

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ ЗАДАНИЯ НАЧАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В САЕ-СИСТЕМАХ В СЛУЧАЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО КРУЧЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Щеглова Ю.Д.

*Intended use of the small parameter method in CAE systems based on the following assumptions. It may be that the zero approximation is used as the initial distribution of some vector function shows poor convergence. We can expect that convergence can be improved by using as the initial distribution of the solution obtained by the method of small parameter, taking into account the first approximation. It may be effective for a wide class of nonlinear problems such as problems of heterogeneous plasticity theory. The heterogeneity of the material characterized by the dependence of the yield strength of the coordinate points of the body. The present work is devoted to the problem of elastoplastic torsion of heterogeneous hollow rod with a circular cross section. The outer contour of cross section is covered wholly with plastic zone. The stress state in the first approximation is defined by using of the small parameter method.*

Предполагаемое использование метода малого параметра в САЕ-системах базируется на следующих предпосылках. Может оказаться, что используемое в качестве начального распределения некоторой векторной функции нулевое приближение покажет плохую сходимость, тогда можно ожидать, что для целого класса нелинейных задач сходимость может быть улучшена, если в качестве начального распределения использовать решение, полученное методом малого параметра с учетом первого приближения. К такому классу задач, например, можно отнести задачи теории пластичности неоднородных сред. В данном случае неоднородность материала характеризуется зависимостью предела текучести от координат точек тела.

Работы [1]-[2] посвящены решению задачи плоской деформации для трубы из неоднородного упругопластического материала методом малого параметра.

В настоящей работе, следуя подходу авторов [1]-[2], с использованием метода малого параметра определено напряженное состояние в первом приближении задачи упругопластического кручения неоднородного полого стержня с кольцевым поперечным сечением.

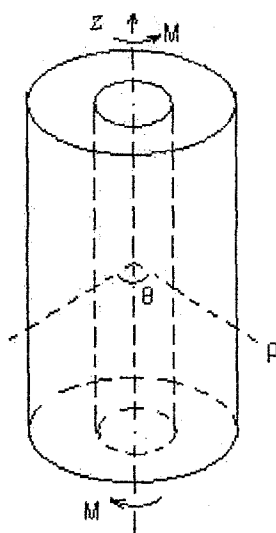


Рисунок 1 – Кручение полого цилиндрического стержня

Рассмотрим задачу упругопластического кручения неоднородного полого стержня (рисунок 1). Внешняя и внутренняя поверхности стержня являются круговыми цилиндрами радиусов  $\beta$  и  $\alpha$  ( $\beta > \alpha$ ).

Введем цилиндрическую систему координат  $\rho, \theta, z$  так, что координатная ось  $z$  направлена по оси цилиндров.

Стержень закручивается вокруг оси  $z$  равными и противоположными парами сил с моментом  $M$ . Боковая поверхность свободна от нагрузок. Предположим, что величина крутящего момента  $M$  такова, что пластическая зона целиком охватывает внешний контур. Упругопластическая граница заранее неизвестна и подлежит определению в процессе решения задачи о напряженном состоянии стержня. В пластической области материал трубы предполагается неоднородным, предел текучести является функцией координат.

Следуя известной гипотезе жесткого контура [3], представим определяющие соотношения для данной задачи. Они будут иметь вид (далее символ «e» сверху подчеркивает принадлежность величин к упругой области, а символ «p» – к пластической).

Уравнения равновесия сводятся к одному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \tau_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0. \quad (1)$$

В упругой области имеют место соотношения Коши в виде

$$e_{\rho z}^e = \frac{\omega}{2} \frac{\partial w^e}{\partial \rho}, \quad e_{\theta z}^e = \frac{\omega}{2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial w^e}{\partial \theta} + \rho \right), \quad (2)$$

где  $w^e$  – неизвестная функция, характеризующая деформацию поперечного сечения,  $\omega$  – крутка или угол кручения на единицу длины.

Соотношения закона Гука

$$\tau_{\rho z}^e = 2Ge_{\rho z}^e, \quad \tau_{\theta z}^e = 2Ge_{\theta z}^e, \quad (3)$$

где  $G = \mu$  – модуль сдвига.

Условие пластичности примем в виде

$$\tau_{\rho z}^{p2} + \tau_{\theta z}^{p2} = \left( k_0 + \delta \left( \frac{(x+A)^2 + (y+B)^2}{a^2} \right) \right)^2, \quad (4)$$

где  $k_0, a$  – const,  $\delta$  – малый безразмерный параметр.

