left(\gamma_2 + \frac{\pi}{6}\right) - 4\sqrt{3}\sin\left(\gamma_2 - \frac{\pi}{6}\right) + 4\cos\left(\gamma_2 - \frac{\pi}{6}\right)\right)\cos\gamma + \right.$$

$$\left. + \left(-4\sin\left(\gamma_2 + \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin\left(\gamma_2 - \frac{\pi}{6}\right) - 4\sqrt{3}\cos\left(\gamma_2 - \frac{\pi}{6}\right)\right)\sin\gamma\right)\cos 2\theta - 2d_2 k x_2 + \frac{m_{1вкл}}{2}\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\rho}\right) + m_{2вкл}\ln\frac{\beta}{\rho}, \tag{17}$$

$$\sigma_{\theta_2}^{(1)} = \sigma_{\rho_2}^{(1)} - 2d_2 k x_2 + \frac{m_{1вкл}}{2}\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\rho^2}\right) + m_{2вкл}\ln\frac{\beta}{\rho},$$

$$\tau_{\rho\theta_2}^{(1)} = \frac{4d_2\beta k x_2}{\rho}\left(2\cos\left(\sqrt{3}\ln\frac{\beta}{\rho} - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\sqrt{3}\ln\frac{\beta}{\rho}\right)\right)\sin 2\theta,$$

где $\gamma_2 = \sqrt{3}\ln\beta$, $m_{1пл} = 2c_2\left(\dfrac{\chi_1}{2G_1} - (\alpha_1 - \alpha)\alpha_1\right)$, $m_{2пл} = \dfrac{2c_2^{(1)}k\chi_2}{2G_2}$.

Для определения вида констант $A_{пл}, a_{21}, a_{22}$ используются соотношения на границе контакта плиты и включения (14). Таким образом, полученные соотношения (15)– (17) полностью определяют напряженное состояние в плите и включении для первого приближения. Вид упругопластической границы первого приближения $r_s^{(1)}$ определяется линеаризированным условием [3]

$$r_s^{(1)} = -\left[\sigma_\theta^{(1)}\right] \cdot \left[\frac{\partial \sigma_\theta^{(0)}}{\partial \rho}\right]^{-1} \Bigg|_{\rho=1} . \qquad (18)$$

С использованием (15) и (16) выражение (18) даст радиус упругопластической границы в плите, который в этом случае имеет вид

$$r_s^{(1)} = \frac{1}{4}(2d_3 + 9a_{21} + 2a_{22})\cos 2\theta - 2c_{пл} + \frac{m_{1пл}}{4} . \qquad (19)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, при $d_3 = 0$ имеем случай равномерного растяжения конструкции на бесконечности, при $d_1 = d_2 = 0$ круговое отверстие в плите и круговое включение, при $c_n = 0, n = 1, 2$ – случай идеально пластического материала [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Артемов, М.А. О двуосном растяжении толстой пластины с круговым отверстием из упрочняющегося упругопластического материала / М.А. Артемов // ПМТФ. – 1985. – № 6. – С. 158–163.
2. Быковцев, Г.И. Теория пластичности / Г.И. Быковцев, Д.Д. Ивлев. – Владивосток : Дальнаука, 1998. – 528 с.
3. Ивлев, Д.Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д.Д. Ивлев, Л.В. Ершов. – М. : Наука, 1978. – 208 с.
4. Ишлинский, А.Ю. Математическая теория пластичности / А.Ю. Ишлинский, Д.Д. Ивлев. – М. : Физматлит, 2001. – 701 с.
5. Кузнецов, П.Н. Упругопластическое состояние неоднородной плоскости с круговым отверстием, подкрепленным эксцентрическим эллиптическим включением, при двухосном растяжении / П.Н. Кузнецов // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2008. – Т. 67, № 8/2. – С. 90–97.
6. Марушкей, Ю.М. Двуосное растяжение упругопластического пространства с включением / Ю.М. Марушкей // Изв. вузов. Машиностроение. – 1975. – № 12. – С. 25–30.
7. Мусхелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.
8. Спорыхин А.Н. Неодномерные задачи упруговязкопластичности с неизвестной границей / А.Н. Спорыхин, А.В. Ковалев, Ю.Д. Щеглова. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2004. – 219 с.

Поступила 03.11.11