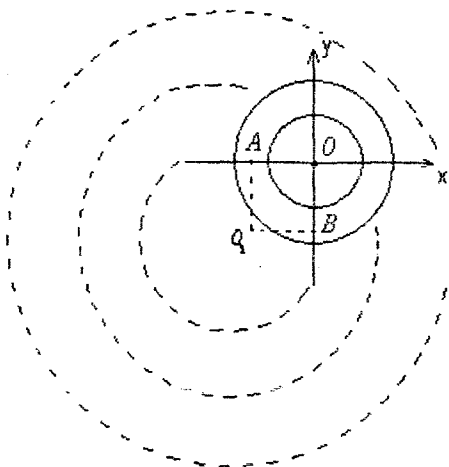


Рисунок 2 – Схематическое изображение неоднородности материала

Согласно (4) предел текучести сохраняет постоянное значение вдоль окружностей

$$\frac{(x+A)^2 + (y+B)^2}{a^2} = c,$$

где  $c = \text{const}$  (рисунок 2).

На внешнем контуре  $L_1$  и внутреннем контуре  $L_2$  выполняются граничные условия

$$\left\{ \tau_{\rho z}^p n_\rho^{(1)} + \tau_{\theta z}^p n_\theta^{(1)} \right\}_{L_1} = 0, \quad (5)$$

$$\left\{ \tau_{\rho z}^e n_\rho^{(2)} + \tau_{\theta z}^e n_\theta^{(2)} \right\}_{L_2} = 0, \quad (6)$$

где  $n_\rho^{(i)}, n_\theta^{(i)}$  – компоненты единичной нормали к контуру  $L_i$  ( $i=1, 2$ ).

На упругопластической границе выполняются условия непрерывности напряжений

$$\left[ \tau_{\rho z} \right]_{L_s} = 0, \quad \left[ \tau_{\theta z} \right]_{L_s} = 0, \quad (7)$$

где  $L_s$  – упругопластическая граница.

В упругой области из уравнения равновесия (1), учитывая (3) и (2), получим

$$\Delta w^e = 0, \quad (8)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}$  – оператор Лапласа.

Далее в соотношениях (1)-(3) и (5)-(8) все величины, имеющие размерность напряжения, будем считать безразмерными и отнесенными к пределу текучести в нулевом приближении  $k_0$ , величины, имеющие размерность длины, также будем считать безразмерными и отнесенными к радиусу упругопластической границы в нулевом приближении  $\rho_0$ .

Условие (4) в безразмерном виде примет форму

$$\tau_{\rho z}^{p2} + \tau_{\theta z}^{p2} = \left( 1 + \delta \left( \frac{(x+A)^2 + (y+B)^2}{a^2} \right) \right)^2. \quad (9)$$

Уравнения внешнего и внутреннего контуров стержня  $L_1$  и  $L_2$  имеют вид

$$\rho = \beta, \quad \rho = \alpha, \quad (10)$$

где  $\beta, \alpha$  – внешний и внутренний безразмерные радиусы, соответственно.

Граничные условия на контурах (5), (6) с учетом (10) запишутся в виде

$$\tau_{\rho z}^p \Big|_{\rho=\beta} = 0, \quad (11)$$

$$\tau_{\rho z}^e \Big|_{\rho=\alpha} = 0. \quad (12)$$

Определим напряженное состояние стержня, используя метод малого параметра.

Все искомые величины представим в виде рядов по степеням параметра, следуя [4],

$$\tau_{ij} = \tau_{ij}^{(0)} + \delta \tau_{ij}^{(1)} + \dots, \quad w^e = w^{e(0)} + \delta w^{e(1)} + \dots, \quad \rho_s = \rho_0 + \delta \rho_1 + \dots, \quad (13)$$

здесь  $\rho_s$  – упругопластическая граница.

Подставляя выражения (13) в соотношения (1)-(3), (5)-(9), (11), (12) и выписывая системы определяющих соотношений при одинаковых степенях малого параметра  $\delta$ , получим, что в нулевом приближении имеет место известная задача упругопла-

стического кручения однородного полого стержня с поперечным сечением в виде кольца. Решение этой задачи имеет вид [3]

$$\tau_{\theta z}^{p(0)} = 1, \quad \tau_{\rho z}^{p(0)} = 0, \quad \tau_{\theta z}^{e(0)} = G\omega\rho, \quad \tau_{\rho z}^{e(0)} = 0, \quad \rho_0 = 1. \quad (14)$$

Рассмотрим решение задачи в первом приближении. В силу линейности соотношения (1) и (8) сохраняют свой вид для каждого приближения.

Условие пластичности (9) в первом приближении будет иметь вид

$$\tau_{\rho z}^{p(0)}\tau_{\rho z}^{p(1)} + \tau_{\theta z}^{p(0)}\tau_{\theta z}^{p(1)} = \frac{(x+A)^2 + (y+B)^2}{a^2}. \quad (15)$$

Подстановка (14) в (15) дает выражение для  $\tau_{\theta z}^{p(1)}$ , а именно,

$$\tau_{\theta z}^{p(1)} = \frac{(x+A)^2 + (y+B)^2}{a^2}.$$

Переход к полярным координатам с учетом того, что  $x = \rho \cos\theta$ ,  $y = \rho \sin\theta$  позволяет получить эту компоненту напряжений в виде

$$\tau_{\theta z}^{p(1)} = \frac{1}{a^2}(\rho^2 + 2\rho(A \cos\theta + B \sin\theta) + A^2 + B^2). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (1) и учитывая граничное условие (11), получим компоненту напряжения

$$\tau_{\rho z}^{p(1)} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\beta^2}{\rho} - \rho \right) (-A \sin\theta + B \cos\theta). \quad (17)$$

Из соотношений (2) и (3) следует, что компоненты напряжения в первом приближении в упругой области будут определяться выражениями

$$\tau_{\rho z}^{e(1)} = G\omega \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho}, \quad \tau_{\theta z}^{e(1)} = G\omega \frac{1}{\rho} \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \theta}. \quad (18)$$

С учетом (18) граничное условие на внутреннем контуре (12) преобразуется к виду

$$\left. \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=\alpha} = 0. \quad (19)$$

Условия непрерывности компонент напряжений на упругопластической границе (7) будут иметь вид

$$\left( \frac{\partial \tau_{\rho z}^{p(0)}}{\partial \rho} \rho_1 + \tau_{\rho z}^{p(1)} \right) \Big|_{\rho=1} = \left( \frac{\partial \tau_{\rho z}^{e(0)}}{\partial \rho} \rho_1 + \tau_{\rho z}^{e(1)} \right) \Big|_{\rho=1}, \quad (20)$$

$$\left( \frac{\partial \tau_{\theta z}^{p(0)}}{\partial \rho} \rho_1 + \tau_{\theta z}^{p(1)} \right) \Big|_{\rho=1} = \left( \frac{\partial \tau_{\theta z}^{e(0)}}{\partial \rho} \rho_1 + \tau_{\theta z}^{e(1)} \right) \Big|_{\rho=1}. \quad (21)$$

Соотношение (20) при использовании (14), (17) и (18) примет форму

$$\left. \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = \frac{\beta^2 - 1}{a^2} (-A \sin\theta + B \cos\theta). \quad (22)$$

Для функции  $w^{e(1)}$  в упругой области, объединяя (8), (19) и (22), получим задачу Неймана для кольца

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w^{e(1)} = 0 \\ \left. \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = \frac{\beta^2 - 1}{a^2} (-A \sin \theta + B \cos \theta) . \\ \left. \frac{\partial w^{e(1)}}{\partial \rho} \right|_{\rho=\alpha} = \theta \end{array} \right.$$

Решая эту задачу, получим функцию деформации в виде

$$w^{e(1)} = \frac{\omega(\beta^2 - 1)}{a^2(1 - \alpha^2)} \left( \rho + \frac{\alpha^2}{\rho} \right) (B \cos \theta - A \sin \theta) ,$$

и напряжения в упругой области (18) будут такими

$$\begin{aligned} \tau_{\rho z}^{e(1)} &= \frac{G\omega(\beta^2 - 1)}{a^2(1 - \alpha^2)} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) (B \cos \theta - A \sin \theta) , \\ \tau_{\theta z}^{e(1)} &= -\frac{G\omega(\beta^2 - 1)}{a^2(1 - \alpha^2)} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right) (A \cos \theta + B \sin \theta) . \end{aligned} \quad (23)$$

Из условия (21) с учетом (14), (16) и (23) получим выражение для радиуса упругопластической границы в первом приближении

$$\rho_1 = \frac{1}{a^2} \left( 1 + A^2 + B^2 + (A \cos \theta + B \sin \theta) \left( 2 + \frac{(\beta^2 - 1)(1 + \alpha^2)}{1 - \alpha^2} \right) \right) .$$

Тогда упругопластическая граница согласно (13) и (14) примет вид

$$\rho_s = 1 + \delta \rho_1 .$$

На рисунке 3 показана зависимость упругопластической границы от угла  $\theta$  в случае однородного и неоднородного материала. При этом значения безразмерных характеристик принимались следующими:  $\delta = 0.1$ ,  $a = 2.5$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 3$ ,  $A = 1.2$ ,  $B = 0.9$ .

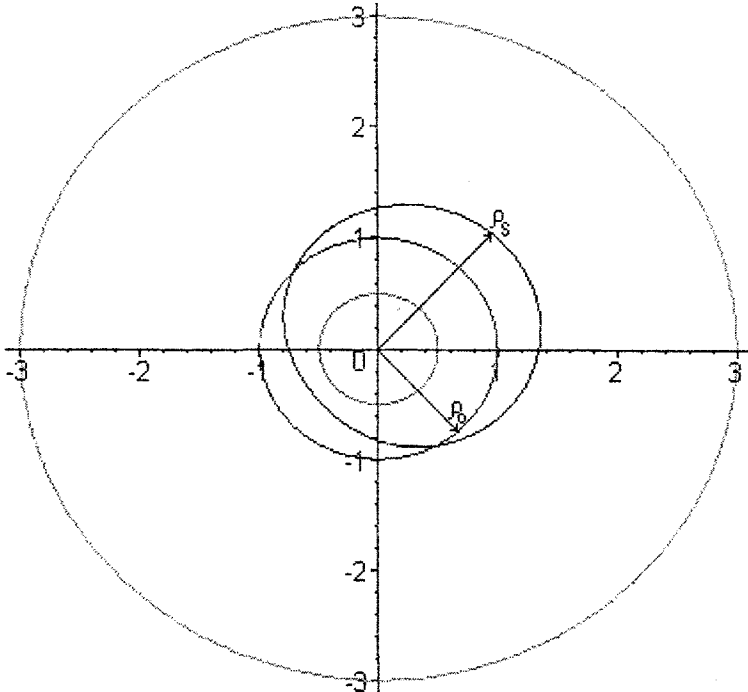


Рисунок 3 – Положение упругопластической границы

На рисунке 4 представлена зависимость компоненты напряжений  $\tau_{\theta z}^p$  в пластической зоне от координаты  $\rho$ . При этом значения безразмерных характеристик принимались следующими:  $\delta = 0.1$ ,  $a = 2.5$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 3$ ,  $A = 1.5$ ,  $B = 1$ ,  $\theta = \pi/4$ .

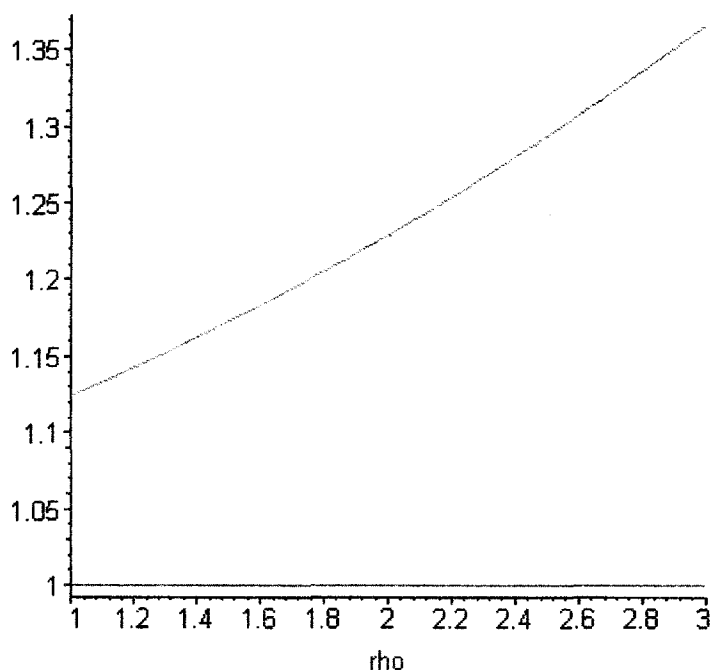


Рисунок 4 – Зависимость компоненты напряжений  $\tau_{\theta z}^p$  от координаты  $\rho$  в нулевом приближении ( $\tau_{\theta z}^p = 1$ ) и с учетом первого приближения

Из полученного решения следует, что учет первого приближения оказывает очевидное влияние на характер поведения компонент напряжений и в упругой и в пластической областях и на положение упругопластической границы. Предположение об использовании полученного решения в САЕ-системах требует экспериментальной проверки.

Следуя [2], можно отметить, что прием определения неоднородных свойств на примере концентрических окружностей может быть распространен на случай различных семейств кривых.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Максимова, Л.А. Об упругопластическом состоянии неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления / Л.А. Максимова, С.В. Тихонов // Вестник ЧГПУ им. Яковлева. Механика предельного состояния. – 2007. – № 2. – С. 91–95.
2. Тихонов, С.В. Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы из неоднородного материала под действием внутреннего давления / С.В. Тихонов // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. – 2007. – № 6. – С.13–20.
3. Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М: Наука, 1969. – 420 с.
4. Ивлев, Д.Д. Метод возмущений в теории упругопластического тела / Д.Д. Ивлев, Л.В. Ершов. – М: Наука, 1978.

Поступила 31.10.11